ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 61.

DER GANZEN REIHE 365. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

LEIPZIG, 1920.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

BERLIN
LIBRARY

Anm 7d
9.E.5.
4,50+1,25.

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge Band 61.

Erstes Heft.

		Seite
1.	Ernst Reichenbächer. I. Das skalare Gravitationspotential	1
2.	Ernst Reichenbächer. II. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation	21
3.	Ernst Reichenbächer. III. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde	25
4.	H. Lang. Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie	32
5.	Erwin Schrödinger. Über die Kohärenz in weitgeöffneten Bündeln	69
6.	M. Born. Über die elektrische Natur der Kohäsionskräfte fester Körper	87
7.	E. Böttcher und F. Tuczek. Der Effekt des elektrischen Feldes auf Linien des Argons und des Sauerstoffs	107

Ausgegeben am 8. Januar 1920.

Zweites Heft.

1.	Fritz Banneitz, Gerhard Rhein und Benno Kurze. Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase	113
2.	G. Falckenberg. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Wassers, Äthylalkohols, Methylalkohols und Acetons vom Druck	145
3.	G. Falckenberg. Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-8}$	167
4.	George Jaffé. Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden	173

Seite

5. Marie Anna Schirmann. Versuch einer einheitlichen Erklärung der Erscheinungen der atmosphärischen Polarisation . 195
6. Karl Heil. Läßt sich ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen nachweisen? 201

Ausgegeben am 15. Januar 1920.

Drittes Heft.

1. J. E. Lilienfeld. Zur Hochvakuumentladung 221
2. Teófilo Isnardi. Die Dampfspannung des festen Broms. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans.) 264
3. G. Bakker. Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes, insbesondere von Kohlensäure 275
4. F. v. Hauer. Bewegung und Ladung kleiner Teilchen im ionisierten elektrischen Feld 309

Ausgegeben am 3. Februar 1920.

Viertes Heft.

1. H. Dember und M. Uibe. Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes 313
2. P. Boedke. Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorie der verdünnten Lösungen 334
3. H. Dember und M. Uibe. Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont 353
4. Richard Gans. Die reversible Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve 379
5. Richard Gans. Die Trägheitsmomente der Magnetonen . 390
6. Richard Gans. Bemerkung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“ 393
7. Richard Gans. Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie 400
8. A. Esau. Der gegenseitige Induktionskoeffizient von Rechtecken und Quadraten 419

Ausgegeben am 22. Februar 1920.

Fünftes Heft.

1. Helge Bohlin. Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver. (Hierzu Taf. I.) 42
2. P. Ehrenfest. Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? 44

Seite

3. Richard Gans. Das Verhalten Hertzscher Gitter . . . 447
4. Richard Gans und Ricardo Calatroni. Die Form ultramikroskopischer Platinteilchen 465
5. Reinhard Mecke. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel . . 471

Ausgegeben am 3. März 1920.

Sechstes Heft.

1. O. Lehmann. Über Strukturverdrehung bei schleimig-flüssigen Kristallen 501
2. Wilhelm Traub. Die Dispersion der Luft im ultravioletten Spektrum 533
3. K. Försterling. Spezifische Wärme und Zustandsgleichung von Kristallen 549
4. K. Försterling. Über die Verschiebung des Maximums der Reflexion gegen die Lage der Eigenfrequenz 577

Ausgegeben am 16. März 1920.

Siebentes Heft.

1. Héctor Isnardi und Richard Gans. Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut; ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen 585
2. Robert Eppendahl. Über das piëzooptische Verhalten von Topas 591
3. Fritz Sigismund Schmidt. Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln 633

Ausgegeben am 15. April 1920.

Achtes Heft.

1. P. Lenard. Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien, mit Beiträgen von W. Weick und Hans Ferd. Mayer 665
2. R. Gans und A. Fonseca. Die magnetischen Eigenschaften von Nickel–Kupfer-Legierungen 742
3. H. Haga und F. Zernike. Über thermoelektrische Ströme in Quecksilber 758

Ausgegeben am 4. Mai 1920.

Nachweis zu der Figurentafel.

Tafel I. H. Bohlin.

1920. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *I. Das skalare Gravitationspotential;* *von Ernst Reichenbächer.*

1. Abschnitt.

Wie entsteht die Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit durch die Gravitation im allgemeinsten Falle?

Die Gravitationswirkungen werden bekanntlich nach der Einsteinschen Theorie aus der Annahme eines von der gewöhnlichen Euklidisch-Minkowskischen Maßvorschrift verschiedenen und auch nicht aus ihr durch Transformation herleitbaren Ansatzes für das Linienelement der vierfach ausgedehnten Raumzeitmannigfaltigkeit abgeleitet, wobei die 10 Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ dieses Ansatzes als Gravitationspotentiale aufgefaßt werden. Hierbei ergibt sich die Massendichte im Gegensatz zu der gewöhnlichen Anschauung nicht als Skalar, sondern als 44-Komponente eines 16gliedrigen Tensors, dessen andere Komponenten allerdings ihr gegenüber sehr klein sind. Dies und die Tatsache, daß die $g_{\mu\nu}$ wegen ihrer Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems einer freilich eingeschränkten Willkür unterworfen sind, hat mich in der Einsteinschen Theorie nicht befriedigt, und ich habe deshalb in meiner Arbeit: „Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation“[1]) versucht, die Theorie eines skalaren Gravitationspotentials, das ich mit der Lichtgeschwindigkeit identifizierte, aufzustellen, wobei ich an bestimmte Voraussetzungen über die Gravitationserregung durch die Elektronen anknüpfte, die ich — positive und negative — als das einzig Materielle ansah. Den einfachsten Fall der Verzerrung einer ohnedies Minkowskischen Mannigfaltigkeit durch die Gravitation eines einzigen Elektrons hatte ich dabei erledigt und nach Analogie dieses Falles allgemein die Gleichung[2])

$$(1) \qquad \mathfrak{L} = 2 \,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathrm{lg}\,\mathrm{I}$$

1) Ann. d. Phys. 52. S. 134. 1917.

2) A. a. O. S. 168. Gl. (76), S. 169. (Gl. 77), desgl. im Nachtrag S. 176. Gl. (VII).

aufgestellt. Es fehlte aber der Beweis für diesen Analogieschluß, der insbesondere auf den Nachweis der Möglichkeit dieses Ansatzes 1 hinausläuft und in folgendem geführt werden soll.

Es ist im allgemeinen Falle zu erörtern, wie die Gravitationswirkung eines weiteren Elektrons oder Anziehungsmittelpunktes verzerrend auf die Raumzeitmannigfaltigkeit einwirkt, die ihrerseits selbst schon ohnedies durch die Gravitation von beliebig vielen anderen Elektronen umgebildet ist. Dies Einführen einer „neuen" Verzerrung soll nun aber nicht etwa bedeuten, daß nun irgendwo und irgendwann ein neues Elektron plötzlich entstehen und das vorhandene Feld umbilden könnte, sondern geschieht nur zu dem Zwecke einer vollständigen Induktion, eines Schlusses von n auf $n+1$. Es kann also nun kein Zweifel darüber herrschen, daß ich mit den Ausdrücken „vor" und „nach" der Verzerrung durch die Gravitation des „neuen" Elektrons keine zeitlichen Beziehungen meine. Die Mannigfaltigkeit vor der Verzerrung ist, wie eben gesagt, schon nicht mehr Minkowskisch, da sie ja schon durch die übrigen Elektronen umgebildet ist; es soll aber für sie die Gültigkeit der Gleichung (1) gefordert werden, was für ein einziges solches Elektron möglich ist, wie ich in meiner Arbeit gezeigt habe, sogar auch für den von Einstein geforderten Fall der Verzerrung des Ruhraumes des gravitierenden Zentrums, wobei die Perihelwanderung die doppelte ist wie in dem sonst von mir zugrunde gelegten Fall.[1])

Die Gravitation des neuen Elektrons äußert sich natürlich in einer Änderung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ in dem Ausdruck für das Linienelementquadrat in der Mannigfaltigkeit, wie er vor der Verzerrung bestand. Diese Änderung wird sich nun wieder am leichtesten für ein Koordinatensystem berechnen lassen, dessen Lage dem mit räumlichen Polarkoordinaten in dem in meiner Arbeit erledigten Falle entspricht, wo die Mannigfaltigkeit vor der Verzerrung Minkowskisch war. Ein solches Koordinatensystem konstruiere ich folgendermaßen: In allen Punkten der Weltlinie (besser Mittelisogone) des verzerrenden Elektrons errichte ich die orthogonalen geodätischen Linien; die zu je einem Punkte gehörigen bilden

1) A. a. O. Nachtrag S. 176. Gl. (VI) und S. 177. Gl. (X).

eine räumliche Mannigfaltigkeit, die man als jeweiligen Ruhraum des Elektrons bezeichnen kann. Die Schar der orthogonalen Trajektorien dieser Ruhräume wird dann einer Verzerrung unterworfen, deren Betrag nur von ihrem geodätisch gemessenen Abstand von der Mittelisogone abhängen wird. Dies ist deshalb möglich, da sich dieser Abstand nicht ändert, wenn man eine solche Trajektorie durchläuft; denn diese liegt gänzlich in einem Parallelraum zur Mittelisogone, den man erhält, wenn man auf allen geodätischen Linien von dieser Isogone aus gleiche Stücke abträgt. Da dieser Parallelraum auf allen geodätischen Linien senkrecht steht, bildet er auch mit den Ruhräumen rechte Winkel und enthält also die Trajektorien in ihrer ganzen Ausdehnung. Sämtliche Parallelräume — die übrigens mit Zylindern verglichen werden können — bilden mit den geodätischen Linien ein sogenanntes Gaußsches Koordinatensystem[1]), während die Trajektorien mit dem — den Ebenen unseres Raumes analogen — Ruhräumen ein halborthogonales System zusammensetzen, in dessen L. E. Q.[2])

$$(2) \qquad ds^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$$

g_{00} im allgemeinen nicht nur von x^0, sondern auch von den anderen Koordinaten abhängen wird, da die Trajektorien keine geodätischen Linien zu sein brauchen.

Durch die Gravitation unseres Elektrons sollen nun die Trajektorien verzerrt, dagegen die Ruhräume im Verfolg meiner Annahme im Gegensatz zur Einsteinschen, die ich später daraufhin zu untersuchen vorhabe, unverzerrt bleiben. Dagegen kann das in ihnen liegende dreifache Koordinatensystem und zwar für jeden Ruhraum anders transformiert werden, so daß das L. E. Q. die Gestalt erhält:

$$3) \qquad ds'^2 = g_{00}\,l^2\,dx'^{0\,2} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g'_{\mu\nu}\,dx'^\mu\,dx'^\nu\,.$$

(Durch die Apostrophe sollen alle Größen nach der Verzerrung

1) Vgl. wegen dieser Bezeichnung Hilbert, Gött. Nachr. 1917, S. 58f.

2) Abkürzung für Linien-Element-Quadrat.

von den entsprechenden vor ihr unterschieden werden.) Dies wird durch folgende Gleichungen erreicht:

$$(4) \qquad d x^0 = l\, d x'^0 ,$$

$$(5) \qquad d x^\varrho = \sum_1^3{}_\mu\, a^\varrho_\mu\, d x'^\mu \qquad (\varrho = 1, 2, 3)$$

Damit im Ruhraum keine Verzerrung, sondern nur eine Transformation eintritt, muß das System (5) integrabel sein, d. h. es muß für alle ϱ, μ, ν von 1 bis 3 sein:

$$(6) \qquad \frac{\partial a^\varrho_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial a^\varrho_\nu}{\partial x'^\mu} .$$

Statt dieser Gleichungen kann ich auch die inversen fordern, die aus den Umkehrungen

$$(7) \qquad d x'^\mu = \sum_1^3{}_\varrho\, a'^\mu_\varrho\, d x^\varrho \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

von (5) folgen und lauten [für alle μ, ϱ, σ von 1 bis 3]:

$$(8) \qquad \frac{\partial a'^\mu_\varrho}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial a'^\mu_\sigma}{\partial x^\varrho} ;$$

Denn aus der Integrabilität des Systems (5) folgt die des Systems (7). Dabei sind die a'^μ_ϱ die durch die Determinante a der Matrix der Koeffizienten a^ϱ_μ geteilten Unterdeterminanten dieser Matrix.

Aus den Gleichungen (5) und (7) folgen die Beziehungen für die Komponenten der Fundamentaltensoren:

$$(9) \quad g'_{\mu\nu} = \sum_1^3{}_{\varrho\sigma}\, a^\varrho_\mu\, a^\sigma_\nu\, g_{\varrho\sigma}, \qquad (10) \quad g'^{\mu\nu} = \sum_1^3{}_{\varrho\sigma}\, a'^\mu_\varrho\, a'^\nu_\sigma\, g'^{\varrho\sigma},$$

$$(11) \quad g_{\varrho\sigma} = \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, a'^\mu_\varrho\, a'^\nu_\sigma\, g'_{\mu\nu}, \qquad (12) \quad g^{\varrho\sigma} = \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, a^\varrho_\mu\, a^\sigma_\nu\, g'^{\mu\nu}.$$

Ferner ergibt sich für die ko- und kontravariante Differentiation:

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = a^\varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}, \qquad (14) \quad g'^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} = a'^\mu_\varrho\, g^{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} ;$$

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} = a'^\mu_\varrho \frac{\partial f}{\partial x'^\mu}, \qquad (16) \quad g^{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma} = a^\varrho_\mu\, g'^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^\nu}$$

für jede beliebige Funktion f. (Die Summenzeichen, die sich über die doppelt auftretenden Indizes von 1 bis 3 erstrecken, sind hier nach Einsteins Vorbild weggelassen.)

Skalare Ausdrücke, wie

$$g^{\varrho\sigma}\frac{\partial f_1}{\partial x^\varrho}\frac{\partial f_2}{\partial x^\sigma} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\varrho}\sqrt{g}\,g^{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\sigma}$$

bleiben natürlich unverändert (g ist die Determinante der $g_{\mu\nu}$ von μ, ν gleich 1 bis 3).

Dabei ist zu beachten, daß zwar sowohl die $g_{\sigma\varrho}$, wie die a^ϱ_μ die Veränderliche x^0 enthalten können, daß aber bei Einbeziehung des Index 0 in den Bereich der $\mu, \nu, \varrho, \sigma$ sofort die Integrabilität aufhört. Darin liegt das Wesen der Verzerrung gegenüber der bloßen Transformation.

Für die 0-Koordinate erhält man zunächst aus Gleichung (4) die Beziehung:

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} = \frac{1}{l}\frac{\partial f}{\partial x'^0}, \tag{17}$$

$$g'_{00} = l^2 g_{00}, \tag{18}$$

$$g'^{00} = \frac{1}{l^2} g^{00}. \tag{19}$$

Es ist klar, daß man die umgekehrte Verzerrung, die die direkte gerade aufhebt, durch die Einsetzung der Größe $l' = 1/l$ statt l charakterisieren muß.

Bei der Verzerrung können die skalaren Größen im allgemeinen nicht unverändert bleiben; man erhält zwar für

$$\sum_0^3{}_{\mu\nu}\, g'^{\mu\nu}\frac{\partial f_1}{\partial x'^\mu}\frac{\partial f_2}{\partial x'^\nu}$$

denselben Wert wie für

$$\sum_0^3{}_{\varrho\sigma}\, g^{\varrho\sigma}\frac{\partial f_1}{\partial x^\varrho}\frac{\partial f_2}{\partial x^\sigma},$$

da dieser Ausdruck für die Indizes 1 bis 3 sich nicht ändert und für den Index 0 nur der Summand $g'^{00}\frac{\partial f_1}{\partial x'^0}\frac{\partial f_2}{\partial x'^0}$ hinzutritt, der wegen Gleichung (17) und (19) mit $g^{00}\frac{\partial f_1}{\partial x^0}\frac{\partial f_2}{\partial x^0}$ übereinstimmt. Dies trifft aber für den Laplaceschen Operator, d. h. die Divergenz des Gradienten, nicht mehr zu.

Zunächst erhält man für die Fundamentaldeterminante $G = g \cdot g_{00}$ nach der Verzerrung:

$$G' = g'_{00}\, g' = g_{00}\, l^2 \cdot g \cdot a^2 = l^2 \cdot a^2 \cdot G . \tag{20}$$

Dann sondere man aus der Divergenz des Gradienten wieder den auf den Index 0 bezüglichen Summanden aus:

$$\text{Div Grad } f = \sum_0^3{}_\sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{G}\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G}\, g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} + \sum_1^3{}_\sigma \frac{1}{\sqrt{g \cdot g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{g \cdot g_{00}}\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} .$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Div Grad } f = {} & \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G}\, g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} + \sum_1^3{}_\sigma\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \\ & + \sum_1^3{}_\sigma \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{g} \cdot g^{\sigma\varrho} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Der letzte Summand ist der Laplacesche Operator div grad f für die drei Indizes 1 bis 3, der bei der Verzerrung, die für diese eine bloße Transformation ist, ungeändert bleibt. Man erhält also für alle vier Ausdehnungen nach der Verzerrung:

$$\begin{aligned} \text{Div Grad}' f = {} & \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial}{\partial x'^0} \sqrt{G'}\, g'^{00} \frac{\partial f}{\partial x'^0} \\ & + \sum_1^3{}_\mu\, g'^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{g'_{00}}}{\partial x'^\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} + \text{div grad}' f \\ = {} & \frac{1}{\sqrt{G} \cdot a \cdot l} \frac{\partial}{\partial x'^0} \sqrt{G}\, a\, g^{00} \frac{\partial f}{l\, \partial x'^0} \\ & + \sum_1^3{}_\varrho\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \lg (\sqrt{g_{00}} \cdot l)}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} + \text{div grad } f \\ = {} & \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G}\, g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} + 2 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ & + \sum_1^3{}_\varrho\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} + \sum_1^3{}_\varrho\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \\ & + \text{div grad } f . \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Div Grad}' f = {} & \text{Div Grad } f + 2 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ & + \sum_1^3{}_\varrho\, g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \lg l}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} . \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Der Einfluß der Verzerrung auf die skalare Krümmung $\mathfrak{K} = g^{\varrho\sigma} K_{\varrho\sigma}$ macht für seine Untersuchung umfangreichere Vorarbeiten nötig, die im nächsten Abschnitt erledigt werden sollen.

2. Abschnitt.

Vergleich der Krümmung einer Mannigfaltigkeit mit der einer in ihr gelegenen Untermannigfaltigkeit, die eine Ausdehnung weniger besitzt.

Da bei der Verzerrung die Ruhräume nicht verändert werden und also auch ihre Krümmung erhalten bleibt, liegt der Gedanke nahe, die Gesamtkrümmung auf eine Formel zu bringen, die diese Teilkrümmung enthält. Um dies auszuführen, soll jedoch für erstere zunächst ein wesentlich kürzerer Ausdruck hergeleitet werden.

Nach Einstein[1]) hat man

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{K} = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = &- g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + g^{\mu\nu} \left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} \\ &+ g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\} \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}\end{aligned}\right.$$

und

$$(2)\quad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\left(g^{\mu\tau}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \nu\end{matrix}\right\} + g^{\nu\tau}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\right) = - g^{\mu\tau} \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau} - g^{\nu\tau}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = - \frac{\partial g^{\mu\tau}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau} - g^{\mu\tau} \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} - \frac{\partial g^{\nu\tau}}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\} - g^{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\}$$

und hieraus nach (2) und der Einsteinschen[1]) Gleichung (34):

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = &\; g^{\sigma\tau} \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau} + g^{\mu\sigma}\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \tau\end{matrix}\right\} \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau} \\ &- g^{\mu\tau} \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} + g^{\sigma\tau}\left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} + g^{\nu\sigma}\left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \tau\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\} \\ &- g^{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\}.\end{aligned}\right.$$

1) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 49. 1916: S. 801. F. 44; S. 796. F. 34, 29a.

Aus (2) erhält man durch Änderung der Indizes:

$$\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = -g^{\lambda\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\},$$

daher

$$(4)\qquad g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} - g^{\lambda\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}.$$

Ebenso aus (3):

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$$
$$- g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.$$

Hierin setze man den Wert für $g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}$ aus (4) ein und streiche $g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}$ gegen $-g^{\lambda\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$, während in $-\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$ μ statt λ gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\}$$
$$- g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.$$

Daraus erhält man nach Division durch (2):

$$-g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}$$
$$+ \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.$$

Diesen Wert, sowie $g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}$ (aus (4) mit μ statt λ rechts), setze man in (1) ein:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$
$$- \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$
$$+ g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}.$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{K} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{3}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{3}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ \qquad + g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Nun ist

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left(g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\right),$$

d. h. nach (4) mit $\varkappa$ statt λ und nach Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$:

$$-\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\varkappa\nu}}{\partial x^\varkappa}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$-\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Dies setze man in (5) ein und ziehe zusammen:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{K} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + 2 g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ \qquad + g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}. \end{cases}$$

Da

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \sqrt{G}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial g^{\mu\nu}\partial x^\nu} g^{\mu\nu}$$

$$= \sqrt{G}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\right)$$

ist, kann man der Gleichung (6) auch die Gestalt geben:

$$(7)\quad \left\{ \quad \mathfrak{K} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}.\right.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \text{Div Grad lg}\sqrt{G},$$

also

$$\text{(8)}\quad \left\{ \mathfrak{R} = 2\,\text{Div Grad lg}\sqrt{G} - g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}. \right.$$

Endlich ist

$$\frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}G)}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \frac{1}{g^{\mu\nu}\sqrt{G}}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu},$$

daher nach: (7)

$$\text{(9)}\quad \left\{ \mathfrak{R} = g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}G)}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}\right]. \right.$$

In den Gleichungen (6) bis (9) hat man natürlich alle Summanden mit μ, ν, $\varkappa$ von 0 bis 3 zu bilden und diese zu addieren. Da nur ein einziges Glied mit drei Indizes vorliegt, ist der Ausdruck von $\mathfrak{R}$ gegenüber der Gleichung (1) sehr vereinfacht.

Die allgemeine Gleichung (9) wende ich nun auf ein halborthogonales System an, in dem g_{01}, g_{02}, g_{03} verschwinden. In diesem ist dann wie im Abschnitt 1 die Determinante $G = g_{00}\cdot g$. Nun scheide ich aus der allgemeinen Summe den einzigen Summanden mit dem Index 0 aus und erhalte:

$$\mathfrak{R} = g^{00}\left[\frac{\partial^2 \lg g^{00}g\,g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \left(\frac{\partial \lg(g^{00}\sqrt{g\,g_{00}})}{\partial x_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_0^3{}^\varkappa \left\{\begin{matrix}00\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg g^{00}}{\partial x^\varkappa}\right] + \sum_1^3{}^{\mu\nu} g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}g\,g_{00})}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{g\,g_{00}})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{g\,g_{00}})}{\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\sum_0^3{}^\varkappa \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}\right].$$

Es ist aber

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}, \quad \left\{\begin{matrix}00\\0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}, \quad \left[\begin{matrix}00\\\varkappa\end{matrix}\right] = -\frac{1}{2}\sum_1^3{}_\varrho\, g^{\varkappa\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho},$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\0\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2g_{00}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \text{ für } \varkappa,\ \mu,\ \nu \neq 0.$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = \frac{1}{g_{00}}\Bigg[&\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2 \\ &- \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\varkappa\varrho}\, g^{\varkappa\varrho} g_{00}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\varkappa}\Bigg] \\ + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\Bigg[&\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\mu} \\ &+ \frac{1}{4}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{4g_{00}}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\Bigg] \\ + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\Bigg[&\frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} g)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_1^3{}_\varkappa \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\\varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}\Bigg].\end{aligned}$$

In der letzten Doppelzeile steht offenbar wieder der Ausdruck für die Krümmung nach Gleichung (9), aber beschränkt auf $\mu, \nu, \varkappa$ gleich 1 bis 3, also die Krümmung $\mathfrak{k}$ der dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit $x_0 = \text{const}$. Im zweiten und dritten Gliede der vorletzten Doppelzeile ist μ und ν vertauschbar; ferner ist $\varkappa$ und ϱ durch μ und ν zu ersetzen:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{R} = \mathfrak{k} + \frac{1}{g_{00}}\Bigg[&\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \\ &- \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\Bigg] \\ + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\Bigg[&\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$\text{div grad lg } g_{00} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} \right].$$

Setzt man dies in (10) ein, so erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{k} + \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x_0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x_0} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1}{4} \sum_1^3{}_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] \\ \quad + \text{div grad lg } g_{00} + \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}. \end{cases}$$

Diese Gleichung, die die Krümmung der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf die in ihr enthaltene dreifache zurückführt, ist natürlich entsprechend auch auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Ausdehnungen anzuwenden. Sie enthält neben der Funktionaldeterminante g der Untermannigfaltigkeit noch die Ergänzungskomponente g_{00} und den Ausdruck

$$-\frac{1}{4 g_{00}} \sum_1^3{}'_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0};$$

von den Koordinaten tritt nur x^0 selbständig auf, die anderen drei dagegen in den Skalaren div grad lg g_{00} und

$$\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Ist das halborthogonale System ein Gaußsches, in dem g_{00} nur von x^0 abhängen darf und einer Konstanten 1 gleichgesetzt werden kann, so erhält man insbesondere:

$$(12) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{k} + \frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_1^3{}_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}.$$

Man kann übrigens die Formel (11) durch Einführung der Komponente K_{00} des Krümmungstensors noch vereinfachen. Aus der allgemeinen Gleichung [vgl. (1)]:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$$

erhält man für $\mu = \nu = 0$:

$$K_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\varkappa} g^{\varkappa\sigma}\begin{bmatrix}00\\ \sigma\end{bmatrix} + g^{\lambda\varrho}\begin{bmatrix}0\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix}\cdot g^{\varkappa\sigma}\begin{bmatrix}0\lambda\\ \sigma\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\lambda\varrho}\begin{bmatrix}00\\ \varrho\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}.$$

Wegen $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ ist

$$\begin{bmatrix}00\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0},\quad \begin{bmatrix}00\\ \mu\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu},\quad \begin{bmatrix}0\mu\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu},$$

$$\begin{bmatrix}0\mu\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \text{ für } \mu,\ \nu \neq 0.$$

$$K_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left[g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2})\right] + \tfrac{1}{4} g^{\lambda\varrho} g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial g_{\varkappa\varrho}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^0}$$
$$- \tfrac{1}{4} g^{\lambda\varrho} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} - \tfrac{1}{4} g^{\varkappa\sigma} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varkappa}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} + \tfrac{1}{2}(g^{00})^2\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\lambda\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}(\delta_\varrho{}^0 - \tfrac{1}{2})\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda};$$

$$\delta_\sigma{}^0 = 0 \text{ für } \sigma \neq 0,\ = 1 \text{ für } \sigma = 0.$$

Unter Benutzung der Gleichung (2) erhält man nieraus, da $g_{\varkappa\varrho}\, g^{\varkappa\sigma} = \delta_\varrho^\sigma$ ist:

$$K_{00} = \left[g^{\sigma\tau}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau} + g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2}) - g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\sigma\,\partial x^\varkappa}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2})$$
$$- \tfrac{1}{4} g^{\lambda\varrho} g_{\varkappa\varrho}\frac{\partial g^{\varkappa\sigma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\lambda\varrho} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\tau\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2})\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau},$$

$$K_{00} = g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ 0\end{matrix}\right\}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} - g^{00}\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \tfrac{1}{2} g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\sigma\,\partial x^\varkappa}$$
$$- \tfrac{1}{4}\frac{\partial g^{\varkappa\sigma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\varkappa\sigma}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\lambda\varrho} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2};\quad g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ 0\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial g^{00}}{\partial x^0} - g^{00}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^0}$$

nach Gleichung (4), desgleichen

$$g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\} = -\,g^{\sigma\nu}\,\frac{\partial \lg (g^{\sigma\nu}\sqrt{G})}{\partial x^{\nu}};$$

$$K_{00} = \tfrac{3}{2}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{g_{00}}\,\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2}$$
$$- \tfrac{1}{2} g_{00}\, g^{\lambda\varrho}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\varrho}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\lambda}} + \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\varrho}\,\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\varrho}\,\partial x^{\lambda}} - \tfrac{1}{4}\,\frac{\partial g^{\kappa\sigma}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^0}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\,\frac{\partial \lg g^{\sigma\nu}\sqrt{G}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\sigma}};$$

$$g^{00} K_{00} = \frac{1}{g_{00}}\,\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - \frac{2}{g_{00}}\,\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{00}}}{(\partial x^0)^2} + \frac{2}{g_{00}}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$- \frac{2}{g_{00}}\,\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{g^{\mu\nu}}{g^{00}}\,\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} - \frac{1}{4\, g_{00}}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\,\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}};$$

$$g^{00} K_{00} = \frac{1}{g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{00}}}{(\partial x^0)^2} - 2\,\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\sum_0^3{}_{\mu\nu}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right] + \tfrac{1}{2}\sum_0^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\right);$$

$$= \frac{1}{g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2} - 2\,\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}\right)\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right] + \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\right];$$

$$= \frac{1}{2\, g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{div\ grad\ lg}\, g_{00} + \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}}.$$

Daher erhält man entweder

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{R} - \mathfrak{k} - g^{00} K_{00} = \frac{1}{2 g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{g x^0} \right] \\ \qquad + \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} + \frac{1}{4} \sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \end{cases}$$

oder

$$(14)\quad \mathfrak{R} - \mathfrak{k} - 2 g^{00} K_{00} = \frac{1}{4 g_{00}} \left[\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 + \sum_1^3{}_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right].$$

Im Falle des Gaußschen Systems wird einfach (für $g_{00} = 1$):

$$(15)\quad \mathfrak{R} - \mathfrak{k} - K_{00} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2}.$$

3. Abschnitt.

Der Einfluß der Verzerrung auf das Krümmungsmaß.

Nun sind alle Vorbereitungen erledigt, um die Änderung des Krümmungsmaßes durch die Verzerrung bestimmen zu können. Wendet man die Gleichung (11) des vorigen Abschnittes auf die verzerrte Mannigfaltigkeit an, so erhält man:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{k}' + \frac{1}{g_{00}'} \left[\frac{\partial^2 \lg g'}{(\partial x'^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g'}{\partial x'^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g'}{\partial x'^0} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^0} - \frac{1}{4} \sum_1^3{}_{\mu\nu} \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x'^0} \right] + \operatorname{div} \operatorname{grad}' \lg g_{00}' + \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{\mu\nu} g'^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^\nu}.$$

Nach Früherem ist hierin

$$\mathfrak{k}' = \mathfrak{k},\ g_{00}' = g_{00} \mathfrak{l}^2,\ \frac{\partial}{\partial x'^0} = \mathfrak{l} \frac{\partial}{\partial x^0},\ \frac{\partial^2}{(\partial x'^0)^2} = \mathfrak{l}^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\ ^1),\ g' = g \cdot a^3,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}' = \operatorname{div} \operatorname{grad} \text{ und } g'^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

zu setzen. Man erhält also:

---

1) $\partial \mathfrak{l} / \partial x^0$ ist gleich 0 zu setzen, da die x_0-Linien in die Räume konstanter Verzerrung fallen.

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{k} + \frac{1}{g_{00}\,\mathfrak{l}^2}\Big[\mathfrak{l}^2\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \mathfrak{l}^2\frac{\partial^2 \lg a^3}{(\partial x^0)^2} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2\Big(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2\Big(\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}$$
$$- \mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)} - \mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)} - \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\Big]$$
$$+ \operatorname{div}\operatorname{grad}\lg g_{00} + 2\operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l} + \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}$$
$$+ 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu} + 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}\,.$$

Mit Benutzung der Gleichung (2, 11) findet man dann:

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + \frac{1}{g_{00}}\Big[\frac{\partial^2 \lg a^3}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0}\Big)^2$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial \lg a^3}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\Big)\Big]$$
$$+ 2\operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l} + 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$+ 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}\,.$$

Diese Gleichung kann dadurch vereinfacht werden, daß man die Gleichungen (21) und (22) des Abschnitts 1 auf die Funktion $f = \lg \mathfrak{l}$ anwendet. Danach erhält man

$$\operatorname{Div}\operatorname{Grad}' \lg \mathfrak{l} = \operatorname{Div}\operatorname{Grad}\lg \mathfrak{l} + 2\,g_{00}\frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)}$$
$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^0}\sqrt{G}\,g^{00}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\,\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu} + \operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l}.$$

$$\operatorname{Div}\operatorname{Grad}' \lg \mathfrak{l} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\,\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}\,.$$

1) Vgl. Anmerkung auf S. 15.

Setzt man dies in die Gleichung für $\mathfrak{K}'$ ein, so erhält man:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + \frac{1}{g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\right)^2\right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right] - \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\left[\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right.\right. \\ \quad \left.\left. - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right)\right] + \sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu} \\ \quad + 2\,\mathrm{Div\,Grad'\,lg\,l}. \end{cases}$$

Nun nehme ich an, daß vor der Verzerrung meine Behauptung richtig sei, die Krümmung $\mathfrak{K}$ also die Gestalt habe:

$$(2)\qquad \mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A}\ ^1);$$

dann ist nach Gleichung (1, 22):

$$\mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div\,Grad}\,\mathfrak{A} = 2\,\mathrm{Div\,Grad'}\,\mathfrak{A} - 4\,g^{00}\frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0} - 2\sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{K}' = 2\,\mathrm{Div\,Grad'}\,(\mathfrak{A} + \lg l) + \frac{1}{g_{00}}\left[2\frac{\partial^2 \lg a}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - 2\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0}\right]$$
$$- \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right) + \sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} - 2\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\right).$$

Soll nun die Behauptung richtig sein, daß auch

$$(3)\qquad \mathfrak{K}' = 2\,\mathrm{Div\,Grad'}\,\mathfrak{A}'$$

werde, so kann das nur der Fall sein, wenn

$$(4)\qquad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \lg l$$

wird, wie ich das im Nachtrag meiner Arbeit vorausgesagt

1) Die Bezeichnung entspricht der Gleichung (VI) auf S. 176 meiner Annalenarbeit.

habe.[1]) Es muß aber außerdem die Bedingung erfüllt sein, daß die Zusatzglieder verschwinden. Es muß also

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}-2\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\right)&=\frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right.\\ &\left.-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right)-\frac{1}{g_{00}}\left[2\frac{\partial^2 \lg a}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\right)^2-\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}-2\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0}\right]\end{aligned}\right.$$

sein. Das kann man durch die bisher offen gelassene Wahl der Koeffizienten a^ϱ_μ erreichen. Diese waren an die Bedingung (1,6) oder (1,8) geknüpft:

$$\frac{\partial a^\varrho_\mu}{\partial x'^\nu}=\frac{\partial a^\varrho_\nu}{\partial x'^\mu},\qquad \frac{\partial a'^\mu_\varrho}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial a'^\mu_\sigma}{\partial x^\varrho}.$$

Aus diesen geht hervor, daß es sich im ganzen um drei voneinander unabhängige Funktionen handelt, deren partielle Ableitungen die a oder a' sind. Natürlich sind dies die transformierten Koordinaten, da $a'^\mu_\varrho=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\varrho}$ ist.

Mit diesen drei Funktionen läßt sich drei Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Eine davon ist die Gleichung (5); eine zweite ergibt sich daraus, daß die Differenz $\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}$ einen vorgeschriebenen, von der geodätischen Entfernung r von der Mittelisogone allein abhängigen Wert annehmen muß, der im Außenraum, wo diese Entfernung größer als der Elektronenradius ist, gleich 0, im Innenraum aber nach meiner bisherigen Annahme[2]) gleich $\frac{6\varrho^3+4r^3}{(\varrho^3+r^3)^2}$ wird — ϱ ist der Krümmungs-

1) Vgl. den Nachtrag zu meiner Annalenarbeit, S. 176. Gl. (VIII).

2) A. a. O. S. 150f. Ich möchte hieran die Bemerkung knüpfen, daß es auch möglich ist, diese Größe, deren Veränderlichkeit wegen der Kleinheit von r gegenüber ϱ verschwindend gering ist, genau konstant, also gleich dem Werte $6/\varrho^3$ im Mittelpunkte zu machen, wenn man im Innenraume l nicht mehr gleich $\frac{1}{k_0}\sqrt{1+\frac{r^3}{\varrho^3}}$, sondern gleich $\frac{\varrho}{2rk_0\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{3}\frac{r}{\varrho}}-e^{-\sqrt{3}\frac{r}{\varrho}}\right)$ setzt. Außerhalb bleibt der Ansatz $l=1-c_1/r$ nach Analogie meiner Gleichung (37) auf S. 154 unverändert.

radius des Elektronenraumes, der von dem von mir mit a bezeichneten Radius der Elektronenkugel zu unterscheiden ist.[1])

Da im Rahmen meiner Theorie nur die Gleichung (5), sowie die Vorschrift über das Krümmungsmaß notwendig sind, bleibt für die dritte Bedingungsgleichung eine gewisse Willkür bestehen. Ich will sie nun so aufstellen, daß die Verhältnisse möglichst einfach werden, und da empfiehlt sich die Annahme der Unabhängigkeit der Transformationsdeterminante a von x^0, da dann die letzte Klammer der Gleichung (5) ganz fortfällt. Wenn a nur noch von x^1, x^2, x^3 abhängt, kann es ja bekanntlich konstant, insbesondere gleich 1 gemacht werden, und dies bedeutet, daß durch die Verzerrung das Volummaß im Ruhraum nicht geändert wird. Dagegen kann dasselbe nicht von dem Längenmaß in den einzelnen Richtungen gesagt werden, da sonst a^e_μ bei gleichen Indizes 1 und bei ungleichen 0 werden müßte; die Verzerrung ist also anisotrop, und es kann auch nicht mehr von der Lichtgeschwindigkeit als dem Verhältnis des Längen- zum Zeitmaße gesprochen werden. Es läßt sich aber gerade bei Annahme der Bedingung $a = 1$ dafür Ersatz durch Einführung eines mittleren Längenmaßes gewinnen, wobei jedes Streckenelement gleich der Kubikwurzel aus dem durch die Fundamentaldeterminante g geteilten Volumelement ist, und dieses mittlere Maß wird durch die Verzerrung nicht verändert.

Damit und durch die sogleich zu erörternden Grenzbedingungen sind alle Größen festgelegt. Zunächst ist r als Funktion von x^1, x^2, x^3 definiert, da es die Länge der auf der Mittelisogone senkrechten geodätischen Linien mißt, die mit dem zu ihnen orthogonalen zylindrischen Parallelräumen das Gaußsche Koordinatensystem bilden. Dieses aber ist in dasjenige halborthogonale System der $x^0\,x^1\,x^2\,x^3$ zu transformieren, das mit ihm die $x^1\,x^2\,x^3$-Räume der sämtlichen von einem Punkte der Mittelisogonen ausgehenden geodätischen Linien gemeinsam hat, auf welchen Räumen dann die x_0-Linien senkrecht stehen. Als Funktion von r ist dann $\mathfrak{l}$ mit verschiedenem Ansatz für Außen- und Innenraum gegeben, wobei die Konstanten wie auf S. 154 meiner Arbeit so zu bestimmen sind, daß $\mathfrak{l}$ und $d\mathfrak{l}/dr$ in der Grenz-

1) Vgl. a. a. O. S. 164f.

kugel des Elektrons stetig übergehen. Die übrigen mit a_μ bezeichneten Komponenten der Verzerrung oder ihre Kontravarianten a'^{μ}_{ϱ}, bzw. deren Integrale x'^{μ} sind dann aus Gleichung (5), der Beziehung für $\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}$ außen und innen und der Gleichung $a = 1$ zu gewinnen. Dabei sind für den Außenraum die Grenzbedingungen dadurch gegeben, daß im Unendlichen die Verzerrung verschwindet, d. h. a^{ϱ}_{μ} bei gleichen Indizes 1, bei ungleichen 0 wird. Die somit für den Außenraum gegebenen Werte der Komponenten a^{ϱ}_{μ} nehmen auf der Grenzkugel des Elektrons Größen an, die wieder zur Aufstellung von Grenzbedingungen für den Innenraum führen. Damit sind sämtliche Komponenten völlig definiert, und zugleich ist der stetige Übergang von innen nach außen gesichert. Ich möchte nur noch ergänzend hinzufügen, wie der Ausdruck für die Summe über

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}$$

in Gleichung (5) mit Benutzung der Werte von $g'_{\mu\nu}$ und $g'^{\mu\nu}$ nach (1, 9) und (1, 10) auszuführen ist. Es wird nämlich:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_0}\,\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} = \dfrac{\partial a^{\varrho}_{\mu}\, a^{\sigma}_{\nu}\, g_{\varrho\sigma}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\tau}\, a'^{\nu}_{\varphi}\, g^{\tau\varphi}}{\partial x^0} \\ - \dfrac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial g^{\varrho\sigma}}{\partial x^0} = 2\,\dfrac{\partial a'^{\nu}_{\mu}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a^{\mu}_{\nu}}{\partial x^0} + 2 a^{\varrho}_{\mu}\, a'^{\nu}_{\varphi}\, g_{\varrho\sigma}\, g^{\tau\varphi}\,\dfrac{\partial a^{\sigma}_{\nu}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\tau}}{\partial x^0} \\ + 4 a^{\varrho}_{\mu}\, g^{\tau\sigma}\,\dfrac{\partial g_{\sigma\varrho}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\tau}}{\partial x^0}. \end{cases}$$

Somit wäre durch eine vollständige Induktion gezeigt, daß sich das Krümmungsmaß $\mathfrak{R}$ der Raumzeitmannigfaltigkeit ganz allgemein als doppelte Divergenz des Gradienten einer Größe $\mathfrak{A}$ darstellen läßt, die ich als das skalare Gravitationspotential ansehe, und die sich als Logarithmus der veränderlichen Lichtgeschwindigkeit deuten läßt. Dabei ist aber wegen der Anisotropie der Verzerrung ein mittleres Längenmaß zu wählen und außerdem die Voraussetzung gemacht, daß die Verzerrung für den Ruhraum verschwindet.

Wilhelmshaven, 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

2. *II. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation;*

von Ernst Reichenbächer.

Bekanntlich hat Einstein als eine durch die Erfahrung zu prüfende Folgerung seiner Gravitationstheorie die Krümmung eines an der Sonne tangential entlang streifenden Lichtstrahls im Gesamtbetrage von 1,7″ festgestellt. Demgegenüber behauptet Eddington[1]), daß aus der Gravitationswirkung der Sonne auf die mit der Geschwindigkeit $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec bewegte Lichtenergie die Hälfte des Einsteinschen Effektes sich ergeben muß, wobei weiter keine Annahme zu machen ist, als daß die Wirkung auf einen Energiepunkt dieselbe ist wie auf einen Massenpunkt. Daraufhin will ich in Fortsetzung meiner Ausführungen in der Arbeit: „Theorie der Elektrizität und der Gravitation", die in Heft 52 der Annalen der Physik 1917, S. 134ff., erschienen ist, prüfen, welche Krümmung des Lichtstrahls sich aus der dort entwickelten Theorie ergibt.

Ich hatte auf S. 157 als Gleichungen für einen der Gravitation unterworfenen Körper die drei folgenden aufgestellt (40b):

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} : \left[1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3)$$

Ersetzt man hierin den Nenner durch $g_0\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2$, so lauten sie

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_0}{dx_\tau} \cdot g_0 \left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial g_0}{\partial x_\tau}\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2.$$

In dieser Gestalt erkennt man sofort, daß es sich um die kürzesten Linien der Mannigfaltigkeit handelt, deren Linienelementquadrat ja nach Gleichung (35) (S. 151)[2]) durch

$$ds^2 = g_0\, dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

1) Vgl. Naturwissenschaften 1919, Heft 20, S. 368.
2) Mit Ersatz der Polarkoordinaten durch Cartesische.

gegeben war. Aus diesem Grunde muß ich die Gleichungen (40 b) und ihre Folgerungen auch für den Lichtstrahl als gegeben annehmen mit der besonderen Maßgabe, daß für diesen ds gleich 0 werden muß. Nun ergeben sich aus (40 b) die drei folgenden:

$$x_3 = \text{const.}, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2Ai}{c} \text{ (Gl. 42)}, \quad 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{B}{g_0} = \frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2 r}\right)^2} \text{ (Gl. 43) mit } x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi.$$

Weil ds verschwindet, werden sowohl A als B unendlich, aber so, daß der Quotient $B/A^2 = \Gamma$ endlich bleibt. Danach erhält man nach (44) mit $k = 1/r$:

$$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = \frac{\Gamma}{4\left(1 - \frac{b}{c^2 k}\right)^2}.$$

Dies ist die Gleichung der krummen ebenen Kurve, die das Licht infolge der Gravitation eines Zentrums beschreibt. Die Konstante b ist nach S. 160, Gleichung (49) und (50), fast genau gleich $\frac{4A^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, wo a und T mittlere Entfernung und Umlaufszeit eines das Zentrum umkreisenden Planeten sind, also gleich $\varkappa M$, dem Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des Zentrums. Da nun $k = 1/r$ im massefreien Äther höchstens den umgekehrten Wert $1/r_1$ des Radius des anziehenden Weltkörpers hat, kann man, wie ich das auch für die Planetenbewegung getan habe, wegen der Kleinheit des Ausdruckes $\frac{\varkappa M}{c^2 r}$ die obige Differentialgleichung durch

$$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = \frac{\Gamma}{4}\left(1 + 2\frac{b}{c^2}k + 3\frac{b^2}{c^4}k^2\right)$$

ersetzen, deren Lösung auf S. 159 gegeben wurde:

$$k = \frac{1 + \varepsilon\cos\lambda\varphi}{p}, \quad \frac{dk}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon\lambda}{p}\sin\lambda\varphi$$

mit [vgl. Gleichung (45), (46) f.]

$$\lambda^2 = 1 - \frac{3\Gamma b^2}{4c^4}, \quad \frac{\Gamma}{4}\frac{bp}{c^2} = 1 - \frac{\Gamma}{4}\cdot 3\frac{b^2}{c^4}, \quad -\frac{\Gamma}{4} = \frac{\lambda^2}{p^2}(1 - \varepsilon^2).$$

Durch Elimination von λ und p erhält man hieraus

$$\frac{\Gamma}{4} = \frac{c^4}{b^2(2 + \varepsilon^2)} = \frac{c^4}{\varkappa^2 M^2 (2 + \varepsilon^2)}.$$

Nun ist nach Gleichung (44), wobei $dh/d\varphi = 0$, also $k = 1/r_0$ gleich dem größten (oder kleinsten) Werte angenommen wird, den es erreicht, wenn der Lichtstrahl tangential verläuft:

$$\frac{\Gamma}{4} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{\varkappa M}{c^2 r_0}\right)^2.$$

Durch Gleichsetzen beider Werte erhält man

$$\frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{\varkappa M}{c^2 r_0}\right)^2 = \frac{c^4}{\varkappa^2 M^2 (2 + \varepsilon^2)},$$

$$2 + \varepsilon^2 = \frac{c^4 r_0^2}{\varkappa^2 M^2}\left(1 - \frac{\varkappa M}{c^2 r_0}\right)^{-2}.$$

Ohne großen Fehler kann man wegen der Kleinheit von $\varkappa M/c^2 r_0$ setzen

$$\varepsilon^2 = \frac{c^4 r_0^2}{\varkappa^2 M^2}, \quad \varepsilon = \frac{c^2 r_0}{\varkappa M}.$$

Die Bahn des Lichtstrahls ist also in sehr großer Annäherung eine Hyperbel mit sehr großer Exzentrizität um das anziehende Zentrum als Brennpunkt. Die Ablenkung des Lichtes von seinem Wege wird durch den spitzen Asymptotenwinkel χ gegeben, der durch $\sin \frac{1}{2}\chi = 1/\varepsilon$, also ungefähr $\chi = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2\varkappa M}{c^2 r_0}$ bestimmt ist.

Dies wäre genau die Einsteinsche Gleichung (74) auf S. 822 (Ann. d. Phys. **49**), da sein $\varkappa$ gleich dem $8\pi/c^2$-fachen der gewöhnlichen Gravitationskonstanten ist [Gleichung (69), S. 818]. Aber Gleichung (74) enthält einen inzwischen berichtigten Fehler; nach Einstein wird die Ablenkung richtig als doppelt so groß angegeben, so daß sie nach seiner Theorie eben auch doppelt so groß erscheint wie nach der meinigen, die also das Eddingtonsche Ergebnis liefert. Dies kann nun wiederum nicht verwunderlich erscheinen, da ich in Übereinstimmung mit der bisher üblichen Annahme, aber im Gegensatz zu Einstein, den Ruhraum der anziehenden Masse durch die Gravitation nicht verzerrt werden lassen wollte.

Andererseits muß man, wenn man die Eddingtonsche Begründung für die Ablenkung des Lichtstrahls für genügend hält, aber trotzdem an dem Grundsatz festhalten will, daß das Licht zu seinem Wege stets die kürzeste Zeit braucht, ohne weiteres zu der Annahme der Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit kommen, so daß also die folgerichtige Durch-

führung des Eddingtonschen Gedankens, der ja durch seine Gleichsetzung von Energie und Masse manches für sich hat, auf meine Gravitationstheorie führen muß, wenn man an dem oben genannten Fermatschen Prinzip der kürzesten Lichtzeit und daneben an der Unverzerrtheit des Raumes festhält. In letzteren Punkte setzt die Abweichung der Einsteinschen Theorie ein, der statt dessen das Verschwinden des Krümmungstensors $B_{\mu\nu}$ fordert und infolgedessen auch andere Effekte, nämlich stets das Doppelte, sowohl für die Ablenkung des Lichtstrahls, als auch für die Perihelwanderung erhält [vgl. Gleichung (52), S. 161 meiner Arbeit].

Wilhelmshaven, 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

3. *III. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde;*

von Ernst Reichenbächer.

In meiner Arbeit über das skalare Gravitationspotential hatte ich gezeigt, daß die Feldgleichung

$$\mathfrak{R} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A} \tag{1}$$

für ein beliebiges Gravitationsfeld aufrecht erhalten werden kann, das sich aus n Einzelfeldern so zusammensetzt, daß in jedem einzelnen von diesen die Wirkung der Gravitation darin besteht, daß eine Schar von Räumen, die sogenannten Ruhräume, unverzerrt bleibt, während deren orthogonale Trajektorien eine Verkürzung im Verhältnis $1 : l_h$ ($h = 1$ bis n) erfahren. Das Gesamtpotential $\mathfrak{A}$ war gleich der Summe der Logarithmen dieser Verzerrungsfaktoren l_h. Daraus geht nun hervor, daß man mehrere dieser Einzelwirkungen oder sie alle durch eine einzige gleichartige ersetzen kann, bei der wiederum eine Schar von Räumen unverzerrt bleibt, während der Verzerrungsfaktor l der orthogonalen Trajektorien (also die Gesamtlichtgeschwindigkeit) jetzt gleich dem Produkt sämtlicher Einzellichtgeschwindigkeiten l_h oder gleich $e^{\mathfrak{A}}$ wird. Man erhält also aus der unverzerrten Minkowskischen Mannigfaltigkeit ein beliebiges Gravitationsfeld dadurch, daß man eine Schar von Räumen unverzerrt läßt und deren senkrechte Trajektorien im Verhältnis $1 : l$ verkürzt. Dabei wandern aber die Durchschnittspunkte der Trajektorien mit den Räumen, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß in jedem von diesen Räumen eine andere Koordinatentransformation auszuführen ist, deren Komponenten von der längs der Trajektorien zu messenden Koordinate abhängen. Wird diese wieder mit x^0, die drei anderen mit x^1, x^2, x^3 bezeichnet,

so besteht die Verzerrung in der vorderen und hinteren Multiplikation des Fundamentaltensors mit der Matrix

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{\,1} & a_1^{\,2} & a_1^{\,3} \\ 0 & a_2^{\,1} & a_2^{\,2} & a_2^{\,3} \\ 0 & a_3^{\,1} & a_3^{\,2} & a_3^{\,3} \end{vmatrix}$$

Wäre l von x^1, x^2, x^3 und $a_i^{\,k}$ von x^0 unabhängig, so würde die Verzerrung auf eine bloße Transformation hinauslaufen. Dies soll nicht der Fall sein, es soll sich vielmehr um eine echte Verzerrung handeln. Da der Verzerrungsfaktor l sich längs einer Trajektorie nicht ändern darf, müssen diese in die Räume $l = \text{const.}$ fallen, auf denen also die unverzerrten Räume senkrecht stehen müssen.

Für die Untersuchung der Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfeld, bei der ich mich eng an das von mir in meiner Arbeit „Theorie der Elektrizität und Gravitation" für einen einzigen Anziehungsmittelpunkt beschriebene Verfahren anlehne, lege ich nun ein solches halborthogonales Koordinatensystem der unverzerrten Räume mit ihren Trajektorien zugrunde. Die Maßvorschrift

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{2}$$

für das Linienelementquadrat geht also über in

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu\,, \tag{3}$$

wobei

$$g'_{00} = l^2 g_{00}\,,\quad g'_{0\nu} = g_{0\nu} = 0\,,\quad g'_{\mu\nu} = a_\mu^{\,\varrho}\, a_\nu^{\,\sigma}\, g_{\varrho\sigma} \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x'^0} = l\,\frac{\partial f}{\partial x^0}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = a_\mu^{\,\varrho}\,\frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \tag{5}$$

ist, da

$$dx^0 = l\,dx'^0 \quad\text{und}\quad dx^\varrho = a_\mu^{\,\varrho}\,dx'^\mu \tag{6}$$

wird.

Maßgebend für das von mir in genannter Arbeit entwickelte Verfahren waren die Gleichungen auf S. 156f.

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma}\cos^2\psi\,, \tag{7}$$

$$\cos^2(r\,\sigma)\cos^2\psi = \left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2 = \cos^2(x^0\,s) \tag{8}$$

und

$$\frac{\cos(x_\tau\,\sigma)}{\sigma} = -\frac{d^2 s_\tau}{d\,s^2} \qquad (\tau = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_0}{\partial\,\sigma}\frac{\cos^2(x_0\,s)}{\cos^2(r\,\sigma)}. \tag{10}$$

In dieser Gleichung spielt $\sqrt{g_0}$ die Rolle des Verzerrungsfaktors und ist daher im allgemeinen Falle durch 1 zu ersetzen, während alles andere übernommen werden kann. Dagegen geht Gleichung (9) über in

$$\frac{c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} = -x_{|ss}^{(\tau)}. \tag{11}$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen Kottlers in seinen Annalenarbeiten, **44.** S. 701 ff. und **45.** S. 481 ff. Diese Größen lassen sich durch die Gleichungen bestimmen

$$c_\tau^{(\sigma)} = \frac{d\,x^\tau}{d\,s^\sigma} \tag{12}$$

und

$$x_{|ss}^{(\tau)} = \frac{d^2 x^\tau}{d\,s^2} + \left\{\begin{matrix}\varkappa\,\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{d\,x^\varkappa}{d\,s}\frac{d\,x^\lambda}{d\,s}. \tag{13}$$

Mit den Richtungskosinus hängen die $c_\tau^{(\sigma)}$ zusammen durch die Gleichung von

$$\cos(\sigma\,x^i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}g_{\tau i}\frac{d\,x^\tau}{d\,s^\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}g_{\tau i}\,c_\tau^{(\sigma)} \tag{14}$$

und

$$c_\tau^{(\sigma)} = g^{\tau k}\sqrt{g_{kk}}\cos(\sigma\,x^k).$$

Also wird die Gleichung (11):

$$\frac{c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} = -\frac{d^2 x^\tau}{d\,s^2} - \left\{\begin{matrix}\varkappa\,\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{d\,x^\varkappa}{d\,s}\frac{d\,x^\lambda}{d\,s}.$$

Man multipliziere mit $g_{k\tau}$ und summiere über τ von 0 bis 3:

$$\frac{g_{hr}\,c_r^{(\sigma)}}{\sigma} = -\,g_{hr}\frac{d^2x^r}{ds^2} - g_{hr}g^{re}\begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ \varrho\end{bmatrix}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} = -\,g_{hr}\frac{d^2x^r}{ds^2} - \begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ h\end{bmatrix}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\,g_{hr}\frac{d^2x^r}{ds^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\varkappa h}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\right]\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\,g_{hr}\frac{d^2x^r}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa h}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^\varkappa}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\,g_{hr}\frac{d^2x^r}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\varkappa h}}{ds}\frac{dx^\varkappa}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\lambda h}}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\,g_{hr}\frac{d^2x^r}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dg_{rh}}{ds}\frac{dx^r}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{rh}}{ds}\frac{dx^r}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$\frac{g_{hr}\,c_r^{(\sigma)}}{\sigma} = -\,\frac{d}{ds}g_{hr}\frac{dx^r}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}. \tag{15}$$

Führt man hierin den Wert von $c_r^{(\sigma)}$ aus (14) ein, so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{g_{hh}}\cos(x^h\,\sigma)}{\sigma} = -\,\frac{d}{ds}g_{hr}\frac{dx^r}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} \tag{16}$$

und nach Berücksichtigung der Gleichung (10):

$$-\,\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial\sigma}\,\frac{\cos(x^h\,\sigma)\cos^2(x^0\,s)}{\cos^2(r\,\sigma)}\sqrt{g_{hh}} = -\,\frac{d}{ds}g_{hr}\frac{dx^r}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}. \tag{17}$$

Die Größen $\partial \lg \mathfrak{l}/\partial\sigma$ und $\cos(x_h\,\sigma)$ lassen sich nun ganz dem Verfahren auf S. 156f. a.a.O. entsprechend umbilden. Fällt nämlich die eine von den drei räumlichen Achsen mit dem Gradienten r des Gravitationspotentials zusammen, so ist, da außer $\partial \lg \mathfrak{l}/\partial r$ alle anderen Differentialquotienten verschwinden,

$$\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial\sigma} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\varrho}c_\varrho^{(\sigma)} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\varrho}g^{\varrho k}\sqrt{g_{kk}}\cos(\sigma\,x^k) = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial r}\,\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\cos(\sigma\,r). \tag{18}$$

Es steht ja σ orthogonal zu den beiden nicht mit x^0 und r zusammenfallenden Achsen; daher verschwindet $\cos(\sigma x^\lambda)$ für diese Richtungen; andererseits ist aber $g^{\varrho 0} = 0$ außer für $\varrho = 0$, wo aber wieder $\partial \lg I / \partial x^\varrho$ verschwindet. So erhält man

$$(19) \qquad -\frac{\partial \lg I}{\partial r}\frac{\cos(x^\lambda \sigma)}{\cos(r\sigma)}\sqrt{\frac{g_{\lambda\lambda}}{g_{rr}}}\cos^2(x^0 s) = -\frac{d}{ds}g_{\lambda\tau}\frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\varkappa}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Nun ist, da σ in der $x_0 r$-Ebene liegt (vgl. S. 156):

$$(20) \qquad \cos(x^\lambda \sigma) = \cos(r\sigma)\cdot\cos(r x^\lambda),$$

ferner

$$\frac{\partial \lg I}{\partial s^\lambda} = \frac{\partial \lg I}{\partial x^\varrho}c_\varrho^{(\lambda)} = \frac{\partial \lg I}{\partial x^\varrho}g^{\varrho\lambda}\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\cos(x^\lambda x^\lambda)$$

in einem beliebigen Koordinatensystem. Wählt man dies[1]) so, daß eine seiner Richtungen mit r zusammenfällt, während die anderen dazu senkrecht stehen, so erhält man:

$$(21) \qquad \frac{\partial \lg I}{\partial s^\lambda} = \frac{\partial \lg I}{\partial r}\frac{\cos(r x^\lambda)}{\sqrt{g_{rr}}}.$$

Das ergibt aber für die linke Seite der Gleichung (19) den Wert

$$-\frac{\partial \lg I}{\partial s^\lambda}\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\cos^2(x^0 s) = -\frac{\partial \lg I}{\partial x^\lambda}\cos^2(x^0 s) = -\frac{\partial \lg I}{\partial x^\lambda}\cdot g_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)$$

[nach Gleichung (14), da $g_{\tau 0} = 0$ für $\tau \neq 0$]. Demnach bekommt man für die Gleichung der durch die Gravitation erzeugten Punktbewegung

$$(22) \qquad \frac{\partial \lg I}{\partial x^\lambda}g_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{d}{ds}g_{\lambda\tau}\frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\varkappa}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichung enthält die Koordinaten der unverzerrten Mannigfaltigkeit. Ich will jetzt zeigen, daß sie in dem verzerrten System eine geodätische Linie darstellt. Deren Gleichung in den neuen Koordinaten ist bekanntlich:

$$(23) \qquad 0 = \frac{d}{ds}g'_{k\nu}\frac{dx'^\nu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^k}\frac{dx'^\mu}{ds}\frac{dx'^\nu}{ds} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

1) Dies Koordinatensystem ist auch der Gleichung (18) zugrunde zu legen. Seine Einführung ist möglich, da der Gradient r ganz in die $x^1 x^2 x^3$-Räume fällt. Dieses System würde also auch halborthogonal sein und enthält als Parameterräume diejenigen, in denen das Gravitationspotential konstant ist.

Von diesen vier Gleichungen brauche ich nur die drei für $k = 1, 2, 3$, da die vierte aus ihnen sich ergibt. In diese will ich nach (4) und (5) die alten Koordinaten einführen:

$$0 = \frac{d}{ds} a_k^{\lambda} a_{\nu}^{\varkappa} g_{\lambda\varkappa} \frac{dx'^{\nu}}{ds} - \frac{1}{2} a_k^{\lambda} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}} l^2 \left(\frac{dx'^0}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2} a_k^{\lambda} \frac{\partial a_{\mu}^{\varkappa} a_{\nu}^{\lambda} g_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dx'^{\mu}}{ds} \frac{dx'^{\nu}}{ds}.$$

Nach (6):

$$0 = \frac{d}{ds} a_k^{\lambda} g_{\lambda\varkappa} \frac{dx^{\varkappa}}{ds} - \frac{1}{2} a_k^{\lambda} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}} + 2 g_{00} \frac{\partial \lg l}{\partial x^{\lambda}}\right) \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2} a_k^{\lambda} \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\varkappa}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} - \frac{1}{2} g_{\varkappa\lambda} a_k^{\lambda} \left(a_{\mu}^{\varkappa} \frac{\partial a_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + a_{\nu}^{\lambda} \frac{\partial a_{\mu}^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\right) \frac{dx'^{\mu}}{ds} \frac{dx'^{\nu}}{ds}.$$

Nun ist, da wegen der Unverzerrtheit der 1, 2, 3-Räume für diese Indizes Integrabilität vorgeschrieben ist,

$$\frac{\partial a_{\nu}^{\lambda}}{\partial x'^{k}} = \frac{\partial a_k^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}},$$

d. h. nach (5):

$$a_k^{\lambda} \frac{\partial a_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = a_{\nu}^{\lambda} \frac{\partial a_k^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}$$

und ebenso

$$a_k^{\lambda} \frac{\partial a_{\mu}^{k}}{\partial x^{\lambda}} = a_{\mu}^{\lambda} \frac{\partial a_k^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}.$$

Daher wird das letzte Glied gleich

$$-\frac{1}{2} g_{\varkappa\lambda} \frac{dx^{\varkappa}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{\partial a_k^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} g_{\varkappa\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{\partial a_k^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} = -\frac{1}{2} g_{\varkappa\lambda} \frac{dx^{\varkappa}}{ds} \frac{da_k^{\lambda}}{ds} - \frac{1}{2} g_{\varkappa\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{da_k^{\varkappa}}{ds}.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von $\varkappa$ und λ ist dies gleich

$$-g_{\varkappa\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{da_k^{\varkappa}}{ds}$$

und hebt sich mit dem ersten Gliede, das aus der Differentiation von $\frac{d}{ds} a_k^{\lambda} g_{\lambda\nu} \frac{dx^{\nu}}{ds}$ herrührt, gerade auf. Es bleibt also nur übrig:

$$(24)\quad 0 = a_k^h \left\{ \left[\frac{d}{ds} g_{hr} \frac{dx^r}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^h} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\varkappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right] - g_{00} \frac{\partial \lg l}{\partial x^h} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \right\}.$$

In dem dritten Gliede dieser Gleichung nehmen $\varkappa$ und λ die Werte 1 bis 3 an; dagegen enthält das zweite Glied den entsprechenden Wert für $\varkappa$ und $\lambda = 0$; Kombinationen von 0 mit anderen Indizes verschwinden, so daß das zweite Glied in das dritte einbezogen werden kann, in dem nun $\varkappa$ und λ alle Werte von 0 bis 3 annehmen:

$$(25)\quad 0 = a_k^h \left\{ \left[\frac{d}{ds} g_{hr} \frac{dx^r}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h} \frac{dx^\varkappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right] - \frac{\partial \lg l}{\partial x^h} g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \right\}.$$

Dies sind drei Gleichungen für $h = 1$ bis 3, während h in jeder Gleichung die drei Werte durchläuft. Durch Multiplikation mit $a_n'^k$ und Addition über die drei Werte von k erhält man wegen $a_n'^k a_k^h = \delta_n^h$ ($= 1$ für $h = n$, 0 für $h \neq n$):

$$0 = \left[\frac{d}{ds} g_{nr} \frac{dx^r}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^n} \frac{dx^\varkappa}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right] - \frac{\partial \lg l}{\partial x^n} g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2.$$

Dies ist aber wieder das Gleichungssystem (22) (mit n statt h).

Daraus ergibt sich wie in Einsteins Theorie, daß die Punktbewegung unter dem Einfluß der Gravitation bei Abwesenheit anderer Kräfte derartig ist, daß die Weltlinien im verzerrten System geodätische Linien sind. Dies erweist sich hier aber als Folgerung der Gleichung (7), die die Krümmung der Isogonen oder Weltlinien aus der Änderung des Einheitsmaßes für die zeitlichen Vektoren im Verhältnis zu den räumlichen — denn das ist die Lichtgeschwindigkeit l — berechnet, so daß also die Annahme der geodätischen Linien als begründet erscheint.

Wilhelmshaven, den 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

4. *Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie*[1]; *von H. Lang.*

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — § 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten. — § 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung. — § 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. — § 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nichtsymmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 9. Definition der Divergenz des Tensors $n$ten Ranges.

Einleitung.

Eine geometrische Darstellung von *Vektoren* durch gerichtete Strecken im *Riemannschen Raum* von vier Dimensionen, das heißt in einem Raum mit der Maßbestimmung

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{1-4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

scheint zunächst nicht statthaft zu sein, da der Riemannsche Raum keine Geraden im euklidischen Sinne enthält, also auch nicht Strecken als Teile einer Geraden in ihm abgetragen werden können. Wie aber in der Mechanik Geschwindigkeit und Beschleunigung eines auf einer krummen Fläche bewegten Punktes durch gerichtete Strecken dargestellt werden, die nur nicht mehr in dieser Fläche selbst liegen, so wird es auch für den Riemannschen Raum zulässig sein, Vektoren durch Strecken darzustellen, die von Punkten des Riemannschen Raumes ausgehen, aber mit allen ihren anderen Punkten nicht mehr

1) Kürzung der unter dem gleichen Titel an der Universität München erschienenen Dissertation des Verfassers.

in ihm liegen. Dazu muß freilich angenommen werden, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem höher dimensionalen euklidischen Raum gelegen ist, ebenso wie die krumme Fläche von zwei Dimensionen in einem euklidischen Raum von drei Dimensionen liegt. Diese Annahme kann, wie kurz angedeutet werden soll, gemacht werden, wenn nur die Dimension des euklidischen Raumes hoch genug gewählt wird. Es ist nämlich ein Riemannscher Raum von vier Dimensionen als in einem euklidischen Raum von m Dimensionen gelegen zu betrachten, wenn die Maßbestimmung (1) übergeführt werden kann in die Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{r}^{1-m} dz_r^2$$

durch die Transformation

$$z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad r = 1, 2 \ldots m.$$

Dann ist nämlich

$$dz_r = \sum_{i}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} dx^i,$$

$$dz_r^2 = \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k} dx^i dx^k$$

und

$$ds^2 = \sum_{r}^{1-m} \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k} dx^i dx^k.$$

Soll dies aber die im Riemannschen Raum gegebene Maßbestimmung sein, so müssen die Gleichungen

$$g_{ik} = \sum_{r}^{1-m} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k}$$

erfüllt sein. Dies wird im allgemeinen nur möglich sein, wenn $m = 10$ ist, da bei allgemeiner Maßbestimmung 10 Funktionen g_{ik} vorhanden sind. Lassen sich also m Funktionen $z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4)$ angeben, die diesen Differentialgleichungen genügen, so ist es berechtigt zu sagen, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem euklidischen Raum von m Dimensionen liegt. Es können also von einem Punkt des Riemannschen Raumes aus Gerade gezogen werden, die dann

in ihrem weiteren Verlauf in eben diesem euklidischen Raum liegen. Sämtliche Strecken aber, die von einem Punkt des Riemannschen Raumes in den ∞^3 möglichen Richtungen ausgehen, erfüllen einen ebenen Raum von vier Dimensionen, den *Tangentialraum* in dem betreffenden Punkt des Riemannschen Raumes.

Entsprechend werden auch die in der allgemeinen Relativitätstheorie besonders wichtigen *Tensoren* nicht im Riemannschen Raum selbst, sondern in seinen Tangentialräumen geometrisch darzustellen sein. Eine geometrische Darstellung von Tensoren wurde jedoch bisher in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht angewandt. Zur besseren Veranschaulichung der physikalischen Vorgänge erscheint eine solche aber als erwünscht. Der Zweck der vorliegenden Betrachtung ist daher, *für den symmetrischen Tensor 2. Ranges eine geometrische Darstellung zu geben und zu zeigen, wie mit Hilfe dieser Darstellung eine physikalisch wichtige Größe, die Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges geometrisch abgeleitet werden kann.* Der Prozeß aber, durch den die Divergenz aus dem Tensor gewonnen wird, läßt sich auch auf den Tensor *n*ten Ranges übertragen, so daß auch die *Divergenz des Tensors n ten Ranges* unabhängig von einem Koordinatensystem definiert werden kann.

Der symmetrische Tensor 2. Ranges im *euklidischen Raum von drei Dimensionen*, für den der Deformationstensor oder der Spannungstensor einfache Beispiele aus der Mechanik der Kontinua sind, läßt sich bekanntlich geometrisch darstellen durch eine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung, deren Mittelpunkt in eben jenem Punkt liegt, für den der Tensor gegeben ist. Entsprechend wird sich dem symmetrischen *Tensor 2. Ranges im euklidischen Raum von vier Dimensionen* ein dreidimensionaler Mittelpunktsraum 2. Ordnung zuordnen lassen, so daß die gegebenen Tensorkomponenten die Koeffizienten in der Gleichung dieses Mittelpunktsraumes bilden. Dieser Mittelpunktsraum 2. Ordnung gibt dann eine geometrische Darstellung des Tensors, ebenso wie eine gerichtete Strecke die eines Vierervektors, zwei zueinander senkrechte Ebenenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Lage die des Sechservektors.[1])

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. 32. S. 749. 1910.

In einer Beziehung aber unterscheidet sich die geometrische Darstellung des Tensors durch einen Mittelpunktsraum zweiter Ordnung von der oben erwähnten geometrischen Darstellung der Vektoren und leistet weniger: Sie gibt nicht unmittelbar die Möglichkeit einer geometrischen Deutung der einzelnen Tensorkomponenten, wie dies bei der geometrischen Darstellung des Vierer- und Sechservektors der Fall ist. Für den Vierervektor ist nämlich die Komponente nach einer Koordinatenachse geometrisch bestimmt durch die Orthogonalprojektion des Vierervektors auf diese Achse; für den Sechservektor ist die Komponente nach einer Koordinatenebene bestimmt durch die Orthogonalprojektion der beiden Ebenenstücke auf diese Ebene. Um eine geometrische Deutung der einzelnen Tensorkomponenten in ähnlicher Art zu ermöglichen, ist es nötig, den Tensor durch ein anderes Gebilde, einen „Doppelvektor" bzw. ein Quadrupel von Doppelvektoren darzustellen, das dann in dieser Beziehung der geometrischen Darstellung der Vierer- und Sechservektoren gleichwertig ist. Wie dieses Gebilde mit dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung zusammenhängt, wird sich bei seiner Ableitung ergeben.

§ 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten.

In dem Riemannschen Raum von vier Dimensionen wird die Länge eines Linienelementes, das von einem Punkt 0 mit den Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 [1]) ausgeht, berechnet durch

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

wobei die g_{ik} Funktionen der Koordinaten sind.

Soll in dem Tangentialraum an den Riemannschen Raum im Punkt 0 die euklidische Geometrie gelten, so muß sich die Länge s einer vom Punkt 0 ausgehenden Strecke OP berechnen lassen durch

1) Die Bezeichnung der kontravarianten Koordinaten durch obere Indizes ist gewählt im Anschluß an Hessenberg. „Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie." Math. Ann. 78. 1917. Sie ist notwendig, wenn neben den kontravarianten auch kovariante Koordinaten benutzt werden, was im folgenden geschehen soll.

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k, \tag{2}$$

wobei die g_{ik} jetzt Konstante sind und die Werte haben, die ihnen im Punkt 0 zukommen. Dabei ist ferner angenommen, daß die Tangenten an die Kurven der wachsenden kontravarianten Koordinaten zu Koordinatenachsen gewählt sind. Denn da dann für die unendlich kleine Strecke, die in dem gemeinsamen Volumelement des Riemannschen Raumes und des Tangentialraumes liegt, die Maßbestimmung (1) gilt, so muß sich auch die endliche Strecke durch die gleiche quadratische Form der Koordinaten berechnen lassen.

Diese Form der Maßbestimmung im euklidischen Raum geht aus der gewöhnlichen Form der Maßbestimmung im schiefwinkligen, geradlinigen Koordinatensystem hervor, wenn die Koordinaten, die geometrisch ja die Längen der *Parallelprojektionen* der Strecke OP auf die Achsen sind, nicht in dem *Einheitsmaßstab*, sondern *auf jeder Achse mit besonderem Maßstab* gemessen werden. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz für das schiefwinklige Achsensystem ist nämlich die Länge s gegeben durch

$$s^2 = \sum_{ik} X^i X^k \cos(ik), \tag{2a}$$

wo (ik) den Winkel zwischen der i- und der k-Achse bezeichnet. Durch die Transformation

$$X^i = \sqrt{g_{ii}}\, x^i,$$

die der Einführung eines besonderen Maßstabes auf jede Achse entspricht, geht (2a) über in

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wenn noch festgesetzt wird, daß

$$g_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \cos(ik)$$

sein soll.

Daraus folgt umgekehrt für die Maßbestimmung (1), daß die Winkel zwischen den Kurven der wachsenden x^i Koordinaten im Riemannschen Raum gegeben sind durch

$$\cos(ik) = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

Der Punkt 0 kann aber statt durch die Parallelprojektionen auch durch die *Orthogonalprojektionen* auf die Achsen im schief-

winkligen System bestimmt werden. Die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion X_m der Strecke OP auf die m-Achse wird aus den im Einheitsmaßstab gemessenen Parallelprojektionen X^i berechnet durch

$$X_m = \sum_i X^i \cos(mi)$$

in Erweiterung einer einfachen Formel der dreidimensionalen Geometrie. Werden hierin rechts die X^i durch die x^i ausgedrückt und noch festgesetzt, daß die Orthogonalprojektionen nicht im Einheitsmaßstab gemessen werden sollen, sondern so, daß

$$x_m = \sqrt{g_{mm}}\, X_m,$$

wenn x_m die im veränderten Maßstab gemessenen Längen sind, so ergibt sich die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten

$$x_m = \sum_i g_{mi} x^i \tag{3}$$

und ihre Umkehrung

$$x^i = \sum_m g^{mi} x_m, \tag{3a}$$

wobei g^{mi} gleich ist der Unterdeterminante von g_{mi} in der Determinante der g_{ik}, geteilt durch den Wert g dieser Determinante.

Die Strecke OP kann aber aufgefaßt werden als ein vom Punkt 0 ausgehender Vektor $\mathfrak{s}$. Dieser Vierervektor hat in dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten X_1, X_2, X_3, X_4, in dem schiefwinkligen mit allgemeiner Maßbestimmung aber wird er bestimmt sein ebensowohl durch die kontravarianten Komponenten x^1, x^2, x^3, x^4, wie durch die kovarianten Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4. Der Zusammenhang zwischen den kontravarianten und kovarianten Komponenten des Vektors $\mathfrak{s}$ wird durch die Gleichungen (3) und (3a) gegeben. Diese Gleichungen, hier aus der geometrischen Darstellung des Vektors abgeleitet, gelten nicht nur für den euklidischen, sondern auch für den Riemannschen Raum und können rein analytisch gefunden bzw. definiert werden.[1]) Dann zeigt sich umgekehrt die Berechtigung der Darstellung eines Vektors durch eine

1) So bei H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. § 5. Berlin 1918.

Strecke darin, daß durch diese geometrische Darstellung eben jener Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten wieder gegeben wird.

Daß ein Vierervektor, für den drei der kontravarianten Komponenten den Wert Null haben, in die Richtung derjenigen Achse fällt, nach der die nicht verschwindende Komponente auftritt, folgt sofort aus dem Umstand, daß die kontravarianten Komponenten des Vektors gegeben sind durch die Parallelprojektionen auf die Achsen. Wie liegt aber ein Vierervektor, für den drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben? Wenn die kovariante Komponente bezüglich einer Achse verschwindet, so heißt das, die Orthogonalprojektion des Vektors auf die betreffende Achse verschwindet, der Vektor muß also senkrecht auf dieser Achse stehen. Wenn drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben, so steht der Vektor also senkrecht auf drei Achsen des Koordinatensystems oder senkrecht auf dem durch diese drei Achsen bestimmten dreidimensionalen Raum.

Mit Rücksicht auf die Anwendung in den folgenden Paragraphen möge nun noch auf einige Beziehungen zwischen Vektorkomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen hingewiesen werden.

Der Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem (X_i) mit gewöhnlicher Maßbestimmung zu einem schiefwinkligen System (x^i) mit allgemeiner Maßbestimmung wird vermittelt durch Transformationsformeln

$$X_m = \sum_i \alpha_{mi} x^i . \tag{4}$$

Auch die kontravarianten Komponenten eines beliebigen Vierervektors a im System der x^i drücken sich durch die Komponenten im System der X_i aus durch

$$A_m = \sum_i \alpha_{mi} a^i . \tag{4a}$$

Daraus ergibt sich die Beziehung zwischen den kovarianten Komponenten a_i und den A_i durch einfache Rechnung unter Benutzung der Gleichungen (3) zu

$$a_k = \sum_m \alpha_{mk} A_m \tag{5}$$

Ihre Umkehrung ist

(5a) $$A_m = \sum_k \alpha^{mk} a_k .$$

Die Gleichungen (4a) und (5a) können noch etwas anders gedeutet werden. In dem System (x^i) wird die Koordinatenachse X_m eine bestimmte, aber beliebige Richtung haben. A_m ist die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathfrak{a}$ auf diese Richtung. Nun wird die Orthogonalprojektion eines Vektors $\mathfrak{a}$ auf eine beliebige Richtung nach den Regeln der Vektorrechnung gefunden, indem das skalare Produkt aus dem Vektor $\mathfrak{a}$ und dem *Einheitsvektor* η in der betreffenden Richtung gebildet wird. Da dies auch für Koordinatensysteme mit allgemeiner Maßbestimmung gelten muß wegen der invarianten Bedeutung der Orthogonalprojektion und des skalaren Produkts, so muß also A_m auch bestimmt sein durch

(4b) $$A_m = \sum_k \eta_k a^k$$

oder

(5b) $$A_m = \sum_k \eta^k a_k ,$$

wo η_k bzw. η^k die Komponenten des Einheitsvektors η sind. Das sind aber gerade die Gleichungen (4a) und (5a), wenn nur $\alpha^{mk} = \eta^k$ und $\alpha_{mk} = \eta_k$ gesetzt wird. Sie erlauben also die Orthogonalprojektion eines Vektors auf eine beliebige Richtung zu berechnen aus den Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ und des Einheitsvektors η in dem jeweiligen Koordinatensystem.

§ 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung.

Aus einem Vierervektor $\mathfrak{a}$, der durch eine vom Punkt 0 des Riemannschen Raumes ausgehende Strecke geometrisch dargestellt wird und durch seine Komponenten A_1, A_2, A_3, A_4 oder a^1, a^2, a^3, a^4 oder a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben sein kann, läßt sich in einfacher Weise ein symmetrischer Tensor 2. Ranges bilden dadurch, daß jede der Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit jeder anderen und mit sich selbst multipliziert wird. Die Komponenten dieses Tensors lauten dann

$$T_{ik} = A_i A_k \quad \text{oder} \quad t^{ik} = a^i a^k \quad \text{oder} \quad t_{ik} = a_i a_k .$$

Im ersten Fall sind es die auf ein rechtwinklig geradliniges System bezogenen Komponenten des Tensors, im zweiten Fall die

kontravarianten, im dritten Fall die kovarianten Komponenten des auf ein schiefwinkliges System mit allgemeiner Maßbestimmung bezogenen Tensors. Dazu treten als vierte Möglichkeit der Bestimmung dieses Tensors die gemischten Komponenten

$$t_i^k = a_i a^k .$$

Letztere erfüllen jedoch nicht mehr die Symmetriebedingungen.

Es ist offenbar, daß der so gebildete Tensor ein *spezieller* ist; denn zwischen seinen Komponenten bestehen noch gewisse Gleichungen, so z. B.

$$t^{ii}\, t^{kk} = t^{ik\,2} .$$

Dieser spezielle Tensor möge im folgenden kurz mit $[[a^2]]$ bezeichnet werden, wobei das Zeichen [[ ]] die äußere Multiplikation der Vektorkomponenten andeuten soll.[1])

Welches ist nun die Gleichung des *Tensorraumes* des Tensors $[[a^2]]$? Wenn das rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, so lautet sie

$$A_1^2 X_1^2 + A_2^2 X_2^2 + A_3^2 X_3^2 + A_4^2 X_4^2 + 2 A_1 A_2 X_1 X_2 + 2 A_1 A_3 X_1 X_3 + \ldots = \text{const},$$

wobei die Konstante willkürlich ist und gleich 1 angenommen werden kann. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat eines linearen Ausdrucks, so daß auch geschrieben werden kann:

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0 . \tag{6}$$

Der Tensorraum von $[[a^2]]$ zerfällt also in die beiden ebenen Räume

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + 1 = 0$$

und

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 - 1 = 0 .$$

Dies sind zwei parallele ebene Räume im Abstand

$$r = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}$$

---

1) Die Bezeichnung „Äußere Multiplikation" im Anschluß an A. Einstein, „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". § 7. Ann. d. Phys. 49. S. 784. 1916.

beiderseits des Nullpunkts. Auch liegt der Vektor $\mathfrak{a}$ in der Richtung des Lotes vom Nullpunkt auf die ebenen Räume, denn die Neigungswinkel des Vektors $\mathfrak{a}$ gegen die Achsen, wie die des Lotes r sind bestimmt durch

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2}} \text{ usw.}$$

Der Vektor $\mathfrak{a}$ steht also senkrecht auf den beiden parallelen ebenen Räumen. Beide sind durch ihn eindeutig bestimmt, da ja die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ eben die Koeffizienten in der Gleichung des Tensorraumes sind. Es liegt daher nahe, nicht die beiden parallelen ebenen Räume als Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ zu betrachten, sondern vielmehr die beiden entgegengesetzt gerichteten Vektoren von der Länge

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2},$$

die auf je einen der beiden parallelen ebenen Räume hinweisen und auf ihnen senkrecht stehen und die dann als geometrische Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ zu einem *Doppelvektor* verschmelzen und sich nicht, wie sie es als gewöhnliche Vektoren tun würden, als gleich und entgegengesetzt gerichtet, gegenseitig aufheben.

Dieser Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren $+\mathfrak{a}$ und $-\mathfrak{a}$, werde im folgenden einfach als der Doppelvektor $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Nebenstehend ist die Schnittfigur gezeichnet, die entsteht, wenn die beiden parallelen ebenen Räume durch einen ebenen Raum E, der den Doppelvektor $\mathfrak{a}$ enthält, geschnitten werden. Die Schnittflächen des Raumes E mit den parallelen, ebenen Räumen sind zwei parallele Ebenen; der Doppelvektor $\mathfrak{a}$ steht auf diesen Ebenen senkrecht.

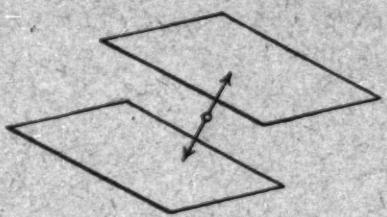


Fig. 1.

Diese geometrische Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ ist selbstverständlich unabhängig vom Koordinatensystem; denn der Doppelvektor, abgeleitet aus dem Raumpaar, ist wie dieses in jedem Koordinatensystem derselbe. Im rechtwinkligen System der X_i kam die Beziehung zwischen Raumpaar und Doppelvektor analytisch dadurch zum Ausdruck, daß die Komponenten

von $\mathfrak{a}$ als Koeffizienten in den Gleichungen der ebenen Räume auftraten. Auch für ein beliebiges Koordinatensystem gilt Entsprechendes. Denn die Gleichung des Tensorraumes

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0$$

geht durch die Transformation (4) über in

$$(a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^2 - 1 = 0, \tag{6a}$$

oder, wenn statt kontravarianter Koordinaten kovariante eingeführt werden, in

$$(a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 + a^4 x_4)^2 - 1 = 0. \tag{6b}$$

Es ergibt sich also: Ist der Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ — und wie sich später zeigen wird ein beliebiger Tensor 2. Ranges — gegeben durch die *kontravarianten Komponenten* $t^{ik} = a^i a^k$, so läßt sich die Gleichung des Tensorraumes unter Benützung dieser Komponenten als Koeffizienten in *kovarianten Koordinaten* x_i anschreiben und umgekehrt, wenn der Tensor in *kovarianten Komponenten* gegeben ist, erscheint die Gleichung des Tensorraumes in *kontravarianten Koordinaten.*

Damit ist die geometrisch invariante Beziehung zwischen dem Paar paralleler ebener Räume und dem Doppelvektor $\mathfrak{a}$ auch für ein beliebiges Koordinatensystem analytisch zum Ausdruck gebracht.

Die geometrische Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ durch den Doppelvektor $\mathfrak{a}$ läßt sich nun auch noch dadurch physikalisch deuten, daß gezeigt wird, wie der Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ zusammen mit einem Ortsvektor $\mathfrak{r} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ einen Vektor $\mathfrak{p}$ bestimmt, so daß für alle möglichen $\mathfrak{r}$ die $\mathfrak{p}$ das Vektorfeld einer einfachen *Dehnung in Richtung des Doppelvektors* $\mathfrak{a}$ liefern. Denn wird in üblicher Weise $\mathfrak{p}$ als lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$ mit Hilfe der Tensorkomponenten angeschrieben, also

$$p_i = a_i a_1 x^1 + a_i a_2 x^2 + a_i a_3 x^3 + a_i a_4 x^4,$$

so wird daraus einfach

$$p_i = a_i (\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}), \tag{7}$$

wo $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})$ das skalare Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ bezeichnet. $\mathfrak{p}$ ist also ein Vektor in der Richtung von $\mathfrak{a}$, weil seine Komponenten denen von $\mathfrak{a}$ proportional sind. Für alle Punkte des ebenen

Raumes, der bestimmt ist durch $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = 0$, verschwindet $\mathfrak{p}$, während er, wie sich leicht zeigen läßt, in allen zu diesem Raum parallelen ebenen Räumen einen konstanten Wert hat; für solche, die im gleichen Abstand auf beiden Seiten von $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = 0$ liegen, hat $\mathfrak{p}$ entgegengesetzt gleiche Werte. Das gleiche Verhalten nach Richtung und Größe zeigt aber die bei einer vierdimensionalen Dehnung des Raumes entstehende Verschiebung jedes Raumpunktes.

Der Doppelvektor $\mathfrak{a}$ kann also auch aufgefaßt werden als geometrischer Ausdruck für eine Dehnung des Raumes, ebenso wie der einfache Vierervektor eine Parallelverschiebung, der spezielle Sechservektor eine Drehung des Raumes festlegt.

Die Darstellung einer Dehnung durch einen Doppelvektor findet sich für den dreidimensionalen Fall bei W. Voigt, „Kristallphysik“[1]) und „Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung“, Ann. d. Phys. 5. S. 241. 1901. Jedoch scheint diese Darstellung bisher nicht im Zusammenhang mit dem Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ betrachtet worden zu sein. So erwähnt Budde in „Tensoren und Dyaden“ Braunschweig 1914, beide an getrennter Stelle.[2])

§ 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Wie oben erwähnt, ist der Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ ein spezieller symmetrischer Tensor, zwischen dessen Komponenten noch gewisse Gleichungen bestehen. Der allgemeine symmetrische Tensor im Riemannschen Raum aber ist bestimmt durch 10 von einander unabhängige Komponenten t^{ik} oder t_{ik}. Es gilt nun, wie im folgenden gezeigt werden soll, der Satz:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich aus vier speziellen Tensoren von der Art des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ *zusammensetzen.*

Oder genauer geometrisch ausgedrückt:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich geometrisch darstellen durch vier Doppelvektoren, wobei diese Doppel-

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin-Leipzig 1910. II. Kapitel. § 70.

2) A. a. O., S. 25 und S. 216.

vektoren so gewählt werden können, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Der eben angeführte Satz behauptet also, daß immer vier spezielle Tensoren $[[\mathfrak{a}^2]]$, $[[\mathfrak{b}^2]]$, $[[\mathfrak{c}^2]]$, $[[\mathfrak{d}^2]]$ gefunden werden können, so daß die Summen ihrer Komponenten gleich sind den Komponenten des allgemeinen symmetrischen Tensors. Also

$$t^{ik} = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k, \tag{8}$$

oder

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k.$$

Der Beweis hierfür läßt sich mittels Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen erbringen. Daß eine Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen immer möglich ist, wird für den Tensor in vier Dimensionen ebenso bewiesen, wie in drei Dimensionen für die Transformation der Fläche 2. Ordnung auf Hauptachsen. (Satz von Laplace.)

Die Gleichung des Tensorraumes im System der Hauptachsen lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 + T_{\mathrm{II}} X_2^2 + T_{\mathrm{III}} X_3^2 + T_{\mathrm{IV}} X_4^2 = \text{const.}$$

Diese Gleichung kann aber aufgefaßt werden als die Summe der vier Gleichungen

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 = \lambda, \quad T_{\mathrm{II}} X_2^2 = \mu, \quad T_{\mathrm{III}} X_3^2 = \nu, \quad T_{\mathrm{IV}} X_4^2 = \tau,$$

wobei $\lambda + \mu + \nu + \tau$ dem Wert der willkürlichen Konstanten in der Gleichung des Tensorraumes gleich ist. Es wird daher im allgemeinen erlaubt sein, $(\lambda, \mu, \nu, \tau) = \pm 1$ anzunehmen.

Jede der vier Gleichungen stellt aber ein Paar paralleler, ebener Räume im Abstand

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda}{T_{\mathrm{I}}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{\mu}{T_{\mathrm{II}}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{\nu}{T_{\mathrm{III}}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{\tau}{T_{\mathrm{IV}}}}$$

vom Nullpunkt dar, jedoch nur dann ein reelles Raumpaar, wenn λ, μ, ν, τ gleiches Vorzeichen haben wie $T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{II}}, T_{\mathrm{III}}, T_{\mathrm{IV}}$. Dementsprechend soll die Vorzeichenwahl für λ, μ, ν, τ getroffen werden. Jedes dieser Raumpaare ist nun nach den Betrachtungen des § 2 bestimmt durch einen Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, deren Komponenten hier die Werte haben

$$(9)\quad \begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{I}}}{\lambda}}, & A_2 = 0, & A_3 = 0, & A_4 = 0, \\ B_1 = 0, & B_2 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{II}}}{\mu}}, & B_3 = 0, & B_4 = 0, \\ C_1 = 0, & C_2 = 0, & C_3 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{III}}}{\nu}}, & C_4 = 0, \\ D_1 = 0, & D_2 = 0, & D_3 = 0, & D_4 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{IV}}}{\tau}}. \end{cases}$$

Dabei stehen die vier Doppelvektoren auf einander senkrecht, weil $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf einander senkrecht stehen.

Damit ist die Möglichkeit einer Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier speziellen Tensoren oder die Möglichkeit einer Darstellung durch vier Doppelvektoren bewiesen.

Wird zu einem beliebigen Bezugssystem mit allgemeiner Maßbestimmung auf den Achsen übergegangen durch die Transformationsgleichungen (4), so wird die Gleichung des Tensorraumes

$$\lambda A_1^2 X_1^2 + \mu B_2^2 X_2^2 + \nu C_3^2 X_3^2 + \tau D_4^2 X_4^2 = \text{const}$$

übergehen in

$$\lambda (A_1 \sum_i \alpha_{1i} x^i)^2 + \mu (B_2 \sum_i \alpha_{2i} x^i)^2 + \nu (C_3 \sum_i \alpha_{3i} x^i)^2 + \tau (D_4 \sum_i \alpha_{4i} x^i)^2 = \text{const.}$$

Nun sind aber $a_m = \sum_k \alpha_{mk} A_k$ die kovarianten Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$; das gleiche gilt für die kovarianten Komponenten von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$. Also lautet die Gleichung des Tensorraumes mit Rücksicht auf das Verschwinden je dreier Komponenten im System der Hauptachsen auch

$$\lambda (\sum_i a_i x^i)^2 + \mu (\sum_i b_i x^i)^2 + \nu (\sum_i c_i x^i)^2 + \tau (\sum_i d_i x^i)^2 = \text{const},$$

oder

$$\sum_{ik} (\lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k) x^i x^k = \text{const},$$

womit die Zerlegung des allgemeinen symmetrischen Tensors in die speziellen Tensoren $[[\mathfrak{a}^2]]$, $[[\mathfrak{b}^2]]$, $[[\mathfrak{c}^2]]$, $[[\mathfrak{d}^2]]$ gegeben ist.

Daher läßt sich allgemein sagen:
Die 16 Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} t_{ik} = \lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k, \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = 0 \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) = 0 \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}) = 0 \\ (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = 0 \quad (\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) = 0 \quad (\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = 0 \end{cases}$$

für die 16 unbekannten Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ haben immer ein reelles Lösungssystem, weil die Parameter λ, μ, ν, τ immer so als $+1$ oder -1 gewählt werden können, daß imaginäre Lösungen vermieden werden. Es läßt sich also allgemein der eingangs erwähnte Satz aussprechen, daß ein beliebiger symmetrischer Tensor durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren geometrisch dargestellt werden kann.

Werden aber statt der Doppelvektoren die Paare paralleler ebener Räume als geometrische Darstellung der speziellen Tensoren betrachtet, so nimmt dieser Satz die selbstverständlich erscheinende Form an:

Dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung kann immer ein rechtwinkliges, vierdimensionales Parallelepiped eingeschrieben werden. (Eingeschrieben deshalb, weil der Tensorraum durch die Schnittpunkte der ebenen Raumpaare hindurchgehen muß.)

Die vier Paare paralleler ebener Räume bilden dabei die dreidimensionalen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Endlich läßt sich der Satz auch in der Form aussprechen:

Die durch einen beliebigen symmetrischen Tensor 2. Ranges bestimmte Deformation des Raumes läßt sich durch vier aufeinander senkrechte Dehnungen hervorbringen.

Es ist dieser Satz das vierdimensionale Analogon zu dem von Helmholz für drei Dimensionen aufgestellten Satz, daß sich eine beliebige Deformation aus drei Dehnungen in zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen läßt.

§ 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

An das eben gewonnene Ergebnis, daß der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges sich geometrisch darstellen läßt durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, schließen sich sogleich folgende Fragen an:

Was für Arten von Tensoren entstehen, wenn die Doppelvektoren, aus denen die fraglichen Tensoren zusammengesetzt werden, nicht aufeinander senkrecht stehen?

Welche Arten von Tensoren entstehen durch Zusammensetzung von weniger als vier, also von zwei oder drei Doppelvektoren?

Daß alle diese so gebildeten Tensoren selbst wieder symmetrische Tensoren sind, folgt aus dem Additionsgesetz der Tensoren. Um aber die verschiedenen Arten von Tensoren zu untersuchen, die entsprechend den verschiedenen möglichen Zusammensetzungen aus speziellen Tensoren gebildet werden können, ist es nötig, die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges näher zu betrachten.

Invarianten des symmetrischen Tensors werden gewisse algebraische Verbindungen der Tensorkomponenten t_{ik} und der g_{ik} — der Komponenten des metrischen Fundamentaltensors — sein, die beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern ihren Wert nicht ändern.

Nehmen nun für einen bestimmten Tensor eine oder mehrere der Invarianten den Wert Null an, so sind dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Komponenten des Tensors gegeben. Die Komponenten dieses Tensors sind nicht mehr voneinander unabhängig, der Tensor also ein spezieller Tensor. Durch die Anzahl der Invarianten des symmetrischen Tensors sind also die möglichen Arten von speziellen Tensoren festgelegt.

Die Invarianten des symmetrischen Tensors können aber nach einer wohl auf Salmon zurückgehenden Methode auf folgende Art gefunden werden.

Die Gleichung des Tensorraumes

$$\sum_{ik} t_{ik} x^i x^k = \text{const}$$

wird bei einer beliebigen Koordinatentransformation übergehen in die Gleichung

$$\sum_{ik} t'_{ik} x'^i x'^k = \text{const},$$

wobei der Wert der Konstanten rechts derselbe bleibt. Die Komponenten des Tensors bilden also zusammen mit den kovarianten Koordinaten des Tangentialraumes eine invariante Bilinearform.

Andererseits sind alle möglichen Koordinatentransformationen dadurch charakterisiert, daß sie die Bilinearform

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

ungeändert lassen; denn diese gibt die invariante Länge des Linienelementes. Aber auch die Länge s einer von einem Punkt des Riemannschen Raumes ausgehenden Strecke im Tangentialraum, gegeben durch

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

muß invariant sein gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen.

Dann wird auch die Summe beider Bilinearformen

$$\sum_{ik} (t_{ik} + \lambda g_{ik}) x^i x^k$$

eine Invariante sein, wobei der Parameter λ noch ganz willkürlich gewählt werden kann.

Nach einem allgemeinen Satz der Invariantentheorie ist auch die Determinante dieser Bilinearform eine Invariante. Diese Determinante

$$|t_{ik} + \lambda g_{ik}| = \Delta(\lambda) \tag{11}$$

werde als Funktion des Parameters λ betrachtet und nach ihm entwickelt. So wird

$$\Delta(\lambda) = S_0 \lambda^4 + S_1 \lambda^3 + S_2 \lambda^2 + S_3 \lambda + S_4 \tag{11a}$$

und es müssen wegen der freien Wählbarkeit von λ auch die Koeffizienten der Potenzen von λ einzeln Invarianten sein. Diese Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 enthalten nur die Komponenten des Tensors und die g_{ik}. Die Invariante S_0 aber hängt nur von den g_{ik} ab; sie ist, wie aus der Determinante $\Delta(\lambda)$ zu ersehen, gleich der Determinante g der g_{ik}, gehört also nicht mit zu den Invarianten des Tensors.

Über den Zahlenwert der Invarianten S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 läßt sich folgendes sagen:

Wird auf die Hauptachsen des Tensorraumes transformiert, so nimmt die Determinante $\Delta(\lambda)$ die Form an

$$\begin{vmatrix} T_{\mathrm{I}} + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{\mathrm{II}} + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\mathrm{III}} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{\mathrm{IV}} + \lambda \end{vmatrix}.$$

Dabei ist angenommen, daß die g_{ik} so bestimmt sind, daß die Strecke s in rechtwinkligen Koordinaten zu berechnen ist durch

$$s^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Es hat also die Determinante der g_{ik} und damit die mit ihr identische Invariante S_0 den Wert 1. Die Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 sind dann, wie aus der Gleichung (11a) hervorgeht, die symmetrischen Funktionen der Wurzeln dieser Gleichung. Nach der Transformation auf Hauptachsen ergeben sie sich speziell als die symmetrischen Elementarfunktionen gebildet aus den Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensors.

Diese Invarianten des Tensors wurden rein analytisch gefunden. Aber auch auf geometrischem Wege lassen sich Invarianten des Tensors aufweisen. Denn allen geometrisch invarianten Eigenschaften des den Tensor darstellenden Gebildes — als solches werde zu diesem Zweck nochmals der Mittelpunktsraum 2. Ordnung betrachtet — müssen analytisch Invarianten des Tensors entsprechen. Der Mittelpunktsraum 2. Ordnung ist geometrisch bestimmt, wenn seine Hauptachsen gegeben sind. Die Längen der Hauptachsen, gemessen im Einheitsmaßstab, ändern ihre Werte nicht beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern. Sie, oder was das gleiche bedeutet, die Werte T_{I}, T_{II}, T_{III}, T_{IV} der Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensorraumes sind also auch Invarianten des Tensors. Denn es lassen sich ja in jedem Koordinatensystem die Längen der Hauptachsen in bestimmter Weise aus den gegebenen Komponenten des Tensors berechnen. Nur sind sie zum Unterschied von den oben gefundenen Invarianten des Tensors keine rationalen, sondern irrationale Verbindungen der t_{ik} und g_{ik}. Wie bereits gezeigt, sind die S_1, S_2, S_3, S_4 die symmetrischen Funktionen der T_{I}, T_{II}, T_{III}, T_{IV}. Es können entweder die ersteren oder die letzteren als unabhängige Invarianten betrachtet werden.

Nachdem so die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges bekannt sind, lassen sich die verschiedenen möglichen Arten spezieller Tensoren folgendermaßen bestimmen:

1. Eine der Invarianten $T_i = 0$. Dann ist auch

$$S_4 = T_{\mathrm{I}}\, T_{\mathrm{II}}\, T_{\mathrm{III}}\, T_{\mathrm{IV}} = 0.$$

Geometrisch heißt das, daß eine der Hauptachsen des Mittelpunktraumes 2. Ordnung unendlich groß wird; der Mittelpunktsraum artet aus in einen Zylinderraum 1. Art, dessen Gleichung auf Hauptachsen bezogen, lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 + T_{\mathrm{II}} X_2^2 + T_{\mathrm{III}} X_3^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{\mathrm{IV}}.$$

Ein spezieller Tensor dieser Art ist darstellbar durch drei Doppelvektoren.

2. Zwei Invarianten verschwinden; $T_i = 0$ und $T_k = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$ und $S_3 = 0$. Der Mittelpunktsraum artet in einen Zylinderraum 2. Art aus, indem zwei der Hauptachsen unendlich groß werden. Seine Gleichung lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 + T_{\mathrm{II}} X_2^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{\mathrm{IV}}; \quad T_k = T_{\mathrm{III}}.$$

Der entsprechende spezielle Tensor wird durch zwei Doppelvektoren geometrisch dargestellt.

3. Drei der Invarianten verschwinden; $T_i = 0$, $T_k = 0$, $T_l = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$, $S_3 = 0$, $S_2 = 0$. Drei der Hauptachsen werden unendlich groß; der Mittelpunktsraum 2. Ordnung artet in ein Paar paralleler ebener Räume aus, deren Abstand vom Nullpunkt gleich ist der vierten, nicht verschwindenden Hauptachse. Seine Gleichung lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{\mathrm{IV}}, \quad T_k = T_{\mathrm{III}}, \quad T_l = T_{\mathrm{II}}.$$

Der spezielle Tensor dieser Art ist der durch einen Doppelvektor geometrisch darstellbare Tensor, der Tensor von der Form $[[\mathfrak{a}^2]]$.

Nun lassen sich auch die am Anfang dieses Paragraphen gestellten Fragen beantworten.

Durch Addition von drei speziellen Tensoren von der Form $[[\mathfrak{a}^2]]$ entsteht ein Tensor, für den $S_4 = 0$ ist.

Durch Addition von zwei speziellen Tensoren von der Form $[[\mathfrak{a}^2]]$ entsteht ein spezieller Tensor, für den $S_3 = 0$ und $S_4 = 0$ ist.

Dabei, sowie bei der Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier Tensoren $[[\mathfrak{a}^2]]$, $[[\mathfrak{b}^2]]$, $[[\mathfrak{c}^2]]$, $[[\mathfrak{d}^2]]$ ist es gleichgültig, ob die betreffenden Doppelvektoren aufeinander senkrecht stehen oder nicht.

Denn wenn auch zwei Doppelvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht aufeinander senkrecht stehen, kann der durch die Komponenten

$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k$ bestimmte Mittelpunktsraum 2. Ordnung nur ein Zylinderraum 2. Art sein, da er durch die vier Schnittebenen der beiden Paare von parallelen, ebenen Räumen, den Tensorräumen von $[[\mathfrak{a}^2]]$ und $[[\mathfrak{b}^2]]$, gehen muß.

Ebenso kann der durch drei beliebige Doppelvektoren bestimmte Tensor mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k$ nur einen Zylinderraum 1. Art als Tensorraum haben; denn dieser Tensorraum muß die acht parallelen Geraden enthalten, in denen sich die drei Paare paralleler ebener Räume schneiden.

Der Tensorraum des aus vier beliebigen Doppelvektoren gebildeten Tensors mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$ wird ein durch die 16 Schnittpunkte der vier Paare ebener Räume gehender und durch sie bestimmter Mittelpunktsraum 2. Ordnung sein.

Dabei sind die Paare ebener Räume einem Quadrupel konjugierter Durchmesserräume des Mittelpunktsraumes 2. Ordnung parallel. Sie bilden die Begrenzungen eines dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenen vierdimensionalen Parallelepipeds. Die vier Doppelvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ stehen senkrecht auf den ebenen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Die Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren ist also nicht die einzig mögliche Art der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren, sondern nur ein besonderer Fall der allgemeinen Darstellung durch vier beliebig zueinander geneigte Doppelvektoren, deren Richtungen bestimmt sind durch die Lote auf ein dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenes Parallelepiped.

§ 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors.

Mit der durch die Betrachtungen des § 3 gewonnenen geometrischen Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges ist nun auch die geometrische Deutung der einzelnen Komponente des Tensors möglich geworden.

Bei dem speziellen Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ ist nämlich die kovariante Komponente $t_{ik} = a_i a_k$ das Produkt der Orthogonalprojektionen des Vektors $\mathfrak{a}$ auf i- und k-Achse. Die kontravariante Komponente $t^{ik} = a^i a^k$ ist das Produkt aus den Parallelprojektionen

des Vektors $\mathfrak{a}$ auf die i- und die k-Achse. Werden Orthogonalprojektion und Parallelprojektion im Einheitsmaßstab gemessen, so ist

$$a_i = A_i \sqrt{g_{ii}} \quad \text{und} \quad a^i = \frac{A^i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

also

$$t_{ik} = A_i A_k \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \quad \text{und} \quad t^{ik} = \frac{A^i A^k}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

$T_{ik} = A_i A_k$ und $T^{ik} = A^i A^k$ sind die kovarianten bzw. die kontravarianten Komponenten des Tensors, wenn die Koordinatenbestimmung mit dem Einheitsmaßstab erfolgt.

Für $i = k$ ergeben sich die Komponenten t_{ii} oder t^{ii} als die Quadrate der Orthogonalprojektionen oder Parallelprojektionen auf die i-Achse.

Für den allgemeinen symmetrischen Tensor 2. Ranges, der durch vier Doppelvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ geometrisch dargestellt wird, ist dann die Komponente t_{ik} die Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf die i- und k-Achse. Die Komponente t^{ik} ist die Summe der Produkte aus den Parallelprojektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf die i- und k-Achse.

Daraus ist zu ersehen, daß die Komponenten des symmetrischen Tensors 2. Ranges nicht nach einer Geraden, wie beim Vierervektor, auch nicht nach einer Ebene, wie beim Sechservektor, sondern nach einem *Geradenpaar* zu bilden sind, wobei diese beiden Geraden einen beliebigen Winkel miteinander einschließen können, weil ja beim schiefwinkligen Koordinatensystem die Achsen beliebig zueinander geneigt sein können.

Dies führt dazu, die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem beliebigen Geradenpaar, das nicht mit einem Achsenpaar des Koordinatensystems zusammenfällt, geometrisch und unabhängig vom Koordinatensystem folgendermaßen zu definieren:

Es soll die Komponente T_{sr} des symmetrischen Tensors nach einem beliebigen Geradenpaar mit den Richtungen s und r gleich sein der Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *auf die Richtungen s und r.* Also

$$T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r. \tag{12}$$

Dabei sind A_s, A_r, B_s, B_r usw. die im Einheitsmaßstab gemessenen Orthogonalprojektionen. Da diese unabhängig vom Koordinatensystem sind, so ist auch T_{sr} unabhängig definiert.

Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß zwei der Achsen in die Richtungen s und r fallen und werden in diesem Koordinatensystem die Längen mit dem Einheitsmaßstab gemessen, so tritt tatsächlich T_{sr} als eine der Komponenten des symmetrischen Tensors in diesem Koordinatensystem auf.

Wie drückt sich nun die durch die Gleichung (12) definierte Tensorkomponente nach zwei beliebigen Richtungen s und r durch die jeweils gegebenen Tensorkomponenten t_{ik} oder t^{ik} oder t_i^k aus?

Entsprechend der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren ist

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$$

oder $$t^{ik} = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k$$

oder $$t_i^k = a_i a^k + b_i b^k + c_i c^k + d_i d^k .$$

Es sei ferner η der Einheitsvektor in der Richtung s, ζ der Einheitsvektor in der Richtung r. Nun ist nach Gleichung (5b) des § 1

$$A_s = \sum_i a_i \eta^i .$$

Entsprechend wird

$$A_r = \sum_k a_k \zeta^k ,$$

also

$$A_s A_r = \sum_{ik} a_i a_k \eta^i \zeta^k .$$

Ebenso findet sich

$$B_s B_r = \sum_{ik} b_i b_k \eta^i \zeta^k , \quad C_s C_r = \sum_{ik} c_i c_k \eta^i \zeta^k , \quad D_s D_r = \sum_{ik} d_i d_k \eta^i \zeta^k$$

Daher wird

$$T_{sr} = \sum_{ik} (a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k) \eta^i \zeta^k$$

$$T_{sr} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k . \tag{12a}$$

Damit ist die Komponente des Tensors nach den Richtungen s und r ausgedrückt durch die kovarianten Komponenten t_{ik}.

Falls aber der Tensor nicht durch die kovarianten, sondern durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} in dem betreffenden

Koordinatensystem gegeben ist, kann nach Gleichung (4b) des § 1 geschrieben werden

$$A_s = \sum_i a^i \eta_i,$$

entsprechend

$$A_r = \sum_k a^k \zeta_k,$$

also ist

$$A_s A_r = \sum_{ik} a^i a^k \eta_i \zeta_k.$$

Die Ausdrücke für $B_s B_r$, $C_s C_r$ und $D_s D_r$ sind ebenso gebaut, so daß sich ergibt

(12b) $$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k.$$

Damit ist T_{sr} durch die kontravarianten Komponenten ausgedrückt.

Endlich, wenn der Tensor durch seine gemischten Komponenten gegeben ist, kann geschrieben werden

$$A_s A_r = \sum_i a_i \eta^i \sum_k a^k \zeta_k$$
$$= \sum_{ik} a_i a^k \eta^i \zeta_k$$

und es wird

(12c) $$T_{sr} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k.$$

Diese Bildungsweise der Tensorkomponente T_{sr} nach den Richtungen s und r aus den im jeweiligen Koordinatensystem gegebenen Tensorkomponenten stimmt überein mit der im dreidimensionalen Fall angewendeten Bildung der Tensorkomponente nach zwei Richtungen. So wird z. B. in der Mechanik der Kontinua gezeigt, daß die Spannung oder der Druck, der auf ein Flächenstück mit der Normalrichtung r wirkt, in der Richtung s die Größe hat

$$\sigma_{sr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \beta_k,$$

wobei σ_{ik} die Komponenten des Drucktensors in dem der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sind, $\cos \alpha_i$ die Richtungskosinus von s, $\cos \beta_k$ die von r. Wird insbesondere nach der Größe des Normaldruckes gefragt, so fällt s mit r zusammen und es ist

$$\sigma_{rr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \alpha_k.$$

Dabei tritt in der klassischen Mechanik und Elastizitätstheorie nur eine Art von Tensorkomponenten auf, da für die dort angewendeten orthogonalen Koordinatensysteme kontravariante und kovariante Komponenten zusammenfallen. Werden aber auch dort schiefwinklige Koordinatensysteme benützt, so muß selbstverständlich auch in der klassischen Mechanik zwischen kontravarianten und kovarianten Vektor- und Tensorkomponenten unterschieden werden. Die bisher durchgeführten Betrachtungen über den symmetrischen Tensor sind aber auf diesen Fall unmittelbar anzuwenden, wenn nur statt der Dimensionszahl 4 die Dimensionszahl 3 gewählt wird.

§ 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Bisher wurde ein symmetrischer Tensor 2. Ranges betrachtet, der nur für einen Punkt des Riemannschen Raumes als gegeben angenommen wurde. Im folgenden soll nun der Betrachtung ein *Tensorfeld* zugrunde gelegt werden. Die Tensorkomponenten sind also Funktionen der Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 im Riemannschen Raum. Für jeden Punkt des Riemannschen Raumes ist damit ein bestimmter Tensor gegeben. Jeder dieser Tensoren kann geometrisch dargestellt werden durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, die im Tangentialraum des betreffenden Punktes liegen. Durch diese vier Doppelvektoren sind dann vier Vektorfelder $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ im Riemannschen Raum bestimmt. Diese vier Vektorfelder ersetzen gleichsam das Tensorfeld.

Es ist somit auch für jeden Punkt des Riemannschen Raumes eine Tensorkomponente T_{sr} nach zwei Richtungen s und r eindeutig bestimmt durch

$$T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r.$$

Dadurch ist es möglich, einen aus dem Tensorfeld abzuleitenden Vierervektor, die Divergenz des symmetrischen Tensors — geschrieben $\mathfrak{Div}\, T$ — geometrisch und unabhängig vom Bezugssystem zu definieren in analoger Weise wie A. Sommerfeld die Divergenz des Vierervektors und Sechservektors definiert hat.[1])

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. Ann. d. Phys. 33. S. 649. 1910.

Ein Vierervektor $\mathfrak{a}$ ist unabhängig vom Bezugssystem bestimmt, wenn seine Komponente A_s in einer beliebigen Richtung s angegeben werden kann. Dabei muß unter der Komponente A_s die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{a}$ auf die Richtung s, gemessen im Einheitsmaßstab verstanden werden; denn nur die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion, nicht etwa die Parallelprojektion ist unabhängig vom jeweiligen Bezugssystem bestimmbar.

Es sei nun s diejenige Richtung, nach der die Komponente des Vierervektors $\mathfrak{Div}\, T$ bestimmt werden soll. Ist $\Delta\Sigma$ ein beliebig gestaltetes vierdimensionales Volumen in der Umgebung des betrachteten Punktes, ΔS seine dreidimensionale Begrenzung n die Normale auf ΔS, so ist zu definieren:

$$\mathfrak{Div}_s T = \lim_{\Delta\Sigma = 0} \frac{\int T_{sn}\, dS}{\Delta\Sigma}. \tag{13}$$

Da die Komponente T_{sn} nach den Richtungen s und n unabhängig vom Bezugssystem und eindeutig definiert ist, so ist auch $\mathfrak{Div}\, T$ unabhängig vom Bezugssystem definiert.

Um nun zu erkennen, daß diese Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors mit der üblichen übereinstimmt, soll im folgenden gezeigt werden, wie sich durch spezielle Wahl des Volumelementes $\Delta\Sigma$ und der Richtung s aus dieser Definition die von Einstein-Großmann angegebene und rein analytisch abgeleitete Formel für die Divergenz des symmetrischen Tensors ergibt.

Das Volumelement $\Delta\Sigma$ werde zu diesem Zweck als Parallelepiped gewählt, dessen Kanten in die Richtungen der wachsenden kontravarianten Koordinaten fallen. Sie sind also dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 und es ist

$$\Delta\Sigma = dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 \sqrt{g},$$

wo g der Wert der Determinante der g_{ik} ist.

Die Begrenzungen von $\Delta\Sigma$ sind dann die dreidimensionalen Parallelepipede $\Delta S_4, \Delta S_3, \Delta S_2, \Delta S_1$ mit den Kanten dx^1, dx^2, dx^3; dx^1, dx^2, dx^4; dx^1, dx^3, dx^4; dx^2, dx^3, dx^4, sowie die ihnen gegenüberliegenden und es ist

$$\Delta S_1 = dx^2\, dx^3\, dx^4 \sqrt{g^{11} g};$$

denn $g^{11} g$ ist die Unterdeterminante von g_{11}.

Oder

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta \Sigma \sqrt{g^{11}}}{dx^1},$$

allgemein

$$\Delta S_i = \frac{\Delta \Sigma \sqrt{g^{ii}}}{dx^i}.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die 8 dreidimensionalen Parallelepipede und zwar bei festgehaltener Richtung s. Dann muß in Anbetracht der Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

der Einheitsvektor η in dieser Richtung beim Übergang vom Punkt P zum Punkt P', der unendlich benachbart sein soll, gewisse Zuwächse erfahren, die gegeben sind durch

$$\delta \eta^i = -\sum_{rs} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \eta^r\, \delta x^s \,^{1}), \tag{14}$$

wobei die δx^s die kontravarianten Komponenten des Vektors PP' sind.

Ferner soll nach der Definition von $\mathfrak{Div}_s T$ die Richtung n die der Normalen auf der Begrenzung von $\Delta \Sigma$ sein. Ist wieder ζ der in die n-Richtung fallende Einheitsvektor, so muß ζ also auf den Parallelepipeden ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 und ΔS_4, bzw. auf den diesen gegenüberliegenden, jeweils senkrecht stehen. Der Vektor ζ, der auf den Achsenrichtungen 2, 3, 4 senkrecht steht, hat aber die kovarianten Komponenten ζ_1, 0, 0, 0. Da er Einheitsvektor sein soll, so ist $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$. Entsprechendes gilt für ζ, wenn er auf den anderen Parallelepipeden senkrecht steht.

Wird nun T_{sn} ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors, also $T_{sn} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k$ gesetzt und wird ferner die s-Richtung in eine der Achsenrichtungen, z. B. die Richtung 1 gelegt, so ergibt sich als Wert der Komponente T_{sn} für das Parallelepiped ΔS_1, das vom Punkt P ausgeht

$$T_{11} = t_1^1 \eta^1 \zeta_1 = t_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}},$$

---

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, § 14. S. 100

und als Wert von T_{11} für das Parallelepiped $\overline{\Delta S_1}$, das vom Punkt P' ausgeht,

$$\bar{T}_{11} = \sum_i \bar{t}_i^{\,1}\,\bar{\eta}^i\,\bar{\xi}_1 = \sum_i \bar{t}_i^{\,1}(\eta^i + \delta\eta^i)\,\bar{\xi}_1\,,$$

wobei durch die Striche angedeutet werden soll, daß die Werte für den Punkt $(x^1+dx^1, x^2, x^3, x^4)$ statt für den Punkt $(x^1, x^2, x^3\,x^4)$ zu nehmen sind.

Wird also der zu berechnende Grenzwert für das Parallelepiped (dx^2, dx^3, dx^4) und das ihm gegenüberliegende gebildet, wobei bei diesem Übergang zu setzen ist: $\delta x^1 = dx^1$, $\delta x^2 = \delta x^3 = \delta x^4 = 0$, so ergibt sich daraus zur Berechnung von $\mathfrak{Div}_1 T$ der Anteil

$$\lim_{\Delta\Sigma=0}\left(T_{11}\frac{\Delta S_1}{\Delta\Sigma} + \bar{T}_{11}\frac{\overline{\Delta S_1}}{\Delta\Sigma}\right)$$

$$= -\,t_1^{\,1}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g^{11}}}\frac{\sqrt{g^{11}g}}{dx^1\sqrt{g}} + \bar{t}_1^{\,1}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}}\frac{\sqrt{\bar{g}^{11}\bar{g}}}{dx^1\sqrt{g}}$$

$$-\sum_i \bar{t}_i^{\,1}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ i\end{matrix}\right\}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{dx^1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}}\frac{\sqrt{\bar{g}^{11}\bar{g}}}{dx^1\sqrt{g}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(t_1^{\,1}\sqrt{g}) - \sum_i t_i^{\,1}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ i\end{matrix}\right\}\sqrt{g}\right).$$

Allgemein berechnet sich für ein Parallelepiped ΔS_m und das ihm gegenüberliegende der Anteil

$$\frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}(t_1^{\,m}\sqrt{g}) - \sum_i\left\{\begin{matrix}1\,m\\ i\end{matrix}\right\}t_i^{\,m}\sqrt{g}\right).$$

Also ist

$$\mathfrak{Div}_1 T = \frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{g_{11}}}\left(\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m}(t_1^{\,m}\sqrt{g}) - \sum_{i\,m}\left\{\begin{matrix}1\,m\\ i\end{matrix}\right\}t_i^{\,m}\sqrt{g}\right)$$

und die Komponente von $\mathfrak{Div}\,T$ nach einer beliebigen Achse

$$\text{(13a)}\quad \mathfrak{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m}(t_k^{\,m}\sqrt{g}) - \sum_{i\,m}\left\{\begin{matrix}k\,m\\ i\end{matrix}\right\}t_i^{\,m}\sqrt{g}\right),$$

wenn dabei noch die Maßbestimmung $ds_k = \sqrt{g_{kk}}\,dx^k$ auf der k-Achse berücksichtigt wird, also die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{Div}\,T$ auf die k-Achse nicht im Einheitsmaßstab gemessen wird, sondern so, wie es die allgemeine Maßbestimmung in dem betreffenden Koordinatensystem verlangt.

Durch diese Formel ist die Komponente von $\mathfrak{Div}\, T$ nach der k-Achse ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors in dem jeweiligen Koordinatensystem.

Soll aber die k-Komponente von $\mathfrak{Div}\, T$ durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} oder durch die konvarianten Komponenten t_{ik} ausgedrückt werden, so sind bei gleicher Wahl des Parallelepipeds

$$T_{sn} = \sum_{ik} t^{ik}\, \eta_i\, \zeta_k ,$$

bzw.

$$T_{sn} = \sum_{ik} t_{ik}\, \eta^i\, \zeta^k$$

bei der Berechnung des Grenzwertes einzuführen. Dabei unterscheidet sich die Rechnung von der obigen im ersten Fall dadurch, daß statt der kontravarianten Komponenten η^i und $\delta\eta^i$ die kovarianten Komponenten η_i und $\delta\eta_i$ zu benutzen sind, im zweiten Fall statt der Komponenten ξ_i die Komponenten ξ^i. Die Rechnung ergibt:

$$\text{(13b)} \qquad \mathfrak{Div}_k\, T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t^{im} \sqrt{g})\, g_{ki} - \sum_{im} t^{mi} \sqrt{g} \begin{bmatrix} km \\ i \end{bmatrix} \right)$$

bzw.

$$\text{(13c)} \qquad \mathfrak{Div}_k\, T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t_{ki}\, g^{mi} \sqrt{g}) - \sum_{ilm} t_{il}\, g^{mi} \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} km \\ i \end{matrix} \right\} \right).$$

Dies sind aber die Formeln, die A. Einstein in „Die formale Grundlage der Relativitätstheorie", Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1914, XLI angegeben hat. Und zwar erhält Einstein diese Formeln, indem er aus dem Tensor 2. Ranges durch Differentiation erst die „Erweiterung" des symmetrischen Tensors, also einen Tensor 3. Ranges bildet und an diesem Tensor 3. Ranges zusammen mit dem Fundamentaltensor $\delta_\mu{}^\nu$ die innere Multiplikation durchführt. Diese Bildungsweise läßt aber den eigentlichen Zusammenhang zwischen dem symmetrischen Tensor 2. Ranges und seiner Divergenz nicht erkennen, während durch die hier gegebene Ableitung der Divergenz dieser Zusammenhang klar hervortritt. Es zeigt sich also, daß auch im Riemannschen Raum eine geometrische Darstellung von Vektoren und Tensoren dazu

führen kann, besseren Einblick in die Eigenschaften dieser Gebilde zu erhalten, wie die rein analytische Betrachtungsweise.

Allgemein hat schon F. Jung gezeigt[1]), wie mittels Integration über die $(n-1)$ dimensionale Begrenzung eines n-dimensionalen Volumens im Raum von n-Dimensionen auf Tensoren anwendbare Differentialoperationen abgeleitet werden können. Dieser von Jung „Feldableitung" genannte, allgemein definierte Grenzübergang umfaßt als Spezialfall auch die hier gegebene Ableitung der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. Jedoch bietet die hier gegebene Ableitung insofern Neues, als sie auf einer geometrischen Darstellung des Tensors selbst beruht, während bei Jung von einer Darstellung der Tensoren durch geometrische Gebilde nicht die Rede ist. Deshalb ist auch sein Grenzübergang nicht eigentlich geometrisch definiert, da er den Tensor, dessen Feldableitung gebildet werden soll, in keine geometrische Beziehung setzt zu der $(n-1)$ dimensionalen Oberfläche, über die integriert wird, sondern nur rein analytisch angibt, daß der Tensor auf irgendeine Art multipliziert werden soll mit dem vektoriell gedachten Oberflächenelement. Dabei benützt Jung ein weitläufiges Schema des Vektorkalküls im Anschluß an die Grassmannsche Ausdehnungslehre für n-Dimensionen. In der vorliegenden Arbeit dagegen wird versucht, das Rechnen mit Vektoren und Tensoren vom euklidischen Raum in einfacher Weise auf den Riemannschen Raum zu übertragen und dabei die Tensoren auch nach der Seite ihrer Anschaulichkeit den Vektoren möglichst anzupassen.

§ 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Aus der im § 6 gegebenen Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges entspringt ein Integralsatz ähnlich dem Gausschen Satz in drei Dimensionen. Er lautet:

$$\int \mathfrak{Div}_k T \, d\Sigma = \int T_{kn} \, dS \tag{15}$$

1) F. Jung, „Die Feldableitungen bei allgemeinen Koordinaten". Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa. 126. Heft 10.

und gestattet ein über die dreidimensionale Begrenzung eines beliebig gestalteten vierdimensionalen Volumens erstrecktes Tensorintegral überzuführen in ein Vektorintegral über dieses Volumen. Umgekehrt kann mit Hilfe dieses Satzes ein Vektorintegral über ein vierdimensionales Volumen ersetzt werden durch ein Tensorintegral über die Begrenzung dieses Volumens, jedoch nur dann, wenn bekannt ist, daß das betreffende Vektorfeld durch die Operation $\mathfrak{Div}$ aus einem Tensorfeld entstanden ist.

Der Beweis dieses Integralsatzes ergibt sich in bekannter Weise: Wird das Volumen Σ in die Volumelemente $d\Sigma$ geteilt, so gilt für jedes einzelne Volumelement die Gleichung (13), die auch geschrieben werden kann

$$\mathfrak{Div}_k T\, d\Sigma = \int T_{kn}\, dS.$$

Durch Summation all dieser für die einzelnen Volumelemente geltenden Gleichungen ergibt sich links $\int \mathfrak{Div}_k T\, d\Sigma$, rechts heben sich die Anteile der gemeinsamen Begrenzung je zweier benachbarter Volumelemente $d\Sigma$ auf, weil die Normalen für beide entgegengesetzte Richtung haben, und es bleiben bei der Summation nur die Anteile der äußeren Begrenzung S von Σ stehen, so daß sich das $\int T_{kn}\, dS$ über die Begrenzung S erstreckt.

Dieser Integralsatz kann dazu benützt werden, die *Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie in Integralform* zu schreiben.

Im *elektromagnetischen Feld* läßt sich die Viererkraft $\mathfrak{p}$, die an einem mit Elektrizität geladenen Punkte angreift, aus einem symmetrischen Tensor 2. Ranges ableiten. Es ist nämlich

$$p_i = -\,\mathfrak{Div}_i F.$$

Dabei baut sich der Energietensor F in bekannter Weise aus den Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ auf.

Obiger Integralsatz auf diese Gleichungen angewendet, ergibt

$$\int p_i\, d\Sigma = -\int F_{in}\, dS. \tag{16}$$

Nun ist aber $\int p_i\, d\Sigma = P_i$ die i-Komponente der Gesamtviererkraft, die auf das betrachtete vierdimensionale Volumen Σ wirkt. Die Gleichungen (16) zeigen also, daß sich diese

Gesamtviererkraft berechnen läßt durch ein über die „Oberfläche" dieses Volumens erstrecktes Tensorintegral gemäß

$$P_i = -\int F_{in}\, dS. \tag{16a}$$

Diese Gleichungen sind ganz analog denjenigen, die im Falle konstanten elektromagnetischen Feldes die auf ein dreidimensionales Raumgebiet wirkende ponderomotorische Kraft zu berechnen gestatten aus dem für die Oberfläche dieses Gebietes gegebenen Maxwellschen Spannungstensor. Sie sind deren vierdimensionale Erweiterung für den Fall zeitlich veränderlicher Felder. Die Viererkraft $\mathfrak{P}$ gibt dabei durch ihre räumlichen Komponenten eben die gesamte ponderomotorische Kraft auf ein dreidimensionales Raumgebiet S, das bei der Bewegung (oder Ruhe) das vierdimensionale Volumen Σ beschreibt.

Ebenso lassen sich bekanntlich die Impuls-Energiegleichungen der *Mechanik und Hydrodynamik* nach der allgemeinen Relativitätstheorie in der Form schreiben

$$p_i = \mathfrak{Div}_i R, \tag{17}$$

wobei R der *kinetische* Energie-Impulstensor ist. Es gilt also auch hier

$$\int p_i\, d\Sigma = \int R_{in}\, dS$$

oder

$$P_i = \int R_{in}\, dS. \tag{17a}$$

Im *Gravitationsfeld* beschreibt ein Punkt mit der Ruhmasse μ_0, auf den keine äußere Kraft außer der Gravitationskraft selbst wirkt, nach Einstein eine geodätische Bahn. Die Viererkraft p verschwindet für ihn und seine Bewegungsgleichung lautet

$$\mathfrak{Div}_i R = 0, \tag{18}$$

wo $R_{ik} = \mu_0 u_i u_k$ (μ_0 Ruhmassendichte, u_i, u_k Komponenten der Vierergeschwindigkeit). R ist also in diesem Fall ein durch einen Doppelvektor darstellbarer Tensor zweiten Ranges.

Sollen nun für die *Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen die Impuls-Energiegleichungen* aufgestellt werden, so müssen der elektromagnetische und der kinetische Energie-Impulstensor

zu einem Energie-Impulstensor, dem *Welttensor T* vereinigt werden. Das *Prinzip von der Erhaltung der Energie* verlangt aber dann, daß die aus dem Welttensor T abzuleitende Viererkraft verschwindet, also

$$\mathfrak{Div}_i T = 0,$$

wofür jetzt auch geschrieben werden kann

$$\int T_{in}\, dS = 0. \tag{19}$$

Wird nun der Welttensor T als vierdimensionaler Spannungstensor betrachtet, so läßt sich der *Satz von der Erhaltung der Energie* in folgender, *geometrischer Form* aussprechen:

Die metrischen Eigenschaften des vierdimensionalen Raumes werden durch die Materie derart bestimmt, daß die Gesamtviererkraft verschwindet, die auf ein vierdimensionales Volumen Σ durch die auf dessen Oberfläche wirkenden, dem Welttensor T entsprechenden Spannungen ausgeübt wird.

§ 8. Geometrische Darstellung und Divergens des nichtsymmetrischen Tensor 2. Ranges.

Die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem Richtungspaar r und s war unabhängig vom Koordinatensystem definiert als Summe der Produkte der Orthogonalprojektionen der den Tensor darstellenden Doppelvektoren auf die Richtungen r und s. $T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r$. Es zeigte sich, daß die so definierte Komponente durch die Tensorkomponenten in dem jeweils der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sich ausdrückte in den Form

$$T_{sr} = \sum_{ik} t_{ik}\, \eta^i\, \zeta^k \quad \text{oder} \quad T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik}\, \eta_i\, \zeta_k \quad \text{oder} \quad T_{sr} = \sum_{ik} t_i^{\,k}\, \eta^i\, \zeta_k.$$

Daraus kann auch analytisch erkannt werden, daß T_{sr} eine invariante Bildung ist; denn wie oben erwähnt, haben die Tensorkomponenten die Eigenschaft, mit den Komponenten zweier Vierervektoren zur Bilinearform vereinigt, eine Invariante zu ergeben. Dies gilt nicht nur für den symmetrischen Tensor, sondern auch für den nichtsymmetrischen Tensor, also insbesondere auch für den antisymmetrischen. Daraus kann der Schluß gezogen werden, daß unabhängig von einer geometrischen

Darstellung für einen *beliebigen Tensor 2. Ranges* die Komponente nach zwei Richtungen s und r zu definieren ist durch

$$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

und entsprechend für die kovarianten und gemischten Komponenten, wobei also η und ζ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen sind. Dann kann aber auch für einen beliebigen Tensor 2. Ranges die Divergenz durch denselben Grenzprozeß definiert werden, wie für den symmetrischen Tensor, also durch

$$\mathfrak{Div}_k T = \lim_{\Delta \Sigma = 0} \frac{\int T_{kn} dS}{\Delta \Sigma}$$

und die aus dieser Definition für ein bestimmtes Koordinatensystem abgeleiteten Gleichungen (13a), (13b), (13c) gelten ebenso für den symmetrischen, wie für den nichtsymmetrischen Tensor. In der Tat sind sie diejenigen Formeln, die Einstein auch für den nichtsymmetrischen Tensor angibt. Der Weg aber, der zu der Erkenntnis führt, daß die Invariante $\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$ als Komponente des Tensors auch den Richtungen der Vektoren η und ζ zu betrachten sei, ist der der geometrischen Darstellung.

Insbesondere wird für den *antisymmetrischen* Tensor wegen $t^{ik} = - t^{ki}$ die Komponente nach den Richtungen s und r

$$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

$p_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$ sind aber die Komponenten des speziellen Sechservektors, der geometrisch durch das von den beiden Vektoren η und ζ bestimmte Parallelogramm dargestellt wird. Nun bleiben aber die p_{ik} ungeändert, wenn η und ζ sich in derselben Ebene irgendwie ändern, wobei nur der Flächeninhalt des durch sie bestimmten Parallelogramms derselbe bleiben muß. Es bleibt dann also auch die Komponente T_{sr} ungeändert. Aus diesem Grunde läßt sich für den antisymmetrischen Tensor 2. Ranges die Komponente nach einer Ebene bilden, die bestimmt sein kann durch ein *beliebiges* Richtungspaar in ihr, statt wie beim symmetrischen Tensor die Komponenten nach einem *festen* Richtungspaar. Dies ergibt sich unabhängig von der geometrischen Darstellung des antisymmetrischen Tensors. Nun läßt sich aber der antisymmetrische

Tensor oder allgemeine Sechservektor geometrisch darstellen durch zwei aufeinander senkrechte Flächenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Orientierung im Raum. Die Komponente des antisymmetrischen Tensors nach einer beliebigen Ebene ist dann geometrisch definiert durch die Summe der Orthogonalprojektionen der beiden Flächenstücke auf die betreffende Ebene.[1]) Es ist leicht einzusehen, daß diese geometrische Definition der Komponente des antisymmetrischen Tensors analytisch sich ausdrückt durch eben die Bildung

$$\sum_{ik} f^{ik}(\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

Da der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges immer in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Tensor zerlegt werden kann, so kann der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges dargestellt werden durch vier Doppelvektoren zusammen mit zwei aufeinander senkrechten Flächenstücken von bestimmtem Inhalt. Die Komponente des nichtsymmetrischen Tensors nach einem beliebigen Richtungspaar ist also geometrisch definiert als Summe aus den Produkten der Orthogonalprojektionen der Doppelvektoren auf die beiden Richtungen und aus den Orthogonalprojektionen der beiden Ebenenstücke auf die durch die zwei Richtungen bestimmte Ebene.

A. Sommerfeld hat für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie in vier Dimensionen die Divergenz des allgemeinen Sechservektors f definiert[2]) durch den Grenzübergang

$$\mathrm{Div}_s f = \lim_{\Delta S = 0} \frac{\int f_{sn}\, d\sigma}{\Delta S},$$

dabei ist ΔS ein beliebig gestaltetes dreidimensionales Volumen in dem ebenen Raum S senkrecht zur Richtung s, $d\sigma$ ist das Element der zweidimensionalen Begrenzung von ΔS, n die Richtung der Normalen auf $d\sigma$ im Raum S.

Es wäre für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie ebenso gut möglich, die Divergenz des Sechservektors durch den Grenzübergang zu definieren, der oben für die Definition

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. 32. S. 749. 1910.

2) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. § 5. Ann. d. Phys. 33. S. 649. 1910.

der Divergenz des symmetrischen Tensors verwendet wurde, also durch

$$\mathfrak{Div}_2 f = \lim_{\Delta\Sigma=0} \frac{\int f_{ik}\, dS}{\Delta\Sigma}.$$

Eine nähere Betrachtung, die hier jedoch nicht durchgeführt werden soll, zeigt nämlich, daß die durch die zweite Art des Grenzüberganges definierte Divergenz des Sechservektors mit der durch den ersten Grenzübergang definierten identisch ist, nicht nur für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie, sondern überhaupt im Riemannschen Raum von vier Dimensionen.[1]) Es ist dies jedoch nur für den antisymmetrischen Tensor der Fall. Für den symmetrischen Tensor 2. Ranges wäre durch die zweite Art des Grenzüberganges ein anderer Vierervektor definiert wie durch die erste Art. Oder die beiden Grenzübergänge würden angewandt auf den symmetrischen Tensor zwei verschiedene Differentialoperationen bedeuten.

Es gelten, wie schon erwähnt, die Formeln (13a, b, c) auch für den antisymmetrischen Tensor. Denn bei ihrer Ableitung für den symmetrischen Tensor wurde die Symmetrieeigenschaft der Komponenten $t^{ik} = t^{ki}$ nicht benützt. Wird nun andererseits berücksichtigt, daß für den antisymmetrischen Tensor $t^{ik} = -t^{ki}$, so führt dies in den Formeln (13a, b, c) zunächst zwar zu keiner Vereinfachung. Wird aber von den kovarianten Komponenten von $\mathfrak{Div}\, T$ zu den kontravarianten Komponenten übergangen, so ergibt die Umformung allgemein

$$\text{(13d)} \quad \mathfrak{Div}^i T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g}\, t^{lm}) + \sum_{lk} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} t^{lk} \sqrt{g} \right),$$

und hier fällt für den antisymmetrischen Tensor wegen der Symmetrie der Ausdrücke $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ bezüglich der Indizes i und k das zweite Glied der Gleichung weg, so daß allein bleibt

$$\mathfrak{Div}^i f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{lm} \frac{\partial (\sqrt{g}\, f^{lm})}{\partial x^m}.$$

---

1) Diese, sowie einige andere an das Thema dieser Abhandlung sich anschließenden Betrachtungen sind durchgeführt in der oben zitierten Dissertation des Verfassers.

§ 9. Definition der Divergenz des Tensors $n$ten Ranges.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß für den Tensor 2. Ranges die Invariante

$$\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

als Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren η und ζ zu betrachten ist.

Nun bilden die Komponenten des *Tensors $n$ten Ranges* zusammen mit den Produkten aus n Vektorkomponenten zur Form $n$ten Grades vereinigt eine Invariante:

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_n} t^{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \dots x_{i_n}.$$

Denn die Tatsache, daß diese Form eine Invariante ist, ist gleichbedeutend mit dem für die Komponenten des Tensors $n$ten Ranges geltenden Transformationsgesetz, wonach sich nämlich die Komponenten des Tensors $n$ten Ranges transformieren wie die Produkte aus n Vektorkomponenten.

Die für den Tensor 2. Ranges gewonnenen Ergebnisse legen es daher nahe, auch für den Tensor $n$ten Ranges die invariante Bildung

$$T_{s_1 s_2 \dots s_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} t^{i_1 i_2 \dots i_n} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_n} \tag{20}$$

als *Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren* η_{i_1}, η_{i_2}, ... *bis* η_{i_n} zu betrachten. Denn der Tensor $n$ten Ranges muß die Eigenschaft haben, daß sich für ihn eine Komponente nach n beliebigen Richtungen bestimmen läßt. Damit ist die Bedeutung der Komponentenbildung für sämtliche Tensoren, zu denen auch der Tensor 1. Ranges, der Vierervektor gehört, einheitlich festgelegt.

Hiernach kann aus dem Tensor $n$ten Ranges durch denselben Grenzübergang wie beim Tensor 2. Ranges ein Tensor $n-1$)ten Ranges, die Divergenz des Tensors $n$ten Ranges abgeleitet werden. Sie ist zu definieren durch

$$\mathfrak{Div}_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}} T = \lim_{\Delta \Sigma = 0} \frac{\int T_{s_1 s_2 \dots s_{n-1} N} \, d\mathcal{S}}{\Delta \Sigma}. \tag{21}$$

Dabei haben $\Delta \Sigma$ und $d\mathcal{S}$ die gleiche Bedeutung wie oben, N ist die Richtung der Normalen auf $d\mathcal{S}$. s_1, s_1 ... bis s_{n-1}

sind die n—1-Richtungen, die bei der Integration festzuhalten sind und nach denen die Komponente des Tensors $(n-1)$ten Ranges gebildet wird.

Auf den so entstandenen Tensor $(n-1)$ten Ranges läßt sich selbstverständlich wieder die Operation Div anwenden. Durch wiederholte Anwendung desselben Grenzüberganges läßt sich also aus einem Tensor $n$ten Ranges ein Tensor von entsprechend niedrigerem Range ableiten. Durch n-malige Anwendung der Operation Div kann insbesondere aus dem Tensor $n$ten Ranges ein Skalar gewonnen werden.

(Eingegangen 7. August 1919.)

5. *Über die Kohärenz in weitgeöffneten Bündeln;* *von Erwin Schrödinger.*

1. Einleitung.

Eine Reihe theoretischer Erwägungen[1]) sprechen dafür, daß wir uns die Aussendung von Licht vielleicht aus *gerichteten* Elementarprozessen zusammengesetzt zu denken haben, derart, daß bei jedem Emissionsakt nur in einen kleinen, eventuell sehr kleinen Raumwinkel gestrahlt wird. Wenn dem so ist, so sollte man glauben, daß das in den Kohärenzverhältnissen der von einem Volumelement eines Selbstleuchters ausgehenden Strahlung zutage treten müßte. Strahlen, welche unter großem Winkel gegeneinander ausgegangen sind, dürften, wenn man sie in geeigneter Weise, unter hinreichend kleinem, die Beobachtung von Fransen ermöglichendem Winkel kreuzt, nicht mehr interferieren. Obwohl nun die Undulationstheorie bekanntlich von jeher das Gegenteil angenommen hat, ohne mit den Tatsachen in Widerspruch zu geraten, scheint die Frage experimentell doch noch nicht genügend geklärt, wie z. B. aus folgender Bemerkung W. Feussens[2]) hervorgeht, die er an die Darstellung des Fresnelschen Dreispiegelversuches knüpft: „Fresnel macht noch die Bemerkung, daß man die Spiegel einander nähern müsse in dem Maße, als man den Einfall des Lichtes steiler nehme, und schreibt das dem Umstande zu, daß nur solche Strahlen als im Einklang schwingend angesehen werden könnten, welche unter sehr kleinem Winkel gegeneinander von der Lichtquelle ausgegangen seien. *Wir wissen hierüber noch nichts Bestimmtes* . . .“

Überlegt man, wie der Versuch anzustellen sei, so erkennt man sofort, daß die Abmessungen der Lichtquelle, mindestens nach zwei Dimensionen kein allzu großes Vielfaches der Wellenlänge sein dürfen, weil sonst die von den verschiedenen Ele-

1) Vgl. bes. A. Einstein, Phys. Zeitschr. 18. S. 121. 1917.

2) Artikel „Interferenz des Lichtes“ in Winkelmanns Handbuch, 2. Auflage, 6, S. 934. 1906.

menten der Lichtquelle erzeugten Fransensysteme nicht koinzidieren, sondern einander größtenteils zerstören, d. h. zu gleichmäßiger Helligkeit ergänzen. Derart kleine Lichtquellen werden nun in der experimentellen Optik sehr häufig benötigt, und zwar im wesentlichen stets aus dem eben angeführten Grunde. Sie werden fast immer verwirklicht durch sehr kleine Löcher oder Spalte in einem undurchsichtigen Schirm, den man von rückwärts beleuchtet. Die Kohärenz von Strahlen, die unter beträchtlichen Winkeln von solch einer kleinen Öffnung ausgehen, ist demnach schon in Tausenden optischer Versuche direkt oder indirekt festgestellt worden; ihr Bestehen — in dem bei den jeweiligen Dimensionen der Öffnung zu erwartenden Ausmaß — kann, glaube ich, über jeden Zweifel erhoben gelten.

Ebenso sicher ist, daß solche Versuche durchaus nichts über die „Gerichtetheit" oder „Kugelförmigkeit" der Elementarprozesse aussagen, sondern lediglich die Gültigkeit des Huyghens-Kirchhoffschen Prinzips für den Luftraum beweisen. Nach diesem ist die „Lichterregung" s_P in einem beliebigen Aufpunkt P diesseits des Schirmes gegeben durch ein über die freie Öffnung zu erstreckendes Oberflächenintegral

$$4\pi s_P = \int \left\{ \frac{\partial \frac{s(t-r/c)}{r}}{\partial r} - \cos(n\,r) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial s(t-r/c)}{\partial n} \right\} dO.$$

Wie nun auch immer $s(t)$ von der Stelle dO abhängen mag, jedenfalls wirkt dieses Element im Aufpunkt P wie ein Erregungszentrum mit der Schwingung

$$-\left[\left(\frac{s}{r}+\frac{s'}{c}\right)\cos(n\,r)+\frac{\partial s}{\partial n}\right],$$

also ganz ähnlich wie ein lichtaussendendes Molekül nach der klassischen Theorie.

Der Versuch, die Forderung nach *Kleinheit* der Lichtquelle durch *geometrisch-optische Verkleinerung* zu erfüllen, führt um keinen Schritt weiter. Man erreicht damit zwar, daß die Kohärenz bis zu viel größeren Winkeln erhalten bleibt, und bekanntlich macht man von diesem Prinzip zur Herstellung feiner Lichtpünktchen oder Lichtlinien für Interferenz- oder Beugungsversuche mit Vorteil Gebrauch. Aber wegen des Sinussatzes, der für punktwiese Abbildung von Flächenelementen erfüllt sein muß, haben die Strahlen, welche von

dem verkleinerten *Bild* unter jenem größeren Winkel ausgehen, das Original unter so viel kleinerem Winkel verlassen, daß für die in Rede stehende Frage die Zwischenschaltung des optischen Systems gerade genau überflüssig ist.

Es schien mir darum wünschenswert, auch einmal direkt die Interferenzfähigkeit von Strahlen zu prüfen, welche eine Lichtquelle von hinreichend kleinen *Original*dimensionen unter großen Winkeln verlassen haben. Unter geeigneten Bedingungen erhielt ich positive Resultate bis zu Winkeln von 50—60°. Erst nachträglich wurde mir bewußt, daß damit doch auch wieder ganz und gar nichts für oder gegen die Gerichtetheit des elementaren Emissionsaktes bewiesen ist, sondern wieder nur die Gültigkeit des Huyghens-Kirchhoffschen Prinzips für eine ganz im Luftraum gelegene, den Glühdraht eng umschließende Zylinderfläche. Solange nur die Wellengleichung für den Luftraum als gültig angesehen wird, sind, so glaube ich, der Grad der „Weitwinkelkohärenz" und die *Kleinheit des leuchtenden Querschnittes* für die durch die beiden Strahlen bestimmte Flächenrichtung ganz ebenso *wechselseitig* aneinander gebunden, ja die Aussagen über beide inhaltlich nicht verschieden, wie das bekanntlich für die von Michelson und von Fabry und Perot untersuchte *Kohärenz bei hohem Gangunterschied* und die *Monochromasie* der Lichtquelle zutrifft.

Wenn ich trotz dieser Skepsis an der Bedeutsamkeit der Versuche für die eingangs berührte Alternative doch kurz darüber berichte, so geschieht es einerseits, weil sie vielleicht an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürfen, andererseits, weil sie mir eben doch die einzige Möglichkeit einer direkten experimentellen Prüfung jener Hypothese zu bilden scheinen. Sollen die Elementarprozesse gerichtet sein, so muß das Huyghenssche Prinzip, wenn man zu immer kleineren und kleineren Dimensionen übergeht — schließlich jedenfalls für eine, das einzelne lichtaussendende Molekül umschließende Kugel — versagen. Daß bei den kleinsten herstellbaren Selbstleuchtern noch nichts dergleichen zu bemerken ist, ist deshalb vielleicht doch der einmaligen Feststellung wert.

2. Elementare Theorie der Versuche.

Die Lichtquellen waren elektrisch geglühte Drähte. Das zu prüfende „Strahlenpaar" wird durch zwei komplanare,

zum Glühdraht parallel und symmetrisch gelegene Spalte ausgeblendet und durch ein unmittelbar hinter der Spaltblende angebrachtes Objektiv unter kleinem Winkel, d. h. in beträchtlicher Entfernung gekreuzt. Untersucht wird mit einer Okularlupe die Lichtverteilung in der zum Glühdraht konjugierten Bildebene. Die Anordnung unterscheidet sich von jener, die Michelson zur Messung der Winkelgröße astronomischer Objekte ausgearbeitet hat[1]), nur durch die veränderten Dimensionen und dementsprechend veränderte Lage von Objekt und Bild, wodurch die — hier eben angestrebten — größeren Achsenwinkel beim Objekt bedingt werden. Die elementare Theorie, bei der wir das Objekt als ebenen leuchtenden Streifen ansehen und von der Beugungserscheinung an den Spaltblenden absehen wollen, ist kurz

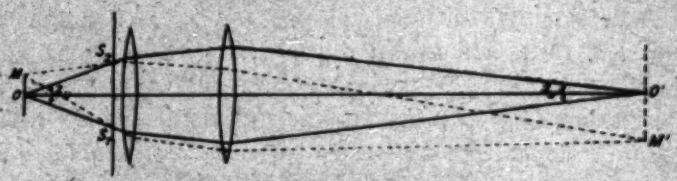


Fig. 1.

die folgende (vgl. Fig. 1, die einen horizontalen Querschnitt senkrecht zu der vertikalen Längsrichtung des Glühfadens und der Spalte darstellt). Die vom Achsenpunkt O der Lichtquelle unter $\sphericalangle S_1 O S_2 = 2u$ divergierenden Strahlen kommen im konjugierten Bildpunkt O' unter dem Winkel $2u'$ zum Schnitt. Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = V, \tag{1}$$

die Linearvergrößerung. Andererseits überlegt man leicht, daß zwei unter dem Winkel $2u'$ sich durchkreuzende Wellenzüge von der Wellenlänge λ ein zur Ebene der Wellennormalen senkrechtes Fransensystem mit sinusförmiger Intensitätsverteilung und der Halbfransenbreite (Abstand vom Maximum zum Minimum)

$$\delta = \frac{\lambda}{4 \sin u'} \tag{2}$$

erzeugen. Hier liegt ein Maximum natürlich bei O', da dorthin die optischen Wege gleich sind. — Ganz dieselbe Überlegung

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) **30**. S. 1. 1890; **31**. S. 256. 1891.

ist — und zwar wegen der Kleinheit der Querdimensionen von Objekt und Bild mit ungeändertem u und u' — auf den von O um $OM = y$ entfernten Punkt M der Lichtquelle anwendbar. Er erzeugt ein Fransensystem von gleichem δ, nur liegt das Hauptmaximum jetzt bei M'. Sei $O'M' = y'$, so ist

$$\frac{y'}{y} = V = \frac{\sin u}{\sin u'} \cdot \tag{3}$$

Die Fransen werden bei wachsender Objektbreite zum erstenmal verschwinden, sobald ein *Rand*element der (zur Achse symmetrisch gedachten) Lichtquelle sein Hauptmaximum auf das erste vom zentralen Element herrührende seitliche Minimum entwirft; denn dann ergänzen sich die Fransensysteme paarweise zu gleichförmiger Helligkeit. Die erforderliche *Halb*breite des Objekts, y, wird gegeben, indem wir δ aus (2) und y' aus (3) gleichsetzen:

$$\frac{\lambda}{4 \sin u'} = y \frac{\sin u}{\sin u'} \cdot \tag{4}$$

Die ganze Breite ist also

$$2y = \frac{\lambda}{2 \sin u} \cdot \tag{5}$$

(Daß man durch vorherige optische Verkleinerung in Wahrheit nichts gewinnt, erkennt man jetzt sofort, weil dabei $\sin u$ genau in demselben Maße vergrößert, wie y verkleinert wird.) — Wächst die Objektbreite noch weiter, so erscheinen die Fransen wieder, man kann sie erzeugt denken allein durch den über die Verschwindungsbreite (5) hinausragenden Teil des Objekts. Durch die überlagerte gleichförmige Erhellung sind sie natürlich undeutlicher. Für ganze Vielfache von $\lambda/2 \sin u$ verschwinden sie immer wieder völlig, dazwischen finden sich Deutlichkeitsmaxima von zusehends abnehmender Deutlichkeit. Michelson konnte so im Laboratorium mit weißem Licht, wo die Verschiedenheit der λs stört, bis zu 5, mit „rotem" Licht bis zu 8 Verschwindungen beobachten.

Wird nicht die Objektbreite, sondern der Spaltenabstand

$$S_1 S_2 = b$$

variiert, so ist, wenn a der Abstand vom Objekt zur Spaltebene

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{2a} \cdot$$

Die Fransen verschwinden, wenn die, jetzt feste, Objektbreite, sagen wir $2y_0$, ein ganzes Vielfaches von (5) ist:

$$2y_0 = \frac{n\lambda}{2\sin u},$$

also wenn

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg} u = \frac{b}{2a} = \frac{n\lambda/4y_0}{\sqrt{1 - n^2\lambda^2/16y_0^2}}.$$

Ist das Objekt viele Wellenlängen breit, so sind die ersten Verschwindungswinkel klein, die zugehörigen Spaltdistanzen bilden eine arithmetische Reihe

$$\text{(6')} \qquad b_n = \frac{n\lambda a}{2y_0}.$$

Später oder bei kleinem Objekt wachsen sie rascher.

Bisher wurden nur die in der einen Symmetrieebene der Anordnung (Papierebene der Fig. 1) gelegenen Objektpunkte

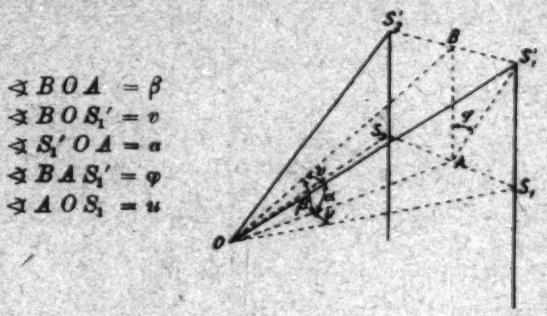


Fig. 2.

und nur der Strahlengang in dieser Ebene betrachtet. Was den ersten Umstand betrifft, so überlegt man leicht, daß die endliche Ausdehnung des Objekts senkrecht zu dieser Ebene nicht stört. Denn was eigentlich in der Bildebene $O'M'$ untersucht wird, sind die durch das optische System zur Deckung gebrachten (Fresnelschen) Beugungsbilder der beiden Spalte. Sind diese nur einigermaßen *lang* gegenüber der Breite des Einzelspalts, so sind die Querdimensionen (*senkrecht* zur Papierebene) des von jedem einzelnen Objektpunkt erzeugten Beugungsbildes verschwindend klein. Die Beugungsbilder *übereinander* gelegener Objektpunkte werden einander daher nicht stören. — Dagegen wird der *Strahlengang außerhalb der Papierebene* berücksichtigt werden müssen, sobald der Aperturwinkel u

nicht sehr klein ist. Es handelt sich im wesentlichen um die Frage nach der *zulässigen Länge der Spalte.*

Betrachten wir (vgl. die perspektivische Fig. 2) ein symmetrisches Strahlenpaar OS_1' und OS_2', dessen Ebene mit der früher betrachteten den Winkel β macht; v sei der halbe Strahlenwinkel, a der Achsenwinkel eines Strahles, φ der der Azimutwinkel zwischen den Ebenen, in denen β und a gemessen sind. Die entsprechenden Winkel im Bildraum seien v', a', β', während φ ungeändert bleibt. Aus einem sphärischen Dreieck im Bildraum folgt

$$\cos v' = \cos a' \cos \beta' + \sin a' \sin \beta' \cos \varphi .$$

Den Reziprokwert der Vergrößerung V wollen wir mit ε bezeichnen und als kleine Größe behandeln. Nach dem Sinussatz der geometrischen Optik ist

$$\sin a' = \varepsilon \sin a , \qquad \sin \beta' = \varepsilon \sin \beta ,$$

also mit Vernachlässigung von ε^4

$$\cos v' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(\sin^2 a + \sin^2 \beta) + \varepsilon^2 \sin a \sin \beta \cos \varphi .$$

v' ist also, natürlich, ebenfalls klein und man hat

(7) $$\sin^2 v' = \varepsilon^2 (\sin^2 a + \sin^2 \beta - 2 \sin a \sin \beta \cos \varphi) .$$

Aus dem konjugierten sphärischen Dreieck des Objektraumes, das bei B einen rechten Winkel hat, folgt

$$\cos \varphi = \sin (B S_1' A) \cdot \cos v ; \quad \sin (B S_1' A) = \frac{\sin \beta}{\sin a} ,$$

mithin

(8) $$\sin a \cos \varphi = \sin \beta \cos v ,$$

ferner

(9) $$\cos a = \cos v \cos \beta ; \quad \sin^2 a = 1 - \cos^2 v \cos^2 \beta .$$

(8) und (9) in (7) eingesetzt und vereinfacht:

(10) $$\sin^2 v' = \varepsilon^2 [\sin^2 v + \sin^2 \beta (1 - \cos v)^2] .$$

Dies ist der Zusammenhang zwischen den Halbwinkeln des betrachteten Strahlenpaares im Objekt- und im Bildraum. Das von ihnen allein erzeugte Fransensystem kann, wegen der Kleinheit von β', mit dem früheren als komplanar, natürlich auch als parallel, die Mittelstreifen als koinzidierend gelten.

Seine Halbfransenbreite, $\underline{\delta}$, ist, analog zu (2), durch $\sin v'$ bestimmt:

$$\underline{\delta} = \frac{\lambda}{4 \sin v'} .$$

Obwohl nun die beiden, bzw. die unendlich vielen, für alle möglichen Winkel β erzeugten Frontensysteme nicht einfach ihre Intensitäten superponieren (da Kohärenz besteht), wird es doch hinreichend und wohl auch notwendig sein, zu verlangen, daß auch für das größte auftretende β noch merklich $\underline{\delta} = \delta$. Dabei werden 10—20% Abweichung die Sichtbarkeit der Fransen in der Mitte des Bildes noch nicht völlig zerstören. — Man wird also verlangen, daß $\sin v'$ merklich gleich $\sin u'$, d. h. wegen (10) und $\sin u' = \varepsilon \sin u$, daß

$$\sin^2 v + \sin^2 \beta \, (1 - \cos v)^2 \simeq \sin^2 u \tag{11}$$

sei. Der Zusammenhang zwischen u und v ist aber offenbar

$$\sin 2v = \sin 2u \cos \beta . \tag{12}$$

Aus (11) und (12) kann man sich ungefähr ein Bild machen von der zulässigen Größe von β. $\beta = u$, d. h. eine Länge der Spalten gleich ihrem Abstand voneinander dürfte selbst für $u = 30^0$ noch erlaubt sein. Die linke Seite von (11) bekommt dann den Wert 0,173 (= 0,171 + 0,002), die rechte 0,25. Der Unterschied von 30—40% überträgt sich auf die δ nur mit 15—20%. Das wird die Sichtbarkeit in der Mitte noch nicht aufheben.

Über die Modifikationen, welche die oben erörterten Verschwindungsbedingungen in diesem Falle jedenfalls erfahren, könnte nur eine genauere Durchrechnung der Interferenzerscheinung Aufschluß geben. Ich unterlasse sie, weil sie für das Folgende ohne Bedeutung ist, und weil man dann auch die wahre Form des Objekts (Zylinder, nicht ebener Streifen), ferner etwas wie das Lambertsche Kosinusgesetz in Betracht ziehen müßte — für Interferenzrechnungen eine heikle, auch vom Standpunkte der klassischen Theorie durchaus nicht völlig klarliegende Sache.

3. Versuche mit Photoobjektiven und Wolframdrähten.

Die ersten Versuche wurden mit gewöhnlichen Metallfadenlampen, dann mit einer einfadigen Glühlampe angestellt,

aus dem dünnsten technisch verwendeten Wolframdraht, welchen die Firma Westinghouse gütigst für mich herstellen ließ. Die Spalte, aus schwarzem Papier, 0,44 mm breit, 24 mm lang, waren auf den Gleitstücken eines kleinen Längenkomparators montiert und mit Rechts- und Linksschnecke symmetrisch verschiebbar. Sie konnten einander auf 6 mm genähert werden, beim Öffnen wurde der Zwischenraum durch eine bewegliche Nase aus schwarzem Papier abgedeckt. Um die Verschiebung mit der Hand regieren zu können, ließ ich den Strahlengang an einem guten kleinen Metallspiegel reflektieren, so daß der Beobachter mit der Lupe neben den Spalten zu sitzen kommt.

Hat man den Glühdraht annähernd in die richtige Lage gebracht, so sieht man in der Pointierungsebene der Lupe die verwaschenen Beugungsbilder der beiden Spalte. Die genaue Einstellung wird durch vollständiges Zusammenlegen der beiden Hauptmaxima herbeigeführt, am genauesten bei möglichst großer Spaltendistanz b. Schiebt man die Spalte dann wieder ganz zusammen, so bemerkt man eine sehr deutliche Längsstreifung des Hauptmaximums. Bei Vergrößerung von b entspricht die Erscheinung durchaus der Erwartung. Die Breite der Fransen nimmt ab, ihre Deutlichkeit zeigt periodische Schwankungen, Maxima, die durch Stellen fast völligen Verschwindens getrennt sind. Sofern die Öffnung des Objektivs ausreicht, lassen sich drei bis vier dieser Verschwindungsstellen noch mit leidlicher Schärfe einstellen, wenn sich auch die wiedererscheinenden Fransen immer mehr auf die Mitte des Beugungsbildes beschränken. Darüber hinaus wird die Einstellung auf das Verschwinden unscharf, weil die Fransen in einem größeren b-Intervall unsichtbar werden. Spuren von Interferenz konnten, als ganz zarte, nur an einzelnen Stellen sichtbare Maserung, noch bis über die fünfte Verschwindungsstelle hinaus entdeckt werden.

Solange sie noch deutlicher sind, tritt die Polychromie der Fransen klar hervor, auch lassen sie sich in bekannter Weise spektral zerlegen, indem man sie quer auf den Spalt eines kleinen Handspektroskops auffallen läßt. Man sieht darin dann die bekannten, gegen Rot bukettartig divergierenden Längsstreifen. Für die Beobachtung fand ich jedoch die lichtstärkere Erscheinung im unzerlegten Licht günstiger.

Lediglich zur Illustration lasse ich einige Messungsreihen

an verschiedenen Drähten und mit verschiedenen Objektiven folgen. In der letzten Spalte sind aus den b_n die Drahtdicken berechnet, wobei für die Wellenlänge rund 0,6 μ angenommen ist.

Tabelle 1.

Distanz Spaltebene—Bildebene = 6,1 m.

Ordnungszahl n	Verschwindungsstelle b_n (cm)	$b_n/2a = \operatorname{tg} u_n$ ($= \sin u_n$)	u_n	Berechnete Drahtdicke $n\lambda/2\sin u_n$ in μ	Lichtquelle und Optik; Objektweite
1	0,73	0,0051	0° 17′5	58,4	Metallfadenlampe 50 K, 110 V; Zeiss Protarlinse $f = 59$ cm $a = 71$ cm
2	1,51	0,0106	0° 37′	56,4	
3	2,29	0,0161	0° 55′	55,8	
4	3,03	0,0213	1° 13′	56,2	
2	0,64	0,0112	0° 39′	53,4	Dieselbe Lampe; zwei Protarlinsen $f = 59$ cm und $f = 48$ cm; $a = 28{,}5$ cm
3	0,96	0,0168	0° 58′	53,4	
1	1,35	0,0095	0° 33′	31,6	Metallfadenlampe 25 K, 110 V; Zeiss Protarlinse $f = 59$ cm; $a = 71$ cm
2	2,79	0,0196	1° 8′	30,5	
2	1,06	0,0186	1° 4′	32,3	Dieselbe Lampe; zwei Protarlinsen, $f = 59$ cm und $f = 48$ cm; $a = 28{,}5$ cm
3	1,64	0,0288	1° 39′	31,3	
	1,01	0,0177	1° 1′	16,9	Einfadenlampe; dieselbe Optik; $a = 28{,}5$ cm
2	2,11	0,0370	2° 7′	16,2	
1	2,60	0,0183	1° 3′	16,4	Einfadenlampe; Protar $f = 59$ cm; $a = 71{,}2$ cm
1	0,76	0,0188	1° 5′	16,0	Einfadenlampe; Petzval-Porträtobjektiv, $f = 28{,}9$ cm; $a = 20{,}2$ cm
2	1,52	0,0376	2° 9′	16,0	
3	2,30	0,0570	3° 16′	15,8	

Nachherige direkte Ausmessung im Mikroskop ergab für die, nicht sehr gleichmäßige, Dicke der Drähte folgende Werte:

	Mikroskopisch	Interferometrisch
50-Kerzenlampe	51—58 μ	55,6 μ
25-Kerzenlampe	29—30 μ	31,4 μ
Einfadenlampe	14,5—16 μ	16,2 μ

Die Übereinstimmung ist, in Anbetracht der unsicheren Annahme über die Wellenlänge, befriedigend; übrigens sind die Abweichungen nach Vorzeichen und Größenordnung durch die Wärmeausdehnung erklärbar.

Wie erwähnt, finden sich Spuren von Kohärenz auch noch bis zu größeren Winkeln u. Den größten Wert erreichte ich mit der Einfadenlampe[1]) und dem Petzvalobjektiv mit $a = 20{,}4$ cm, $b = 4{,}6$ cm; das entspricht $u = 6^0\,26'$, $2u = 12^0\,52'$ und dürfte schon mehr sein, als durch bisher vorliegende Interferenzversuche für Selbstleuchter sichergestellt ist.

4. Die mikroskopische Anordnung.

Die Hauptursache für das Verschwinden der Fransen bei größeren Winkeln ist ohne Zweifel die übergelagerte gleichförmige Erhellung, welche den immer mehr abnehmenden Helligkeitsunterschied zwischen Maximis und Minimis schließlich verdeckt. Um zu größeren Winkeln vorzudringen, mußten also dünnere Drähte und, wenn das gelingt, abbildende Systeme von größerer Apertur benutzt werden (das Petzvalobjektiv hatte etwa 2×8^0 Öffnung, die Protare noch weniger).

Der Versuch, Wollaston-Platindrähte von 2—4 μ Dicke in einer zu diesem Zweck von der Firma Westinghouse freundlichst für mich hergestellten Lampe zum Glühen zu bringen, mißlang im Vakuum völlig; ich glaube wegen der ungleichmäßigen Dicke der Drähte, die beim Mangel jeglichen Wärmeaustausches an einer zufällig besonders dünn geratenen Stelle durchschmelzen, bevor noch ein größeres Stück ins Glühen kommt. In freier Luft dagegen gelingt es leicht, von einem 2—3 mm langen Stückchen *eine* Stelle (Bruchteile eines Millimeters) zu mäßiger Rotglut zu erhitzen und darin längere Zeit zu erhalten. Die Stelle, die ins Glühen kommt, ist offenbar die dünnste, was für unseren Zweck günstig ist. Die anzulegende Spannung ist etwa 3—5 Volt für 2 mm Gesamtlänge. Mit der Zeit scheint der Glühdraht zu zerstäuben. Das Glühen wird immer intensiver und zieht sich auf die Mitte zusammen, man muß mehr Widerstand vorschalten, um den Draht zu erhalten. Zum Schluß entsteht ein einziges, intensiv leuchtendes Pünktchen, wohl das Ideal einer punktförmigen Lichtquelle, das sich aber leider nur kurze Zeit erhalten läßt; dann schmilzt der Draht an dieser Stelle durch. Bei starker Vergrößerung im Mikroskop erweisen sich die Enden kegelförmig verjüngt gegen die Rißstelle zu.

1) Ein anderes Exemplar, für welches die b_n um eine Kleinigkeit größer waren!

Für die Untersuchung in der früher benutzten Anordnung sind die Drähtchen zu lichtschwach — außer etwa im letzten Stadium, das aber viel zu labil ist, um Messungen daran auszuführen. Dagegen drängt sich, da man jetzt mit dem abbildenden System beliebig nahe heran kann, von selbst die Verwendung eines Mikroskopobjektivs auf. Man erzeugt das Streifensystem in der normalen Bildebene und verwendet als Lupe ein passendes Mikroskopokular.

Das anfängliche Bedenken, daß bei der außerordentlich verminderten Bildweite — von 6 m auf etwa 16 cm — die Fransen zu eng werden, erweist sich als unbegründet. Aus theoretischen Gründen muß die *maximale nutzbare Gesamtvergrößerung*, welche zur *numerischen Apertur* $\sin u$ gehört, eben hinreichen, um die Fransen für das Auge zu trennen. Denn nach (1) und (2) ist die Fransenbreite 2δ (Abstand von Maximum zu Maximum)

$$2\delta = \frac{\lambda}{2 \sin u} V,$$

wo V die Objektivvergrößerung. Mit einem beliebigen Okular erscheint also der Abstand der hellen Fransen dem Auge so groß, wie bei gewöhnlicher Verwendungsweise desselben Systems ein Objekt von der Länge $\lambda/2 \sin u$. Das ist aber gerade jene Länge[1]), die von der Apertur $\sin u$ eben noch aufgelöst wird und die die Vergrößerung für das Auge trennen, d. h. auf einen Sehwinkel von 2′ bringen muß, um die Auflösungskraft eben auszunützen. Eine solche Vergrößerung reicht dann auch eben hin zur Trennung der Fransen. Für die Fransen handelt es sich aber dabei natürlich um einen *Minimal*wert; eine stärkere Vergrößerung kann förderlich und wird nötig sein, wenn man z. B. die Lichtverteilung zwischen den Fransen untersuchen wollte. Auch wird man damit rechnen müssen, daß in Wahrheit schon zur deutlichen Sichtbarkeit vielleicht doch etwas mehr als die eben erreichte Trennung benachbarter Maxima nötig sein wird. — Nachstehende kleine Tabelle gibt für kleine und mittlere Aperturen die theoretischen Minimalvergrößerungen ($\lambda = 0{,}6\,\mu$):

$u =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\sin u =$	0,0872	0,1737	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428
Vergr. =	42	84	125	165	208	242	277	310

1) Vgl. z. B. P. Drude, Optik, 2. Aufl., S. 85.

Im einzelnen war die Ausführung diese:

1. *Die Drähte.* An einem auf den Mikroskoptisch passenden Träger wurden in 8 mm Abstand zwei kupferne Zuleitungsdrähte parallel montiert, ihre Enden unter 45° bis auf etwa 3 mm Abstand gegeneinandergebogen. Zwischen ihnen wird in kurzem Bogen ein Stückchen Wollastondraht — natürlich *vor* dem Abätzen — eingelötet. Das Abätzen geschah nach dem Verfahren von Benedicks[1]) in heißer konzentrierter Säure, und zwar wird nur der mittlere Teil des Bogens eingesenkt, so daß die Silberhülle an den Enden erhalten bleibt. Die ganze Prozedur dauert kaum 20 Minuten und gelingt fast immer. Verwendet wurden, nach Angabe auf den Spulen, 2 μ- und 4 μ-Drähte, meistens die letzteren. Aus den oben angeführten Gründen ist die Glühstelle stets noch dünner als dieser Mittelwert.

2. *Die Spalte.* Sie wurden aus Stanniol anfangs aus freier Hand mit dem Taschenmesser geschnitten, später auf der Teilmaschine mit einer Giletteklinge. Man erhält so sehr schöne Spalte mit vollkommen geraden Rändern und den Spaltenabstand bis auf einige Hundertstel Millimeter nach Wunsch. Ein einziger Schnitt gibt auf Glasunterlage recht gleichmäßig Spaltenbreiten von 0,02—0,08 mm, größere Breiten erreicht man durch zwei parallele Schnitte und vorsichtige Entfernung des Mittelstreifens. Sodann wird das Stanniol auf ein dünnes Deckgläschen gekleistert — natürlich unter Aussparung der Mitte — dieses selbst auf einen passenden Korkring, mit dem es sich auf das Objektiv unter leichter Reibung aufschieben läßt, bis zur Berührung des Deckgläschens mit der Objektivfassung. Die genaue Zentrierung kann durch leichte seitliche Verdrehung des locker sitzenden Korkringes bewirkt werden, während man durch das Okular auf die erleuchteten Spalte blickt.

3. *Messung der Abstände.* Einige Schwierigkeit macht die Messung des Abstandes a (Objekt — Spaltebene), wenn er klein ist. Für größere a (mehrere Millimeter) genügt ein seitlich aufgestelltes Mikrometerfernrohr, aber bei kleinem a verursacht die unsichere Erfassung der Spaltebene von der Seite her zu große prozentuelle Fehler. In diesen Fällen

1) C. Benedicks, Phys. Zeitschr. 17. S. 319. 1916.

wurde aus Stanniol ein Fensterchen mit einem Querbalken geschnitten und in genau derselben Weise, wie sonst der Doppelspalt, auf das Objektiv aufgeschoben. Das Fensterchen läßt das Objektiv frei, bis auf den Querbalken, der die Güte der Abbildung kaum beeinträchtigt. Nun wird ein durchscheinend versilberter Außenspiegel auf den Objekttisch gelegt und einmal auf das Spiegelbild des Stanniolstreifens, dann — durch mikrometrisches Heben des ganzen Tubus — auf die Kratzer im Spiegel scharf eingestellt. Die Höhendifferenz ist offenbar die Hälfte der gesuchten Distanz.

5. Beschreibung der Mikroversuche.

Da die Spaltblenden nur einen kleinen Bruchteil des Objektivs freilassen und das wenige Licht, das eindringt, nicht zu einem scharfen Bilde vereinigt, sondern auf die breiten Beugungsfiguren der beiden Spalte verteilt wird, ist die Erscheinung äußerst lichtschwach und man muß das Zimmer gut abdunkeln und das Auge einige Zeit lang an die Dunkelheit gewöhnen, um überhaupt etwas zu sehen. Bei den stärkeren Vergrößerungen, die wegen der kleineren Objektdistanz und Spaltendistanz auch eine Verringerung der Spaltbreite nötig machen, ist eine leichte Überlastung des Drahtes nötig, der selten mehr als einen Versuch überlebt.

Da das glühende Drahtstückchen in der Regel nicht genau senkrecht zur optischen Achse steht, sieht man zwei Bilder, die sich an jener Stelle, auf die genau eingestellt ist, durchkreuzen. Es sind, wie gesagt, nicht scharfe Bilder des Drahtes, sondern die breiten Mittelmaxima der Beugungsfiguren von den beiden Spalten, wie sie, von den einzelnen Punkten des Drahtes erzeugt, sich zu zwei breiten, verwaschenen, der Form des Drahtes ähnlichen Lichtbändern zusammensetzen. In der Tat sieht man bei hellerer Glut jedes Band beiderseits von vielen schmäleren, lichtärmeren parallelen Bändern, den sekundären Maximis, begleitet. (Dreht man die Spalte, die natürlich dem glühenden Stück möglichst genau parallel orientiert sind, um 90°, so sieht man nur mehr *ein* viel schmäleres und schärferes *Bild* des Drahtes.) — Die uns interessierende Interferenzerscheinung, die von dem Zusammenwirken der beiden Spalte herrührt, erscheint als eine ungemein zarte, feine und scheinbar scharfe Längsstreifung im

Inneren der zentralen Maxima, *dort, wo sie sich durchkreuzen*; oder, wenn das Drahtstück zur Achse genau senkrecht steht, so daß es gelingt, die Maxima längs dieses ganzen Stückes zusammenzulegen, dann läuft auch die Streifung diesem ganzen Stück entlang. Bei größeren Winkeln, etwa von $u = 8—10^0$ aufwärts, bemerkt man die Erscheinung gewöhnlich nicht sofort; es kommt vor, daß man recht lange hinter dem Apparat sitzt, am Regulierwiderstand und an der Mikrometereinstellung herumtastet, ohne sie zu finden. Plötzlich wird man sie gewahr, meist dann, wenn man sich entschließt, den Draht doch ein wenig zu überlasten. Das anfangs vergebliche Suchen — bei vollkommen deutlicher Sichtbarkeit der beiden Lichtbänder — mag zum Teil in dem verminderten angularen Unterscheidungsvermögen des Auges bei Dunkeladaptation begründet sein. Daß man sich unterhalb der Schwelle des Tagessehens befindet, erkennt man in diesen Fällen in der Tat an der Farblosigkeit des Bildes („Grauglut") und an den Schwierigkeiten der Fixation. Sicherlich spielt aber auch die Verminderung der Drahtdicke durch allmähliches Zerstäuben eine Rolle. Bei den Weitwinkelversuchen, etwa von 20^0 aufwärts, konnte ich die Streifung fast immer erst im letzten Stadium entdecken, wenn der Draht — bei großer Helligkeit an einer Stelle — schon nahe am Druchschmelzen war. Sie erstreckt sich dann nicht über die ganze Breite des Bandes, sondern ist auf die Mitte beschränkt. Auch muß man schon vorher das Stück absuchen und sich die hellste, daher dünnste Stelle auswählen, wo der Riß erfolgen wird. Diese ist dann hervorragend geeignet, um im letzten Stadium die Streifung in voller Deutlichkeit zu zeigen.

In Anbetracht dieser Schwierigkeiten war eine systematische Untersuchung der *Streifendeutlichkeit* bei stufenweiser Änderung der Spaltendistanz b nicht recht ausführbar; jedenfalls nicht ohne ein Mikrospaltenpaar mit mikrometrisch variierbarem Abstand, das ich bis jetzt nicht beschaffen konnte. Ich habe mich darum begnügt, für möglichst große Winkel u die Sichtbarkeit der Interferenzen festzustellen, ohne natürlich behaupten zu wollen, daß ich die obere Grenze erreicht hätte. Meiner Ansicht nach gibt es eine solche Grenze überhaupt nur für bestimmte Objektgröße und in Korrelation zur Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für Helligkeiten. — Nach-

folgend stelle ich die Bedingungen zusammen, unter denen *die von dem Zusammenwirken der beiden Strahlenbündel erzeugte Interferenzerscheinung mit Sicherheit konstatiert werden konnte.* Gesamtvergrößerung und Objektabstand a gelten für normalen Tubusauszug von 160 mm.

Tabelle 2.

Objektiv	N.A.	Okular	Vergr.	b (mm)	a (mm)	Spaltbreite (mm)	$b/2a = \operatorname{tg} u$	u
Zeiss, Achromat „A“	0,20	Kompens. 2	30	0,51	8,1	ca. 0,02	0,0315	1° 50′
do.	0,20	Huyghens 2	55	1,30	8,1	0,18	0,802	4° 40′
do.	0,20	„ 4	90	1,59	8,1	0,25	0,0981	5° 40′
do.	0,20	„ 4	90	2,41	8,1	0,19	0,149	8° 30′
do.	0,20	„ 4	90	2,79	8,1	0,27	0,172	9° 50′
Zeiss, Apochr. 16 mm	0,30	„ 2	60	1,29	4,7	0,18	0,137	7° 50′
do.	0,30	„ 4	100	1,70	4,7	0,19	0,181	10° 20′
Leitz, Wetzlar, Nr. 4	ca. 0,5	„ 4	170	1,25	1,86	0,18	0,336	18° 30′
do.	ca. 0,5	„ 4	170	1,58	1,86	0,18	0,425	23° 0′
do.	ca. 0,5	Reichert 12	300	1,79	1,86	0,18	0,481	25° 40′
Zeiss, Apochr. 8 mm	0,65	„ 12	330	0,51	0,62	ca. 0,02	0,411	22° 20′
do.	0,65	Kompens 18	485	0,62	0,62	ca. 0,02	0,500	26° 30′
do.	0.65	„ 18	485	0,68	0,62	0,03	0,548	28° 40′

Als Okular ist immer das schwächste angegeben, das zur Trennung der Fransen für das Auge eben noch hinreicht. Die Okularvergrößerungen sind ungefähr:

Kompens. 2	H. Nr. 2	H. Nr. 4	R. Nr. 12	Komp. 18
2	4	7	10—11	16

Die Gesamtvergrößerung liegt, wie zu erwarten, fast durchwegs zwischen dem Einfachen und Doppelten des früher angegebenen Minimalwertes.

Die Länge des Spaltenpaares war im allgemeinen nicht beschränkt, sie lief über das ganze Objektiv; für den früher mit a bezeichneten Winkel bildet dann die obere Grenze der Aperturwinkel. Nur bei den Versuchen mit Apochromat 8 mm wurde eine Beschränkung der Spalthöhe durch einen breiten Stanniolschlitz auf etwa 0,3 mm versucht und vorteilhaft befunden.

Über die wirkliche Dicke der zum Versuch dienenden Drahtstelle läßt sich aus den oben angeführten Gründen nichts ausmachen; die der Rißstelle benachbarten Teile schätze ich

nach wiederholter Inspektion mit einem Okularmikrometer auf 1—2 μ ($^1/_3$ bis $^2/_3$ partes, wobei 1 pars = 0,0027 mm). Dem würde ein erstes Verschwinden der Fransen bei $\sin u = 0{,}8—0{,}15$, $u = 9^0—17^0$ entsprechen.

6. Schlußbemerkung.

Schon in der Einleitung wurde hervorgehoben, daß die mitgeteilten Versuche für die Frage nach der Beschaffenheit des elementaren Emissionsaktes leider doch nicht mehr beweisen dürften, als die Gültigkeit des Huyghensschen Prinzips im Luftraum. Wenn sich das Feld im Außenraum in der bekannten Weise durch Integration über die Randwerte auf einer den Draht umhüllenden Zylinderfläche berechnen läßt, dann besteht, wie immer die Elementarprozesse beschaffen sein mögen, die Funktion der Lichtquelle, mathematisch gesprochen, nur in der Vorgabe jener Randwerte. Und wenn nur *entweder* die Randwerte der Bedingung genügen, daß bei der zeitlichen Fourierzerlegung des Feldes im Außenraum bloß Glieder eines bestimmten, nicht zu großen Frequenzbereiches auftreten, *oder* aber das perzipierende Organ bloß auf diesen Frequenzbereich anspricht: dann ist, glaube ich, die Zunahme des Grenzwinkels merkbarer Kohärenz mit abnehmendem Zylinderradius eine rein mathematische Folgerung.

Übrigens läßt auch eine *thermodynamische* Erwägung — in Verbindung mit den nicht zu bezweifelnden Gesetzen der *Beugung* an Hindernissen von der Größenordnung der Wellenlänge — den positiven Ausfall unseres Interferenzversuches vorhersehen; und zwar nach dem schönen Abbildungssatz, den M. v. Laue vor einigen Jahren bewiesen hat.[1])

Bringen wir unseren Draht, kalt, in eine Hohlraumstrahlung, so läßt sich seine Wirkung als „Hindernis" bekanntlich so auffassen, daß für jede der ebenen Sinuswellen, in welche sich die Hohlraumstrahlung, rein mathematisch, auflösen läßt, eine Reihe von Sekundärwellen von ihm ausgeht, deren Intensität zwar nicht von der Richtung unabhängig, aber doch — wenn der Drahtradius mit der Wellenlänge vergleichbar — für einen großen Winkelbereich von derselben Größenordnung ist. Diese Sekundärwellen nun *würden* in

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 48. S. 165. 1914.

unserem Spaltinterferometer ein Fransensystem erzeugen, das sich freilich, bei wirklich allseitiger Beleuchtung, wegen der relativ großen allgemeinen Helligkeit der Beobachtung entziehen dürfte. (Wenn man einen geeigneten Teil der beleuchtenden Bündel wegläßt — bei „Dunkelfeldbeleuchtung" — würden sie beobachtbar sein). — Bringt man jetzt auch den Draht selbst, und zwar bei derselben Temperatur, zum Glühen, so müssen die Fransen verschwinden, weil das Instrument nun in einen gleichtemperierten Hohlraum hineingerichtet ist. Da aber zwischen der Sekundärstrahlung und der Glühstrahlung des Drahtes sicher *keine* Kohärenz bestehen kann, muß die Glühstrahlung für sich allein ein dem früheren *komplementäres* Fransensystem erzeugen.

(Eingegangen August 1919.)

6. *Über die elektrische Natur der Kohäsionskräfte fester Körper;*
von M. Born.

Die elastische Kompressibilität der Halogensalze einwertiger Metalle kann durch die Annahme[1]) erklärt werden, daß sich die Ionen entsprechend ihren Ladungen nach dem Coulombschen Gesetze anziehen oder abstoßen und daß außerdem zwischen je zwei Ionen eine Abstoßungskraft wirkt, deren Potential der neunten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Im folgenden soll dieser Ansatz weitergeführt werden. Die Aufgabe ist die, alle übrigen physikalischen Eigenschaften solcher Kristalle aus der genannten Hypothese über die Molekularkräfte abzuleiten. Wenn dies gelingt, so bedeutet es einen Schritt in der Richtung der elektrischen Auffassung der Materie.

Als Material kommen vorläufig nur die schon früher benutzten binären Halogensalze vom Typus NaCl in Betracht, weil sie die reinste Form heteropolarer Verbindungen darstellen; nur bei solchen kann man erwarten, daß sich die Atomkräfte elektrostatisch (ohne Quantentheorie) auffassen lassen, wie Kossel[2]) an dem Beispiel der chemischen Bindung überzeugend nachgewiesen hat.

Leider ist die Anzahl der physikalischen Konstanten, die man berechnen kann, nicht groß. Bei regulären Kristallen hat man die folgenden[3]):

1. eine langwellige ultrarote Eigenfrequenz ω (Reststrahl);
2. den Beitrag dieser ultraroten Schwingung zur Dielektrizitätskonstante, $\varepsilon - \varepsilon_0$;

1) M. Born und A. Landé, Verh. d. D. Phys. Ges., **20**. S. 210. 1918.
2) W. Kossel, Ann. d. Phys. **49**. S. 229. 1916.
3) Vgl. M. Born, Phys. Ztschr. **19**. S. 539. 1918.

3. drei Elastizitätskonstanten[1]) c_{11}, c_{12}, c_{44} (wobei c_{11} oder c_{12} durch die Kompressibilität $\varkappa$ ersetzt werden können);
4. bei azentrischen Kristallen eine Konstante e_{14} der polaren Piezoelektrizität.

Dazu kämen noch die auch bei zentrischen Kristallen auftretende tensorielle Piezoelektrizität[2]), die aber quantitativ noch nicht genügend erforscht ist, sowie sämtliche Vorgänge, die mit Temperaturänderung verknüpft sind, also die thermische Ausdehnung, die Temperaturkoeffizienten der unter 1., 2., 3., 4. genannten Konstanten, die Pyroelektrizität usw.; doch müssen diese noch außer Betracht bleiben, weil die Theorie der Zustandsgleichung der Kristallgitter nicht weit genug entwickelt ist.[3])

Da das unserm Ansatze zugrunde liegende Gitter vom Typus des NaCl zentrisch symmetrisch ist, kommen nur die unter 1., 2., 3. genannten Konstanten ω, $\varepsilon - \varepsilon_0$, c_{11}, c_{12}, c_{44} in Frage. Aber es sind noch weitere Einschränkungen notwendig. Wie a. a. O.[4]) gezeigt worden ist, bestehen unter der Voraussetzung, daß die Atome punktförmige Kraftzentren sind, bei zweiatomigen Gittern mit Symmetriezentrum zwei Relationen zwischen diesen fünf Größen, nämlich

$$c_{12} = c_{44}, \quad (\varepsilon - \varepsilon_0)\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\Delta},$$

wo e die Ladung der Ionen, m_1, m_2 ihre Massen und Δ das Volumen der Gitterzelle ist, die ein Atom jeder Art enthält.

Die erste ist die sogenannte Cauchysche Relation; sie ist, wie Voigt[5]) nachgewiesen hat, für den in unsere Klasse gehörigen Kristall KCl (Sylvin) nicht erfüllt. Das muß daran liegen, daß die Atome ausgedehnte Gebilde sind, die sich

---

1) Wir benutzen die Bezeichnungen von W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, B. G. Teubner 1910. Vgl. insbesondere Kap. VII, § 371, S. 738 und § 372, S. 741.

2) Vgl. W. Voigt, Phys. Ztschr. 17. S. 287 und 307, 1916; 18. S. 59. 1917.

3) Für quantitative Schlüsse, wie sie hier angestrebt werden, genügen die Theorien von Mie, Grüneisen und Debye nicht; ich behalte mir vor, die nötigen Ergänzungen demnächst mitzuteilen.

4) Vgl. die S. 87, Anm. 3 zitierte Abhandlung.

5) W. Voigt, Kristallphysik (vgl. Anm. 1), § 372, S. 744.

drehen und deformieren.[1]) Man kann leicht einsehen, daß diese Drehungen oder Deformationen wesentlich den Wert von c_{44} beeinflussen, während c_{11} und c_{12} nicht so stark davon betroffen werden. Daher werden wir c_{44} aus unseren Betrachtungen ausschließen.

Die zweite Relation ist zuerst von Dehlinger[2]) aufgestellt und dann von mir[3]) unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen worden. Für die Halogensalze der Alkalimetalle bewährt sie sich einigermaßen, für die Halogensalze von Thallium und Silber aber versagt sie vollständig.[4]) Woran das liegen mag, wird im folgenden (S. 102, 103) erörtert werden. Jedenfalls scheidet die Größe $\varepsilon - \varepsilon_0$ für die hier verfolgte Absicht aus.

Unser Ziel ist daher, die Frequenz ω des Reststrahls und die Elastizitätskonstanten c_{11} und c_{12} (oder statt dessen $\varkappa$) aus der eingangs genannten Hypothese über die Atomkräfte zu berechnen.

Ehe man daran geht, muß man sich klar machen, wie weit man überhaupt eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erwarten darf. Die Daten, aus denen die drei Größen ω, c_{11}, c_{12} berechnet werden sollen, sind:

1. die Massen m_1 und m_2 der beiden Atome,
2. das elektrische Elementarquantum ε,
3. die Gitterkonstante δ.

Dazu kommt noch der Exponent n des Abstoßungsterms br^{-n} der potentiellen Energie; nach unseren früheren Ergeb-

---

1) W. Voigt (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918) vertritt die Anschauung, daß es genügt, die Atome als starre Körper zu behandeln, deren Drehungen berücksichtigt werden müssen. Ich glaube, daß das optische Verhalten der Kristalle im Ultraroten, wie es auch in vorliegender Abhandlung wieder deutlich wird, dafür spricht, daß Deformationen der Atome zum mindesten dieselbe Rolle spielen wie Drehungen.

2) W. Dehlinger, Phys. Ztschr. 15. S. 276. 1914.

3) M. Born, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., 13. Juni 1918, S. 604; vgl. auch die S. 87, Anm. 3 zitierte Abhandlung.

4) Ich habe in der zitierten Abhandlung (Anmerkung 3) aus der Formel das Verhältnis z der Ionenladung zur Elektronenladung bestimmt; bei den Alkalisalzen ergab sich z etwas größer als 1, bei den einwertigen Tl-Salzen zwischen 3 und 4, bei den Ag-Salzen zwischen 1 und 2.

nissen soll $n = 9$ sein, doch lassen wir den Wert für den Augenblick unbestimmt.

Dann ergibt eine einfache Dimensionsbetrachtung, daß man zu Formeln folgender Art gelangen muß:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\delta^3} f(n),$$

$$c_{11} = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n), \qquad c_{12} = \frac{e^2}{\delta^4} f_2(n);$$

dabei sind $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ dimensionslose Größen, deren Zahlenwert noch von n abhängt. Wenn n gewählt ist, so kommen die Unterschiede der einzelnen Kristalle nur noch durch die Gitterkonstante δ zum Ausdruck, und es ist klar, daß man an so primitive Formeln keine allzu hohen Ansprüche stellen darf. Man sieht nun aber, daß die angegebenen Ausdrücke nur dann in die richtige Größenordnung führen, wenn die Zahlenwerte von f, f_1, f_2 etwa 20—30 betragen; die Frage ist also, ob der für die Kompressibilität gefundene Wert $n = 9$ dies leistet. Wenn dies der Fall ist, so ist damit mehr als eine triviale Größenordnungsbeziehung gewonnen. Wir werden sehen, daß die Theorie diese Forderung erfüllt. Leider ist das Beobachtungsmaterial, besonders bei den Elastizitätskonstanten, noch wenig umfangreich und gestattet nur eine beschränkte Prüfung der Formeln; aber es genügt, um den Glauben an die elektrische Natur der Kohäsionskräfte zu befestigen.

§ 1. Die Gleichgewichtsbedigung.

Um in Übereinstimmung mit den früheren Arbeiten zu bleiben, bezeichnen wir den Abstand zweier gleichartiger Atome in der Richtung der Würfelkante mit δ. Als Elementarparallelogramm (Zelle) des Gitters[1]) wählt man aber am besten

1) Die Bezeichnungen und Benennungen sind bis auf geringfügige Abänderungen dieselben, die ich in meinem Buche „Dynamik der Kristallgitter", Leipzig, B. G. Teubner 1915, gebraucht habe. In folgenden Punkten weiche ich hier davon ab: 1. Ich rechne nicht mit dem „Obergitter", dessen Zelle das Volumen 1 hat, sondern mit dem wirklichen Gitter. 2. Zur Festlegung einer Zelle im Gitter gebrauche ich nicht drei Indizes l, m, n, sondern einen Index l, der oben angeschrieben wird; er ersetzt symbolisch jene drei Indizes, die ich hier mit l_1, l_2, l_3 bezeichne. 3. Die Indizes k, k', welche die verschiedenen Par-

nicht den Würfel von der Kantenlänge δ, der vier Atome jeder Art enthält, sondern ein Rhomboeder, dessen Kanten zu den Verbindungen einer Würfelecke mit den Mittelpunkten der drei Nachbarflächen parallel sind (Fig. 1); diese Zelle enthält je ein Atom von beiden Arten. Ist ihr Volumen Δ, so gilt

$$4\Delta = \delta^3 . \tag{1}$$

Die Gitterpunkte kann man auf die Kanten dieses Rhomboeders als schiefwinklige Achsen beziehen; bequemer ist es, sie durch die rechtwinkligen Koordinaten parallel zu den Würfelkanten zu kennzeichnen. Der Vektor von irgendeinem

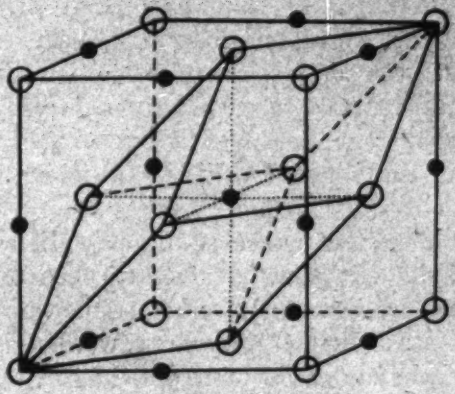


Fig. 1.

Gitterpunkte k zu irgendeinem anderen k' $(k, k' = 1, 2)$ sei $\mathfrak{r}_{kk'}$, mit den Komponenten

$$x^{(i)}_{kk'} = \frac{\delta}{2} l_1 , \quad y^{(i)}_{kk'} = \frac{\delta}{2} l_2 , \quad z^{(i)}_{kk'} = \frac{\delta}{2} l_3 , \tag{2}$$

wo l_1, l_2, l_3 ganze Zahlen sind, deren Summe gerade ist, wenn die beiden Atome gleicher Art, aber ungerade, wenn sie verschiedener Art sind:

$$l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} \text{gerade für } k = 1,\ k' = 1 \text{ und } k = 2, k' = 2, \\ \text{ungerade für } k = 1, k' = 2 \text{ und } k = 2, k' = 1. \end{cases} \tag{2'}$$

Wir nehmen nun an, daß die Atome 1 (Metallatome) die positive Ladung $+e$, die Atome 2 (Halogenatome) die negative Ladung $-e$ tragen; dann bestehen zwischen je zwei

tikelsorten voneinander unterscheiden, schreibe ich unten an. Bringt man diese Änderungen der Bezeichnung an, wird man leicht die Formeln des Buches wiedererkennen (ich zitiere dieses im folgenden als D. K.).

Atomen Coulombsche Anziehungen oder Abstoßungen. Außerdem soll noch eine Wirkung zwischen je zwei Atomen vorhanden sein, die das Zusammenstürzen verhindert und näherungsweise als Zentralkraft angesehen werden soll, die einer höheren Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist. Wir setzen daher die gesamte potentielle Energie zwischen zwei Atomen k, k' gleich

$$\varphi_{kk'} = \pm e^2 r^{-1} + b_{kk'} r^{-n}, \qquad b_{k'k} = b_{kk'}. \tag{3}$$

Dabei gilt das $+$-Zeichen im ersten Gliede für $k = k'$, das $-$-Zeichen für $k \neq k'$. Ferner muß für benachbarte Atome verschiedener Art jedenfalls $b_{12} > 0$ sein, damit das zweite Glied eine Abstoßung bedeutet; dagegen kann man das Vorzeichen von b_{11}, b_{22} zunächst offen lassen, da die Wechselwirkung der nächstbenachbarten Atome gleicher Art wegen ihres größeren Abstandes schon so gering sein wird, daß es für die Stabilität des Gitters gleichgültig ist, ob sie sich anziehen oder abstoßen.

Wir berechnen nun zunächst die potentielle Energie des Gitters pro Zelle Δ. Den elektrostatischen Anteil können wir den früheren Arbeiten[1]) entnehmen, wo er nach der Methode von Madelung[2]) berechnet worden ist (vgl. auch den Anhang); wir fanden dort für die elektrostatische Energie des Gitters pro Elementarwürfel der Kante δ den Wert $a\,\delta^{-1}$ mit

$$a = 13{,}94\, e^2. \tag{4}$$

Die elektrostatische Energie pro Zelle Δ ist der vierte Teil davon.

Die gesamte elektrostatische Energie pro Zelle Δ im Gleichgewicht ist daher[3])

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} \sum_l \varphi^{(l)}_{kk'},$$

$$= -\frac{a}{4}\delta^{-1} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} \sum_l b_{kk'} \left(r^{(l)}_{kk'}\right)^{-n},$$

wo $\varphi^{(l)}_{kk'}$, die potentielle Energie (3) zwischen zwei Gitterpunkten k k' im Gleichgewichtsabstande

1) M. Born und A. Landé, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1918. S. 1048. Vgl. auch die S. 87, Anm. 1 zitierte Abhandlung.

2) E. Madelung, Phys. Ztschr. 19. S. 524. 1918.

3) Der Summationsindex l bedeutet eine Summation über alle ganzzahligen Werte der drei Indizes l_1, l_2, l_3; vgl. Anm. 1, S. 90.

$$r^{0}_{kk'} = \frac{\delta}{2}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{\frac{1}{2}},\quad l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} \text{gerade für } k = k', \\ \text{ungerade für } k \neq k' \end{cases}$$

bedeutet. Wir führen nun die Summen

$$(5)\quad \begin{cases} S_1(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \qquad = 6 + 8\cdot 3^{-\frac{n}{2}} + 24\cdot 5^{-\frac{n}{2}} + 30\cdot 9^{-\frac{n}{2}} + \ldots, \\ S_2(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \qquad = 12\cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 6\cdot 4^{-\frac{n}{2}} + 24\cdot 6^{-\frac{n}{2}} + 12\cdot 8^{-\frac{n}{2}} + \ldots \end{cases}$$

und die Bezeichnungen

$$(6)\qquad b_{12} = b, \qquad \frac{b_{11} + b_{22}}{2 b_{12}} = \beta$$

ein; dann wird:

$$(7)\qquad \Phi = -\frac{a}{4}\delta^{-1} + b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right).$$

Im Gleichgewicht muß Φ als Funktion von δ ein Minimum sein; daraus folgt:

$$\frac{d\Phi}{d\delta} = \frac{a}{4}\delta^{-2} - \frac{n b}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right) = 0.$$

Hieraus berechnen wir die Konstante b der Abstoßungskraft durch den Gleichgewichtswert von δ:

$$(8)\qquad b = \frac{a}{8n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}.$$

Die Konstante β bleibt unbestimmt; sie ist nach (6) von der Größenordnung 1. Da für größere Werte von n die Summe $S_2(n)$ klein gegen $S_1(n)$ ist, so spielt β keine ausschlaggebende Rolle.

§ 2. Die Kompressibilität.

Die physikalische Konstante, die man am einfachsten aus dem Potential (7) berechnen kann, ist die Kompressibilität.[1]) Drückt man Φ mit Hilfe von (1) als Funktion des Zellenvolumens Δ aus

---

1) Vgl. die S. 87, Anm. 1 u. S. 92, Anm. 1 zitierten Abhandlungen.

$$\Phi = -\frac{a}{8}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} + b\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{n}{3}}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right),$$

so ist der Druck

$$p = -\frac{d\Phi}{d\Delta} = -\frac{a}{48}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + b\frac{n}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{n+3}{3}}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right).$$

Die Kompressibilität $\varkappa$ ist dann definiert durch

$$\frac{1}{\varkappa} = -\Delta\frac{dp}{d\Delta} = -\frac{a}{36}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + b\frac{n(n+3)}{18}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{n+3}{3}}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right).$$

Setzt man hier den aus (8) folgenden Wert

$$b = \frac{a}{8n}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}\frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}$$

ein, so erhält man

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{a}{36}\cdot\frac{n-1}{4}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{a(n-1)}{9\delta^4},$$

also

$$\varkappa = \frac{9\delta^4}{a(n-1)} = \frac{9}{13{,}94\,(n-1)}\cdot\frac{\delta^4}{e^2}, \tag{9}$$

übereinstimmend mit unserer früheren Berechnung.

Die Elastizitätskonstanten c_{11} und c_{12} hängen bekanntlich mit $\varkappa$ durch die Relation[1])

$$c_{11} + 2c_{12} = \frac{3}{\varkappa} \tag{10}$$

zusammen; es genügt also, die eine von ihnen zu berechnen (vgl. § 4).

§ 3. Die ultraroten Eigenschwingungen (Reststrahlen).

Bei Kristallen des regulären Systems sind die Schwingungen parallel zu den Würfelkanten miteinander nicht gekoppelt. Sind u_1 und u_2 die Amplituden der beiden Atomarten bei einer parallel zur x-Achse schwingenden Welle von der Frequenz ω, so gelten Gleichungen der Form[2])

$$m_1\omega^2 u_1 + D\Delta(u_2 - u_1) = 0,$$
$$m_2\omega^2 u_2 + D\Delta(u_1 - u_2) = 0,$$

1) Vgl. W. Voigt, Kristallphysik § 372, S. 738, Formeln (442), (444).

2) Vgl. D. K. Formeln (150), S. 62; vgl. auch M. Born (zitiert Anm. 3, S. 87), Formel (27), ff., woher die Bezeichnung D übernommen ist.

wo der Koeffizient D von den Molekularkräften abhängt; daraus folgt für die Frequenz:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) D\,\Delta. \tag{11}$$

Um D zu berechnen, bilde man zunächst aus den Potentialen (8) die Größen[1]):

$$\begin{cases} P^{(l)}_{kk'} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi_{kk'}}{dr}\right)_{r^{(l)}_{kk'}}, \\ Q^{(l)}_{kk'} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi_{kk'}}{dr}\right]\right)_{r^{(l)}_{kk'}}, \end{cases} \tag{12}$$

und daraus die von den Ionen der ersten auf die der zweiten Art pro Volumeneinheit ausgeübte Kraft[2]):

$$D = \frac{1}{\Delta} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} \left(P^{(l)}_{12} + Q^{(l)}_{12} x^{(l)2}_{12}\right). \tag{13}$$

Doch gelten diese Formeln ohne weiteres nur für den zweiten Term der potentiellen Energie, der die Abstoßung darstellt und einer höheren als der (-1)ten Potenz der Entfernung proportional ist. Der elektrische Anteil der potentiellen Energie erfordert wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Schwingungen eine besondere Behandlung [vgl. Anhang, Formel (b)]; man findet, daß er zu $D\Delta$ den Beitrag

$$-\frac{4\pi}{3}\,\frac{e^2}{\Delta} = -\frac{2\pi}{3}\,e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3}$$

liefert. Daher erhält man:

$$D\Delta = -\frac{2\pi}{3}\,e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3} - n\,b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}}$$

$$+ n(n+2)\,b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}}\, l_1^2.$$

Nun ist offenbar

$$3 \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}}\, l_1^2 = \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}} = S_1(n+2).$$

---

1) Vgl. D. K., Formeln (14), S. 21.

2) Vgl. D. K., Formeln (18) und (25); die hier D genannte Größe heißt dort $A_0^{(1,2)}$.

Folglich wird

$$D\,\Delta = -\frac{2\pi}{3}e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3} + \frac{n(n-1)}{3}\,b\,S_1(n+2)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)}.$$

Setzt man hier den Ausdruck (8) für b ein, so bekommt man

$$D\,\Delta = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3}\left\{-2\pi e^2 + \frac{(n-1)\,a}{8}\cdot\frac{S_1(n+2)}{S_1(n)+\beta S_2(n)}\right\}.$$

Indem man noch den Wert (4) für a einführt, erhält man für das Quadrat der Frequenz nach (11):

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\delta^3}\cdot f(n), \tag{14}$$

wo

$$f(n) = \frac{1}{3}\left(13{,}94\,\frac{(n-1)\,S_1(n+2)}{S_1(n)+\beta S_2(n)} - 16\pi\right) \tag{15}$$

gesetzt ist.

§ 4. Die Elastizitätskonstanten.

Von den Elastizitätskonstanten c_{11}, c_{12} läßt sich c_{11} direkt berechnen, weil der elektrische Anteil nach der Methode von Madelung gewonnen werden kann; für c_{12} ist das nicht ohne weiteres möglich, aber auch nicht nötig, weil durch die Formel (10) c_{12} auf c_{11} und $\varkappa$ zurückgeführt wird.

c_{11} wird durch folgende Summe dargestellt[1]):

$$c_{11} = \frac{1}{2\Delta}\sum_k\sum_{k'}\sum_{\nu} Q^{(0)}_{kk'}\,x^{(0)4}_{kk'}. \tag{16}$$

Der elektrische Anteil davon wird im Anhange besonders berechnet; er hat den Wert $-20{,}42\,e^2\,\delta^{-4}$ [Anhang, Formel (k)].

Führt man nun die Summen

$$\begin{cases} C_1(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\, l_1^4 \\ \qquad = 2\left\{1 + 4\cdot 3^{-\frac{n}{2}} + 68\cdot 5^{-\frac{n}{2}} + 213\cdot 9^{-\frac{n}{2}} + \ldots\right\} \\ C_2(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade}} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\, l_1^4 \\ \qquad = 2\left\{4\cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 16\cdot 4^{-\frac{n}{2}} + 72\cdot 6^{-\frac{n}{2}} + 64\cdot 8^{-\frac{n}{2}} + \ldots\right\} \end{cases} \tag{17}$$

1) Vgl. D. K., Formeln (18), (26), (42), (51), (57). Es sind hier die Größen $a_1^{(k)}, \ldots$ sämtlich gleich Null und die $a_{11}, \ldots$ direkt die Elastizitätskonstanten.

ein, so erhält man:

$$c_{11} = -20{,}42\, e^2 \delta^{-4} + \frac{1}{A} n(n+2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} b \left(C_1 (n+4) + \beta C_2 (n+4)\right).$$

Mit dem Wert (8) von b wird das zu:

$$c_{11} = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n), \tag{18}$$

wo

$$f_1(n) = 13{,}94 (n+2) \frac{C_1(n+4) + \beta C_2 (n+4)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - 20{,}42 \tag{19}$$

gesetzt ist. Aus (10) folgt dann

$$c_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varkappa} - c_{11}\right) = \frac{e^2}{\delta^4} f_2(n), \tag{20}$$

wo

$$f_2(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{13{,}94\,(n-1)}{3} - f_1(n)\right). \tag{21}$$

§ 5. Zusammenstellung der Formeln.

Die Formeln (14), (15), (18), (19), (20), (21) enthalten die Lösung des in der Einleitung gestellten Problems. Wir bringen sie jetzt in eine für die numerische Rechnung geeignete Gestalt.

Die Dichte des Kristalls ist

$$\varrho = \frac{m_1 + m_2}{A} = \frac{1}{4} \frac{m_1 + m_2}{\delta^3}. \tag{22}$$

Ist N die Avogadrosche Zahl, so sind die Atomgewichte

$$\mu_1 = N m_1, \qquad \mu_2 = N m_2 \tag{23}$$

und

$$F = e N = 2{,}90 \cdot 10^{14}\ \text{E.S.E.} \tag{24}$$

ist die Faradaysche Konstante. Daher wird nach (14)

$$\omega^2 = \frac{\varrho F^2}{4 \mu_1 \mu_2} f(n);$$

daraus folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi e}{F} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho f(n)}}, \tag{25}$$

mißt man sie in $\mu = 10^{-4}$ cm, so wird

$$\lambda = 13{,}0 \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho f(n)}}. \tag{25'}$$

Die Elastizitätskonstanten haben den Faktor

$$(26) \qquad \frac{e^2}{\delta^4} = e^2 \left(\frac{N\varrho}{4(\mu_1+\mu_2)}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{\sqrt{e}F\varrho}{4(\mu_1+\mu_2)}\right)^{\frac{4}{3}};$$

für $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ wird dieser:

$$(26') \qquad \frac{e^2}{\delta^4} = 1{,}842 \cdot 10^{13} \left(\frac{\varrho}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Mit Hilfe der Formel (9) kann man nun aus den gemessenen Werten der Kompressibilität den Abstoßungsexponenten n bestimmen[1]); man findet

$$(27) \qquad n-1 = \frac{9}{13{,}94\,\varkappa} \cdot \frac{\delta^4}{e^2} = 3{,}505 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\varrho}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Die Elastizitätskonstanten ergeben sich aus (26') durch Multiplikation mit $f_1(n)$ und $f_2(n)$; es genügt, c_{11} anzugeben:

$$(28) \qquad c_{11} = 1{,}842 \cdot 10^{13} \cdot \left(\frac{\varrho}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{4}{3}} f_1(n).$$

Ferner erhält man aus (9) und (18) die Relation:

$$(29) \qquad \varkappa c_{11} = \frac{9 f_1(n)}{13{,}94\,(n-1)};$$

diese ist explizite unabhängig von der Wahl der Zahlenwerte für e und δ und wird von diesen nur insoweit beeinflußt, als sie in die Bestimmung von n aus (27) eingehen.

Zur Orientierung über den Verlauf der Summen S und C als Funktionen von n dient die folgende kleine Tabelle[2]); der Bereich von n ist so gewählt, daß er die im folgenden vorkommenden Werte von n enthält.

Tabelle 1.

n	$S_1(n)$	$S_2(n)$	$S_1(n+2)$	$C_1(n+4)$	$C_2(n+4)$
7	6,231	1,149	6,065	2,028	0,1913
8	6,144	0,785	6,036	2,015	0,1314
9	6,065	0,544	6,020	2,007	0,0910
10	6,036	0,381	6,011	2,004	0,0636

1) Vgl. M. Born und A. Landé (a. a. O. Anm. 1, S. 1). Indem wir hier einen moderneren Wert für das elektrische Elementarquantum benutzen, fallen die numerischen Faktoren etwas anders aus als in der zitierten früheren Arbeit.

2) Die Tabelle ist von Frl. Dr. E. Bormann berechnet, die mich bei dieser Arbeit in liebenswürdiger Weise unterstützt hat.

Hieraus geht hervor, daß die Konstante β keinen sehr großen Einfluß auf die Funktionen $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ hat.

§ 6. Vergleich mit den Messungen.

Wir bestimmen zunächst n aus (27); die folgende Tabelle enthält die Kompressibilitäten nach Richards und Jones[1]) nebst Atomgewichten und Dichten und die daraus berechneten Werte von n.

Tabelle 2.

	μ_1	μ_2	ϱ	$\varkappa_{\text{beob.}}$	n
NaCl	23,0	35,5	2,17	$4{,}1 \cdot 10^{-12}$	7,91
NaBr	23,0	79,9	3,01	5,1	8,63
NaJ	23,0	126,9	3,55	6,9	8,47
KCl	39,1	35,5	1,98	5,0	9,85
KBr	39,1	79,9	2,70	6,2	9,80
KJ	39,1	126,9	3,07	8,6	9,33
TlCl	204,0	35,5	7,02	4,7	9,25
TlBr	204,0	79,9	7,54	5,1	9,67
TlJ	204,0	126,9	7,06	6,7	9,84

Der Mittelwert der für n gefundenen Werte ist $n = 9{,}20$. Macht man die Annahme, daß n ganzzahlig sein soll, so wird man

$$n = 9$$

setzen, einen Wert, der auch durch theoretische Spekulationen über die Atomstruktur gestützt wird.[2])

Auch die Konstanten λ und c_{11} wird man zunächst mit diesem Werte $n = 9$ berechnen. Dabei ist noch die Konstante β unbekannt; zum Zwecke einer ersten Übersicht über die Brauchbarkeit der Formeln wird man den naheliegenden Ansatz

$$\beta = 1$$

machen, der nach (6) bedeutet, daß für dieselbe Entfernung die Abstoßung zweier Atome verschiedener Art gleich ist dem arithmetischen Mittel der Abstoßung je zweier gleich-

1) Th. W. Richards und Gr. Jones, Journ. Amer. Chem. Soc. **31**. S. 158. 1909. Zitiert nach W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, § 362, S. 720.

2) Vgl. M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. **20**. S. 230. 1918 und A. Landé, ebenda, **21**. S. 2. 1919.

artiger Atome. Für $n = 9$, $\beta = 1$ hat man nach (15) und (19) mit Benutzung der Tabelle 1:

$$f(9) = \frac{1}{3}\left(13{,}94\,\frac{8 \cdot S_1(11)}{S_1(9) + S_2(9)} - 16\,\pi\right) = 17{,}10,$$

$$f_1(9) = 13{,}94 \cdot 11\,\frac{C_1(13) + C_2(13)}{S_1(9) + S_2(9)} - 20{,}42 = 28{,}26.$$

Die Formeln (25′), (27), (28), (29) liefern nun:

$$\lambda = 3{,}14\sqrt{\frac{\mu_1\,\mu_2}{\varrho}}, \tag{25″}$$

$$\varkappa = 4{,}38 \cdot 10^{-14}\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\varrho}\right)^{\frac{4}{3}}, \tag{27′}$$

$$c_{11} = 5{,}21 \cdot 10^{13}\left(\frac{\varrho}{\mu_1 + \mu_2}\right)^{\frac{4}{3}}, \tag{28′}$$

$$\varkappa\, c_{11} = 2{,}28\,. \tag{29′}$$

Die folgende Tabelle enthält die mit den Daten der Tab. 2 berechneten Werte von λ, $\varkappa$, c_{11}. Zum Vergleich sind daneben eingetragen die Wellenlängen der Reststrahlen λ_E, soweit sie bekannt sind, die Kompressibilitäten $\varkappa_{beob.}$ nach Richards und Jones (vgl. Tab. 2) und die Konstanten $c_{11beob.}$ nach Voigt[1]), die leider nur für zwei Kristalle vorliegen, endlich das Produkt $\varkappa\, c_{11beob.}$ aus den gemessenen Werten.

Tabelle 3.

	$\lambda_{ber.}$	λ_E	$10^{12}\,\varkappa_{ber.}$	$10^{12}\,\varkappa_{beob.}$	$10^{-11}\,c_{11ber.}$	$10^{-11}\,c_{11beob.}$	$\varkappa\, c_{11beob.}$
NaCl	60,9	52,0	3,54	4,1	6,44	4,68	1,92
NaBr	77,5	—	4,86	5,1	4,69	—	—
NaJ	90,0	—	6,44	6,9	3,54	—	—
KCl	83,0	63,4	5,53	5,0	4,12	3,68	1,84
KBr	107,0	82,6	6,82	6,2	3,35	—	—
KJ	126,1	94,1	8,96	8,6	2,54	—	—
TlCl	101,0	91,6	4,85	4,7	4,71	—	—
TlBr	146,0	117,0	5,53	5,1	4,12	—	—
TlJ	190,0	151,8	7,40	6,7	3,08	—	—

Die Wellenlängen der Reststrahlen (Maxima des Reflexionsvermögens) entsprechen wegen der Absorption nicht genau den

1) W. Voigt, Kristallphysik, § 373, S. 744. Die Angaben Voigts sind durch Multiplikation mit 981 in C.G.S.-Einheiten umgerechnet.

Eigenschwingungen; vielmehr sind die Wellenlängen der letzteren merklich länger. Für Steinsalz haben Rubens und Nichols[1]) aus der Dispersionskurve die Eigenschwingung $\lambda = 56{,}1$ abgeleitet; dieser Wert liegt dem berechneten $\lambda = 60{,}9$ ziemlich nahe. Für die übrigen Salze ist die Übereinstimmung schlechter, und zwar ist die Abweichung immer im selben Sinne und im großen und ganzen um so größer, je höhere Atomnummern die den Kristall bildenden Atome tragen. Das muß man wohl so verstehen, daß die der Theorie zugrunde liegende Annahme, die Atome seien punktförmige Kraftzentra, um so schlechter erfüllt ist, je größer die den Kristall bildenden Atome sind; denn dann werden Drehungen und Deformationen der Atome auf die Eigenfrequenz Einfluß gewinnen. Die Theorie stellt also den idealen Grenzfall sehr kleiner Atome dar.

Die Übereinstimmung der Elastizitätskonstanten c_{11} muß von demselben Gesichtspunkt aus als befriedigend bezeichnet werden. Auch ist zu berücksichtigen, daß die Sicherheit der gemessenen Werte nicht sehr groß ist.[2]) Für das Produkt $\varkappa c_{11}$ folgen aus den Beobachtungen Werte, die etwas kleiner sind als die theoretische Zahl 2,28. Es wäre sehr zu wünschen, daß durch neue Bestimmungen der Elastizitätskonstanten eine umfangreichere Prüfung der Theorie ermöglicht würde.

Man kann nun versuchen, auf zwei Weisen den Anschluß an die Messungen zu verbessern, ohne den Rahmen der hier gegebenen Theorie zu verlassen. Einmal kann man nämlich, statt mit $n = 9$ zu rechnen, die in Tab. 2 angegebenen n-Werte benutzen, die sich aus der Kompressibilität für jeden Kristall ergeben; man findet, daß das bei einigen Kristallen hilft, bei anderen schadet. Sodann kann man versuchen, ob sich die

1) Rubens und Nichols, Wied. Ann. d. Phys. **60**. S. 452. 1897.

2) Voigt (Lehrbuch der Kristallphysik, § 372, S. 742) hebt hervor, daß sich für KCl (Sylvin) aus den von ihm gemessenen Werten von c_{11} und c_{12} die Kompressibilität $\varkappa = 7{,}38$ ergibt, während nach den direkten Messungen von Richards und Jones $\varkappa = 5{,}0$ sein soll. Das Kristallmaterial scheint nicht einheitlich zu sein. Unter diesen Umständen ist es auch überflüssig, die gemessenen Werte auf den absoluten Nullpunkt zu reduzieren, für den die Theorie eigentlich gilt; übrigens wird diese Ungenauigkeit zum größten Teil dadurch kompensiert, daß in die Formeln nicht die Dichte beim absoluten Nullpunkt, sondern bei normalen Temperaturen eingesetzt wird.

Konstante β so bestimmen läßt, daß die Übereinstimmung mit den Beobachtungen verbessert wird; es zeigt sich, daß auch das nicht zum Ziel führt, denn wenn man für die Kristalle NaCl und KCl durch geeignete Wahl von β die Übereinstimmung der Wellenlängen λ verbessert, wird die Abweichung der Elastizitätskonstanten c_{11} größer. In der vorliegenden rohen Form ist also die Theorie nicht geeignet, Aufschluß über das Verhältnis der Kräfte zwischen gleichartigen und ungleichartigen Atomen zu geben. Der Grund ist wohl, daß die Vernachlässigung der Drehbarkeit und Deformierbarkeit der Atome alle feineren Zusammenhänge verdeckt.[1])

Zum Schlusse vergleichen wir die Formel (25′) für die Wellenlänge der ultraroten Eigenschwingungen mit der in der Einleitung erwähnten Relation von Dehlinger

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\Delta},$$

die man auch in der Form

$$\lambda = \frac{4\pi c}{F}\sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2 K}{16\pi\varrho}}, \quad K = \varepsilon - \varepsilon_0$$

schreiben kann; sie wäre also mit der neuen Formel (25) identisch, wenn $K = 16\pi/f(n)$ wäre. Dabei ist K die Konstante der Dispersionsformel

$$n^2 = n_0^2 + \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

die den Einfluß der ultraroten Eigenfrequenz ω_0 auf den Brechungsindex n darstellt. Es ist also $K = \varepsilon - \varepsilon_0$, wo ε die statische Dielektrizitätskonstante, d. h. der Wert von n^2 für $\omega = 0$, und $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ der Wert des Brechungsindex im Ultraroten vor der langwelligen Eigenfrequenz ist. Es wurde damals gezeigt, daß diese Formel zwar für die Salze NaCl, KCl, KBr, KJ einigermaßen stimmt, daß sie aber für die

1) W. Voigt hat kürzlich (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918) den Einfluß der Drehungen der Atome auf die Elastizitätskonstanten untersucht; in einigen Fällen konnte er dabei zu Schätzungen einer β analogen Größe gelangen. Man wird suchen müssen, diese Überlegungen mit der hier gegebenen Theorie zu verschmelzen.

Thallium- und Silbersalze[1]) unter der Annahme einfach geladener Ionen vollständig versagt (vgl. Einleitung, S. 89, insbesondere Anm. 4, S. 89). Die neue Formel (25) liefert weitaus bessere Werte für λ, obwohl ihre Begründung viel spekulativer ist, als die der Formel von Dehlinger. An dem Versagen dieser kann also nicht, wie ich früher glaubte[2]), die Vernachlässigung der Drehbarkeit und Deformierbarkeit der Atome schuld sein, denn diese macht auch die vorliegende Theorie; es scheint mir vielmehr, daß nur die Bestimmung von K aus der empirischen Dispersionskurve den Fehler bewirken kann. Einmal ist die Wahl des Wertes $\varepsilon_0 = n_0^2$ überhaupt sehr willkürlich; sodann handelt es sich um stark gedämpfte Schwingungen, was bei dem Ansatze der Dispersionsformel nicht zum Ausdruck gebracht ist. Jedenfalls ist die neue, direkte Berechnung der ultraroten Frequenzen aus den Atomkräften erfolgreicher als die anscheinend so hypothesenfreie aus dem Verlaufe der Dispersion.

Anhang.

Berechnung der elektrischen Wechselwirkungen zwischen den Atomen.

Eine ausführliche Theorie der elektrodynamischen Vorgänge in einem Gitter habe ich a. a. O.[3]) gegeben. Für die Berechnung der Wechselwirkungen hat man die Fälle zu unterscheiden, ob der Mittelwert der elektrischen Feldstärke über eine Zelle des Gitters verschwindet oder nicht. Im ersten Falle hat man elastische (akustische und thermische) Vorgänge, im zweiten Falle eigentlich elektromagnetische (optische). Im ersten Falle kann man mit gewöhnlichen elektrostatischen (Coulombschen) Kräften rechnen; im zweiten Falle muß man die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der

---

1) Die Silbersalze verhalten sich gegenüber der neuen Theorie merkwürdig; die Formel (27) liefert mit $n = 9$ viel zu große Kompressibilitäten, dagegen stimmen die mit $n = 9$ aus (25′) berechneten Wellenlängen gut mit den Reststrahlen überein. Die amorphe Struktur dieser Substanzen mag vielleicht erklären, daß sie sich elastisch anomal verhalten, während ihre optischen Eigenschaften unserer Theorie entsprechen.

2) M. Born, D.K., zit. Anm. 1, S. 89.

3) D. K., 2. Teil, § 22—31.

elektromagnetischen Störungen in Rechnung setzen und die Kräfte als Lösungen der Wellengleichung bestimmen.

Betrachten wir zunächst den Fall der optischen Vorgänge. Die an den Partikeln angreifenden elektrischen Kräfte leiten sich aus einem Hertzschen Vektor ab, der der Wellengleichung genügt; dieser besteht aus zwei Anteilen, die von den positiven und negativen Ionen herrühren. Die auf ein negatives Ion wirkende Kraft in der x-Richtung ist gleich dem Werte von $-e\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ an der Stelle des Ions, wobei φ die von den positiven Ionen herrührende Wirkung darstellt; φ genügt der Wellengleichung und wird an allen positiven Partikeln unendlich wie er^{-1}. Entwickelt man nun unter der Annahme, daß der Mittelwert des Feldes über eine Zelle nicht verschwindet, nach Potenzen der reziproken Wellenlänge, so erhält man in erster Näherung (unendlich lange Wellen) für φ die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{4\pi e}{\Delta}\,.$$

Da nun aus Symmetriegründen in jedem negativen Gitterpunkte

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

ist, so folgt für die Kraft auf ein Ion

$$\text{(b)} \qquad -e\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{4\pi e^2}{3\Delta};$$

da D die Kraft auf die Ionen einer Art in der Volumeneinheit bedeutet, so ist der gefundene Wert der elektrische Anteil zu $D\Delta$, wie im Text S. 95 angegeben.[1])

Bei der Berechnung der elektrischen Beiträge zu den Elastizitätskonstanten braucht die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht berücksichtigt zu werden. Es handelt sich also um eine rein elektrostatische Aufgabe.

Eine ebenso elegante wie weitreichende Methode zur Berechnung der Potentiale unendlicher Gitter hat Madelung[2]) angegeben. Er hat danach selbst den Wert der potentiellen Energie eines Gitters vom Typus des NaCl pro Elementarwürfel ermittelt; A. Landé und ich haben diesen Wert eben-

1) Vgl. auch D. K., 2. Teil, § 31, S. 98.
2) A. a. O. S. 6, Anm. 2.

falls berechnet und benutzt.[1]) Für die Kantenlänge 1 (gerechnet zwischen zwei Atomen der gleichen Art) hat diese Energie den auf S. 92, Formel (4) mitgeteilten Wert

(c) $$a = 13{,}94\, e^2 .$$

Wir haben hier also nur noch den Beitrag der elektrischen Kräfte zu der Elastizitätskonstanten c_{11} zu bestimmen. Nach der Gittertheorie[2]) beträgt dieser:

(d) $$c_{11}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \sum_k \sum_{k'} \sum_l \left(\frac{\partial^3 \varphi_{kk'}^{(l)}}{\partial x^3} \right)_{x_{kk'}^{(l)}} \cdot z_{kk'}^{(l)3},$$

wobei

(e) $$\varphi_{kk'}^{(l)} = (-1)^{k_1+k_2+k_3} \frac{e^2}{r_{kk'}^{(l)}}$$

das elektrostatische Potential zwischen zwei Gitterpunkten ist. Nun hat offenbar die Summe

(f) $$C = \sum_{k'} \sum_l \left(\frac{\partial^3 \varphi_{kk'}^{(l)}}{\partial x^3} \right)_{x_{kk'}^{(l)}} \cdot z_{kk'}^{(l)3}$$

in den beiden Gitterpunkten $k = 1$ und $k = 2$ einer Zelle denselben Wert; daher liefert die Summation nach k einfach den Faktor 2. Beziehen wir außerdem C auf ein Gitter mit der Ionenladung 1, bei dem benachbarte Atome verschiedener Art den Abstand 1 haben, so wird

(g) $$c_{11}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \cdot 2 \cdot \frac{e^2}{\delta/2} C = \frac{2e^2}{\delta\Delta} C = \frac{8e^2}{\delta^4} C.$$

Es bleibt also nur noch die numerische Konstante C zu berechnen. Wir setzen die Summe C aus den Beiträgen zusammen, die die Netzebenen $z = \text{konst.}$ liefern. Da die Ebene $z = 0$ nichts zu der Summe beiträgt, kann man schreiben:

$$C = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} z^3 \right)_{0,0,p} \cdot (-1)^p ;$$

dabei ist Φ das elektrostatische Potential der Netzebene $z = 0$ in einem Aufpunkte x, y, z, und es sind $x = 0$, $y = 0$ und für z der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen p zu setzen.

1) A. a. O. S. 6, Anm. 1.
2) Vgl. D. K. Formeln (26), (42), (51), (57).

Nach Madelung[1]) ist das Potential der Netzebene $z = 0$ im Punkte x, y, z:

$$\Phi = 8 \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \sum_{n} \frac{e^{-\pi \sqrt{m^2+n^2} \cdot |z|}}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos m\pi x \cos n\pi y .$$

Daher wird

$$\text{(h)} \qquad C = 16\pi^2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p^2 \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \sum_{n} \sqrt{m^2+n^2}\, e^{-\pi \sqrt{m^2+n^2} \cdot p} .$$

Die Reihe konvergiert außerordentlich rasch; um C genauer als auf $1‰$ zu erhalten, genügt es, die Indizes $m, n = 1,8$ und $p = 1,2$ zu berücksichtigen. Man findet

$$\text{(i)} \qquad C = -2{,}644 .$$

Setzt man das in (g) ein, so erhält man den auf S. 96 benutzten Wert

$$\text{(k)} \qquad c_{11}^{(e)} = -20{,}42 \frac{e^2}{\delta^4} .$$

---

1) E. Madelung (a. a. O. S. 6, Anm. 2). Die angegebene Formel findet sich auf S. 532 unter 8. Das Feld eines gemischten (flächenzentrierten) rechtwinkligen ebenen Punktgitters; man hat $a = b = 2$, also $k_{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$, und $E = 1$ zu setzen.

(Eingegangen 26. Juli 1919.)

7. *Der Effekt des elektrischen Feldes auf Linien des Argons und des Sauerstoffs*[1]; *von E. Böttcher und F. Tuczek.*

1. *Problemstellung.* Nach den Vorstellungen Starks wird die von einem äußeren Feld herrührende elektrische Kraft im Innern des Atoms durch seine an der Peripherie sitzenden, lose gebundenen Elektronen geschwächt, indem diese sich durch das äußere Feld verschieben. Die Wirkung eines Feldes auf die mehr im Innern liegenden Serienelektronen muß demnach um so geringer sein, je mehr Elektronen das Atom überhaupt enthält, d. h. je größer das Atomgewicht ist, und zweitens je mehr leicht verschiebbare Elektronen an der Peripherie des Atoms vorhanden sind. Als solche sind aber die Valenzelektronen zu betrachten. Hiernach hat man also eine Abnahme des elektrischen Effektes mit zunehmender Valenzzahl zu erwarten. In der Tat konnten Stark und Hardtke[2]) durch Vergleich des elektrischen Effektes auf entsprechende Glieder der diffusen Nebenserie von Na, Cu, Ag_+ und Al nachweisen, daß die Verschiebung für die ersten drei einwertigen Elemente ungefähr gleich, für das dreiwertige Al aber erheblich geringer ist.

In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, wie sich einmal die Edelgase und zweitens Elemente mit der Valenzzahl 2 verhalten. Von den Edelgasen werden bekanntlich die Linien des He sehr stark zerlegt, beim Neon fand Nyquist[3]), dessen Arbeit uns leider nicht zugänglich war, einen Effekt des elektrischen Feldes. Wir untersuchten das Argon. Es bestand die Möglichkeit, daß hier eine der ersten oder diffusen Duplet-Nebenserie der oben aufgeführten, von Stark und

1) Die vorliegende Untersuchung ist mit Unterstützung der Jagor-Stiftung ausgeführt worden.

2) Stark u. Hardtke, Ann. d. Phys. 58. S. 712. 1919.

3) Nyquist, Phys. Rev. (II). S. 226. 1917.

Hardtke untersuchten Elemente entsprechende Serie gefunden und es so gelingen würde, durch den Vergleich der Verschiebungen bei Argon und jenen Elementen eine weitere Stütze der Starkschen Theorie zu liefern. Es mag vorweggenommen werden, daß keine solche Serie auftrat, und wir überhaupt keine Verschiebung oder Zerlegung von Argonlinien feststellen konnten.

Als zweiwertiges Element wählten wir den Sauerstoff. Als zweiter Gesichtspunkt für diese Wahl war maßgebend, daß Sauerstoff ein Bogen- und ein Funkenspektrum besitzt, denen nach Stark verschiedene Träger, nämlich das O^+-Atomion für das Bogen- und das O^{++}-Atomion für das Funkenspektrum zukommen. In Analogie zu anderen Elementen ist auch für Sauerstoff zu erwarten, daß die Bogenlinien stärker beeinflußt werden.

2. *Methode.* Die Untersuchungen wurden nach der Methode der ersten Kathodenschicht gemacht, und zwar wurde für Argon dieselbe Röhre verwendet, die schon früher von Stark, Hardtke und Liebert[1]) beschrieben ist, für Sauerstoff eine Röhre aus gewöhnlichem Glas von 4 mm Innendurchmesser mit gut anschließender Aluminiumkathode. Es wurde mit Gleichstrom gearbeitet, die Stromstärke betrug 1—2 Milliampere, die Entladungsspannung bei Argon etwa 4400, bei Sauerstoff 3400 Volt. Die Feldstärke ließ sich aus der Zerlegung der Wasserstofflinien, die im Argonspektrum auftraten, im Maximum zu etwa 26000 V/cm bestimmen. Der Raum vor der Kathode wurde in der üblichen Weise durch ein Tessar auf den Spalt eines Gitterspektrographen abgebildet, der schon früher beschrieben ist[2]), und dessen Dispersion 11 bis 16 Å/mm betrug. Ein Wollastonprisma zwischen Röhre und Tessar trennte p- und s-Komponenten.

3. *Ergebnisse.* a) Argonlinien. Tab. I enthält die Wellenlängen der von uns untersuchten Argonlinien. Eine Zerlegung oder Schrägstellung konnte nicht aufgefunden werden.

b) Sauerstoff-Funkenlinien. An den in Tab. II aufgeführten Sauerstoff-Funkenlinien fanden wir ebenfalls keine Wirkung des Feldes.

---

1) J. Stark, O. Hardtke und G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 569. 1918.

2) Ann. d. Phys. 48. S. 195. 1915.

Tabelle I.

1. Rotes Argonspektrum nach Eder u. Valenta.		2. Blaues Argonspektrum nach Eder u. Valenta.			
Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität
4522,49	3	4847,94	2	4481,99	7
4510,95	5	4806,17	4	4426,16	8
4335,42	5	4765,04	5	4400,25	8
4300,18	5	4736,03	3	4379,79	7
4272,27	10	4727,00	5	4371,46	6
4266,41	9	4658,04	5	4348,22	10
4259,42	9	4637,35	4	4331,31	4
4200,76	9	4609,73	10	4277,65	10
4198,42	8	4590,05	8	4228,57	5
4164,36	5	4575,53	8	4178,50	3
4158,63	9	4563,87	7	4158,65	2
4044,56	5	4545,26	9	4131,91	8
		4503,15	2	4104,11	5
		4498,68	2	4072,16	6

Tabelle II.

O-Funkenlinien (nach Neovis).

Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität
4710,1	2	4351,4	mehrfach
4705,6	3	4345,4	mehrfach
4699,4	3	4337,0	4
4676,6	6	4319,6	6
4661,6	6	4317,1	6
4651,0	10	4303,5	4
4638,9	6	4283,5	6
4609,4	6	4253,7	5
4596,3	9	4190,0	7
4591,0	10	4185,5	7
4469,4	3	4153,6	2
4465,3	4	4119,5	6
4452,2	4	4088,9	4
4443,0	3	4085,2	4
4417,2	10	4076,2	8
4415,0	8		

c) Sauerstoff-Bogenlinien. In Tab. III sind die Ergebnisse bezüglich der von uns untersuchten Bogenlinien zusammengestellt. Von der Duplethauptserie erschien in unseren Spektrogrammen nur das 2. Glied, $\lambda = 4368{,}5$, das keinen Effekt zeigt, von der Triplethauptserie nur das 3. Glied, $\lambda = 3947{,}8$, das aber so dicht an der intensiven Al-Linie 3944 liegt, daß wir keine bestimmten Aussagen über seine Beeinflussung machen können. Das 3. bis 7. Glied der I. Tripletnebenserie zeigt eine

Verschiebung nach Rot, die mit wachsender Gliednummer stark zunimmt, wie es bei allen bisher untersuchten Serien der Fall ist. Weitere Glieder waren auf unseren Spektrogrammen nicht zu erkennen.

Tabelle III.

O-Bogenlinien (nach Runge und Paschen).

Gliednummer	Wellenlänge	Intensität	Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å	Dispersion Å/mm
	a) Duplethauptserie.			
2	4368,466	10	nicht merklich	16
	b) Triplethauptserie.			
3	3947,759 3947,661 3947,480	10	?	16,5
	c) I. Tripletnebenserie.			
3	5830,835 5829,774 5829,162	10	+ 0,71	11,9
4	4968,94 4968,04 4967,58	5	+ 2,0	12,0
5	4773,94 4773,07 4772,72	5	+ 5,4	14,0
6	4655,54 4654,74 4654,41	3	+ 7,6	14,6
7	4577,84 4576,97	1	+ 9,3	16,0
	d) II. Tripletnebenserie.			
2	5437,041 5435,968 5435,371	7	nicht merklich	10,0
3	5020,31 5019,52 5018,96	3	„	11,5
4	4803,18 4802,38 4801,98	5	„	13,3

d) Neue Linien des Sauerstoffs. Wir beobachteten zum erstenmal die in Tab. IV angegebenen Linien, die nur im elektrischen Feld auftreten. Die Bestimmung der Wellenlängen kann nicht auf große Genauigkeit Anspruch machen, eben weil die Intensität mit abnehmendem Feld dem Wert Null zustrebt. Die Intensität der *s*-Komponenten war so klein,

daß ihre Verschiebung nicht gemessen werden konnte; die Verschiebung ist aber etwa ebensogroß wie die der p-Komponenten. Die Eigenschaften der neuen Linien sind im folgenden kurz zusammengestellt:

Tabelle IV.

Neue O-Linien.

Wellenlänge	Intensität (Schätzung)	Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å	Dispersion
4846	1	− 1,4	13,9
4743	2	− 2,1	14,0
4634	3	− 3,5	15,0
4559	4	− 4,5	16,0

1. Die Linen haben nur im elektrischen Feld merkliche Intensität.

2. Sie werden durch das Feld nach Violett verschoben im Gegensatz zur I. Tripletnebenserie).

3. Die Linien rücken bei kleineren Wellenlängen näher aneinander und an die Glieder der I. Tripletnebenserie.

4. Die Intensität nimmt mit abnehmender Wellenlänge zu (im Gegensatz zum gewöhnlichen Verhalten von Serienlinien). Die Reihe bricht mit dem intensivsten Gliede ab, ohne daß eine Andeutung eines weiteren, weniger intensiven Gliedes zu bemerken wäre. Dies Verhalten ist außerordentlich bemerkenswert.

5. Die p-Komponenten sind erheblich intensiver als die s-Komponenten.

6. Mit wachsender Feldstärke scheint die Intensität der Linien mit größeren Wellenlängen schneller zu wachsen als die der Linien mit kleineren Wellenlängen. (Ebenso verhalten sich die He-Serien, die nur im elektrischeu Feld erscheinen.[1])

7. Die Verschiebung hat etwa die gleiche Größe wie bei der I. Tripletnebenserie des Sauerstoffs und bei der fast scharfen He-II-Haupt- und Nebenserie.[2]) Mit der letzteren haben die neuen Linien außer den unter 1., 2., 4., 6. und 7. aufgeführten Punkten auch die Eigenschaft 5. gemeinsam, die aber bei den

1) J. Stark, Ann. d. Phys 56. S. 577. 1918.
2) G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 589. 1918.

O-Linien viel stärker ausgeprägt ist. Wir konnten dies feststellen durch Vergleich mit einer Platte, die uns Herr Prof. Stark zur Verfügung stellte, und die er zur Untersuchung des Spektrums von Silber in Helium aufgenommen hatte. Nach den obigen Feststellungen ist man wohl berechtigt, die von uns gefundenen O-Linien als eine zur I. Tripletnebenserie gehörige fast scharfe Nebenserie anzusprechen.

Herrn Prof. J. Stark verdanken wir die Anregung zu dieser Arbeit und ihre rege Förderung.

Greifswald, Physikalisches Institut, Juli 1919.

(Eingegangen 5. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P.

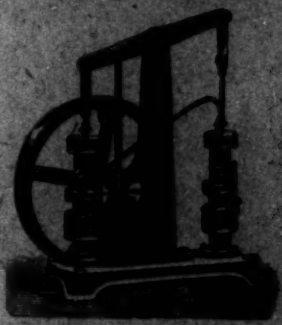
System Gaede, D. R. P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.**



Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

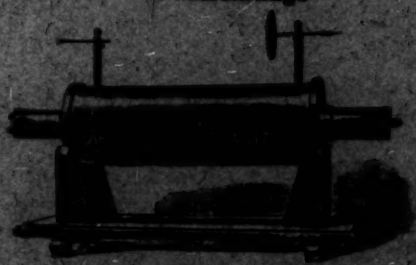
Trockene Schieberluftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Hebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. Fritz Banneitz, Gerhard Rhein und Benno Kurze. Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase 113
2. G. Falckenberg. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Wassers, Äthylalkohols, Methylalkohols und Acetons vom Druck 145
3. G. Falckenberg. Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-9}$ 187
4. George Jaffé. Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden 173
5. Marie Anna Schirmann. Versuch einer einheitlichen Erklärung der Erscheinungen der atmosphärischen Polarisation . 191
6. Karl Heil. Läßt sich ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen nachweisen? 201

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 3.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl auszuführen.

1920. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase;* von *Fritz Banneitz, Gerhard Rhein und Benno Kurze.*

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Leipzig.)

Inhaltsübersicht: 1. Allgemeines. — 2. Die Wärmeisolation. — 3. Doppelwandige Glasgefäße. — 4. Gefäße aus Zelluloid. — 5. Gefäße der Firma Ahrendt. — 6. Vorversuche mit Metallgefäßen. — 7. Doppelwandige Metallgefäße. — 8. Weitere Versuche mit Metallvakuumgefäßen, insbesondere Schutz gegen Wärmestrahlung. — 9. Über die Entgasung von Eisenblechen.

Die vorliegenden Untersuchungen entstanden im Anschluß an Versuche von Prof. Lilienfeld, der schon vor mehreren Jahren ein Metallvakuumgefäß hat bauen lassen. Als mit Beginn des Krieges die Luftfahrt erhöhte Bedeutung erhielt, veranlaßte Prof. Wiener die Fortsetzung der Lilienfeldschen Bemühungen zur Gewinnung eines möglichst vollkommenen Metallvakuumgefäßes, die unter seiner und Prof. Lilienfelds ratender Beihilfe erfolgten. Auch mag nicht unerwähnt bleiben, daß Graf v. Zeppelin, als er von den Versuchen hörte, ihre Bedeutung für gewisse Aufgaben der Luftfahrt erkannte und den lebhaftesten Anteil an dem Fortgang der Arbeiten nahm.

Da der Bau großer Metallvakuumgefäße außerhalb der Leistungsfähigkeit eines Universitätslaboratoriums liegt und unsere Arbeiten zudem erheblich unter den Schwierigkeiten der Materialbeschaffung litten, so mußten wir uns darauf beschränken, die Grundsätze aufzustellen, nach denen stationäre und transportable Gefäße für verflüssigte Gase zu konstruieren sind, wenn man den Abdampfverlust nach Möglichkeit herabzusetzen wünscht.

1. Allgemeines.

Als unsere Arbeit begann, benutzte man fast ausschließlich zur Aufbewahrung und zum Transport verflüssigter Gase

die von der Firma Burger in Berlin hergestellten doppelwandigen und versilberten Glasgefäße. Sie können maximal nur für 5 Liter hergestellt werden und haben außerdem den Nachteil, daß ihre Lebensdauer sehr begrenzt ist. Sie beträgt bei starker Benutzung infolge der bei oft wiederholter Temperaturänderung ausgelösten Glasspannungen durchschnittlich nur einige Monate.

Je größer ein solches Gefäß ist, desto geringer ist im Verhältnis zu seinem Inhalt der Verlust durch Verdampfung, da die Wärmezufuhr hauptsächlich der Oberfläche des Gefäßes proportional ist. Daher ist es zweckmäßig, ein großes Gefäß statt mehrerer kleiner zu benutzen. In erster Annäherung wird man den absoluten Abdampfverlust der $^2/_3$ Potenz des Volumens proportional setzen dürfen, den prozentischen Abdampfverlust umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus dem Volumen.

Der Gewichtsverlust der Flüssigkeitsmenge oder die Abdampfmenge eines Gefäßes gibt das beste Kriterium für seine Güte. Die Abdampfmenge für 24 Stunden soll mit A bezeichnet werden und es ist dann mit Rücksicht auf den Volum-inhalt I eines Gefäßes die prozentuale Abdampfmenge

$$A_p = \frac{A \cdot 100}{I}.$$

Zunächst sollen kurz die Mittel und Wege betrachtet werden, durch die ein Gefäß gegen Wärmezufuhr isoliert werden kann.

2. Die Wärmeisolation.

Die Abdampfmenge eines Gefäßes für flüssige Gase wird hervorgerufen: a) durch die Wärmeleitung des Materials, aus dem das Gefäß hergestellt bzw. mit dem es umgeben ist, in Richtung senkrecht zu den Gefäßwänden, b) durch die durch Wandungen und Halsöffnung eindringenden Wärmestrahlen, c) durch die Wärmeleitung der Halswandung und d) durch den Wärmeaustausch, der durch die Halsöffnung erfolgt.

a) Wegen der sehr geringen Wärmekapazität und Verdampfungswärme flüssiger Gase ist es notwendig, ein möglichst gutes Isolationsmittel zu benutzen.

Eines der besten Wärmeisolationsmittel ist die Luft. Doch stört hier die Wärmekonvektion infolge der Umlaufbewegung

der Luft, die nur in sehr engen Gefäßen vermieden wird. Die Hintanhaltung solchen Umlaufs ist der Zweck von porösen Stoffen, wie Federn, Jute, Kork, Gummi und Kieselgur. Aber ein Teil der günstigen Wirkung dieser Stoffe wird wieder aufgehoben durch ihre eigene, gegenüber der Luft größere Wärmeleitung.

Ein öfters in der Patentliteratur ausgesprochener Gedanke, die kalten Gase der verdampfenden Flüssigkeit zur Isolation und stufenweisen Kühlung des Gefäßes zu benutzen, hat zu dem folgenden Versuch geführt:

Es wurde ein 2 Liter fassendes Gefäß aus Pappe (Fig. 1) hergestellt. Dasselbe war mit einem Abstand von 1 cm von einem zweiten umgeben, und dieses wiederum von einem dritten. Wird das innere Gefäß mit flüssiger Luft gefüllt, so durchstreichen die hier entstehenden kalten Gase die Zwischenräume, wie in der Figur durch Pfeile erkenntlich, und sollen dadurch die Stärke der Verdampfung verringern. Außerdem waren die innere Wandung des äußeren und die äußere Wandung des mittleren Gefäßes mit Stanniol beklebt, um die Strahlung abzuhalten.

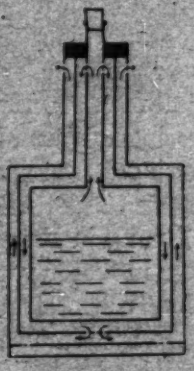


Fig. 1.

Das Resultat mit diesem geschachtelten Pappgefäß war wider Erwarten schlecht. Es verlor in einer Stunde 0,4 kg flüssige Luft, das macht in 24 Stunden 9,6 kg.

Die oben erwähnte Zirkulation verschwindet durch möglichste Luftleere, die zugleich die Wärmeleitung der Luft herabsetzt (Weinhold, Dewar). Das günstigste ist also das extreme Vakuum. Dieses Prinzip ist bei den an einer Luftpumpe evakuierten doppelwandigen Glasgefäßen der Firma Burger angewandt.

Es ist auch versucht worden, ein gutes Vakuum dadurch herzustellen, daß man die Luftfüllung des Zwischenraumes eines doppelwandigen Gefäßes mechanisch durch ein Gas verdrängt, das bei der Temperatur der flüssigen Luft kondensiert wird. Es entsteht dadurch von selbst ein Vakuum, falls diese Gasfüllung keinerlei Beimengung von anderen Gasen enthält, die bei der vorherrschenden Temperatur sich noch nicht verflüssigen.

Ferner hat man nach Dewar Holzkohle zwischen den Wandungen so angebracht, daß diese durch den kalten Inhalt abgekühlt wird und die noch vorhandenen Gase absorbiert (Ahrendt-Gefäße).

Diese beiden Methoden haben den Nachteil, daß es dabei sehr schwierig ist, die letzten Gasreste zu entfernen.

b) Eine starke Wärmezufuhr tritt durch Strahlung ein, wenn man Gefäße benutzt, die Licht- oder Wärmestrahlen durchlassen. Bei Glasgefäßen schützt man sich hiergegen bekanntlich durch Versilberung der Glaswände.

c) Doppelwandige Vakuumgefäße haben eine direkte Verbindung der äußeren Wandung mit der inneren im allgemeinen an der Einfüllstelle. Hier kommt die direkte Leitfähigkeit des Materials zur Geltung, die bei Verwendung von Metallen sehr von Bedeutung sein kann. Es ist daher zweckmäßig, daß man zur Herstellung des Halses ein Material von möglichst geringer Wärmeleitfähigkeit wählt, und dem Hals einen tunlich geringen Durchschnitt verleiht.

d) Zuletzt kommt noch die Wärmezufuhr durch die Halsöffnung in Frage, die wohl hauptsächlich durch die Zirkulation der in dieser vorhandenen Gase und durch die dort eindringenden Wärmestrahlen hervorgerufen wird.

Die Summe dieser Verluste gibt die Gesamtverluste eines Gefäßes an, die sich einfach durch Wägung ermitteln lassen. Schwieriger ist es hingegen, diese Verluste zu trennen oder einzeln festzustellen.

Durch die im folgenden beschriebenen Versuche sollen die Einzelverluste nach Möglichkeit ermittelt werden. Auch werden Versuche beschrieben, bei denen verschiedene Materialien und Herstellungsarten ausgeprobt wurden.

3. Die doppelwandigen Glasgefäße.

a) *Verluste in diesen Gefäßen.* Zur Aufbewahrung und zum Transport verflüssigter Gase werden von der Firma Burger Gefäße in zwei Größen hergestellt, die 2 bzw. 5 Liter fassen. Zur Ermittelung der Gesamtverluste solcher Gefäße wurden sie mit flüssiger Luft gefüllt, und die Gewichtsabnahme des Inhalts während einer bestimmten Zeit festgestellt.

Da flüssiger Sauerstoff etwas langsamer verdampft als flüssiger Stickstoff, so wird der zurückbleibende Rest einer

gegebenen Menge flüssiger Luft allmählich immer sauerstoffreicher und verdampft dementsprechend langsamer. Dieser Unterschied ist jedoch gering und kommt bei diesen Versuchen nicht in Frage.

Ferner kann es von Bedeutung sein, ob ein solches Gefäß ganz oder teilweise mit flüssiger Luft gefüllt ist, denn die die flüssige Luft berührenden Oberflächen der Wandungen nehmen nicht proportional der Menge der Flüssigkeit ab. Nehmen wir ein kugelförmiges Gefäß an, so wird die Oberfläche der den jeweiligen Inhalt berührenden Wandungen prozentual größer, je weniger Flüssigkeit im Gefäß vorhanden ist. Hieraus könnte man schließen, daß die Flüssigkeit um so schneller verdampfen würde, je weniger im Gefäß ist. Die hier untersuchten Gefäße der Firma Burger sind nun aber so gut ausgepumpt, daß dies kaum in Betracht kommt, denn die Leitfähigkeit der Glaswandung ist hierbei größer als die Leitfähigkeit des Vakuums. Infolgedessen spielt bei gutem Vakuum die ganze Oberfläche stets dieselbe Rolle, einerlei bis zu welchem Grade das Gefäß gefüllt ist.

Dies wurde experimentell dadurch gefunden, daß das Gewicht eines mit flüssiger Luft gefüllten 5 Liter-Gefäßes in bestimmten Zeitintervallen festgestellt wurde. Aus den Differenzen ergibt sich dann der jeweilige Verlust an flüssiger Luft. Dieses Gefäß war, in Watte verpackt, in einem Holzkasten untergebracht und mit einem Wattepfropfen verschlossen.

Trägt man die so gefundenen Gewichte als Funktion der Zeit auf, so erhält man eine fast gerade Linie (Fig. 2, Kurve I).

Es verdampfte die ganze Flüssigkeit von 4,81 kg flüssiger Luft in 13 Tagen. Das ergibt im Mittel 370 g Verlust in 24 Stunden oder prozentual zum Inhalt 7,7%/24 Std. Am ersten Tage verdampften 380 g/24 Std., während der Verlust am letzten Tage 350 g/24 Std. betrug.

Zum Vergleich wurden noch verschiedene andere 5 Liter-Gefäße untersucht, die hierbei zwar nur bis zur Hälfte gefüllt wurden. Dieselben verloren im verpacktem Zustand 370, 361 (0,025 kg/Tag auf 1 dm^2 Gefäßoberfläche), 394 und 380 g in 24 Stunden.

Sodann wurde der gleiche Versuch mit einem 2 Liter-Gefäß vorgenommen. Dieses war mit einer 2 cm dicken Filzschicht umgeben und in ein Drahtgestell eingebaut. Auch

hierbei ergab sich eine gerade Linie (Fig. 2, Kurve II). Dieses Gefäß verlor seinen Inhalt von 1,88 kg flüssiger Luft in 7 Tagen und 20 Stunden. Das ergibt im Mittel einen Verlust von 240 g in 24 Stunden oder prozentual zum Inhalt 12,7%/24 Std.

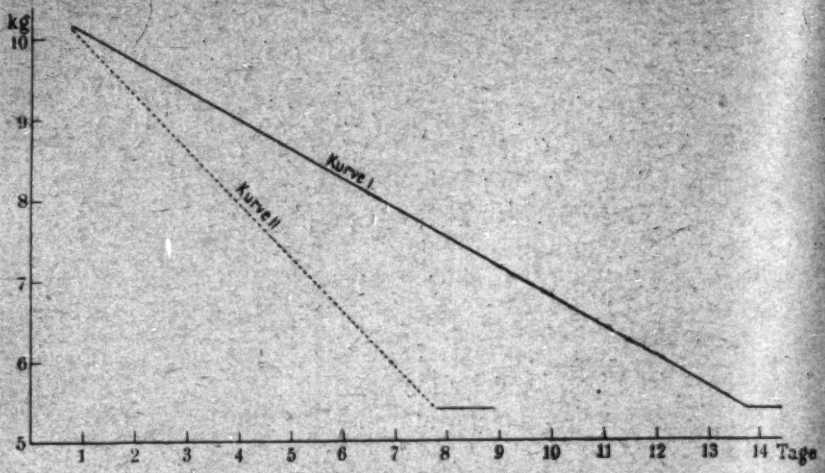


Fig. 2.

Ebenso wurden noch verschiedene andere 2 Liter-Gefäße im verpackten Zustand untersucht. Dieselben verloren 240, 250 und 224 g/24 Std.

b) *Einfluß der Verpackung und des Verschlusses.* Es erschien nun auch wünschenwert, festzustellen, wie groß der Einfluß der Verpackung auf die Verluste des Gefäßes ist. Zu diesem Zweck wurden die Gefäße einmal mit und einmal ohne Verpackung ausgewogen. Es ergab sich, daß die Verluste eines 5 Liter-Gefäßes bei Watteverpackung um 2,6% niedriger waren. Durch Entfernen des als Verschluß dienenden Wattepfropfens wurden die Verluste um noch weitere 5% vergrößert; also vermindert die Gesamtverpackung den Verlust um rund 8%.

c) *Wärmeleitung durch die Halswandung.* Die Wärmezufuhr durch die Glaswandung des Halses läßt sich verhältnismäßig einfach ermitteln, wenigstens angenähert. Es wurde zu diesem Zweck ein 2 Liter-Gefäß, dessen Abdampfmenge unter normalen Verhältnissen bekannt war, mit flüssiger Luft etwa dreiviertel voll gefüllt. Dann wurde ein Glasstab von bekanntem Querschnitt und $^1/_2$ m Länge in das Gefäß hinein-

getaucht, so daß das untere Ende des Stabes etwa 5 cm in flüssiger Luft stand, während das andere Ende aus dem Gefäß herausragte. Mittels Wattepfropfens wurde der freibleibende Teil der Halsöffnung verstopft. Das obere Ende des Glasstabes war hierbei auf Zimmertemperatur, das untere auf der Temperatur der flüssigen Luft. Zwischen beiden Enden bestand demnach ein Temperaturgefälle von 210°. Durch Wägung wurde jetzt wieder festgestellt, wieviel das Gefäß mit dem Glasstab verlor. Dieser Verlust, vermindert um den Verlust des Gefäßes unter normalen Verhältnissen, ergibt den Verlust, der durch die Leitung des Glasstabes herbeigeführt wird. Auf dieses Weise wurde der Versuch nun mit Glasstäben von verschiedener Dicke ausgeführt und es ergab sich hierbei im Mittel ein Verlust von 30 g/24 Std. pro Quadratzentimeter Glasquerschnitt.

Der Glashals eines 5-Liter-Gefäßes hat bei einer lichten Weite von 4 cm einer Dicke des Glases von 1,3 mm den Querschnitt von 169 qmm. Man kann also hieraus schließen, daß bei einem 5-Liter-Glasgefäß der Verlust durch die Leitfähigkeit der Halswandung 51 g/24 Std.[1]) beträgt.

Bei einem 2-Liter-Gefäß, das einen Querschnitt des Halses von 128 qmm hat, wenn man die lichte Weite zu 3 cm und die Wandstärke zu 1,3 mm einsetzt, berechnet sich der Verlust zu 38 g/24 Std.[1])

d) *Verlust durch Strahlung.* Die Wärmezufuhr durch Strahlung ist bedeutend schwieriger zu bestimmen, denn sie hängt sowohl von der Absorption wie von der Durchlässigkeit der Versilberung ab. Wir können einen Vergleich ziehen zwischen einem versilberten und einem unversilberten Gefäß und ermitteln dadurch, wieviel Wärmezufuhr durch die Versilberung abgehalten wird. Man findet aber hierdurch immer noch nicht, wieviel Wärmestrahlen noch durch die versilberten Wände hindurchtreten.

Einen oberflächlichen Vergleich erhalten wir, wenn wir ein normales doppelwandiges und versilbertes mit einem unversilberten vergleichen, unter der Annahme, daß in beiden Gefäßen das Vakuum das gleiche ist.

Es stand auch ein dreiwandiges, nicht versilbertes Gefäß von etwa 2 Litern Inhalt zur Verfügung, das 2,68 kg/24 Std.

1) Ohne Berücksichtigung der Versilberung des Glases.

und ein gleichgroßes doppelwandiges, welches 3,0 kg/24 Std. (nicht verpackt) verlor, während ein versilbertes Gefäß etwa 250 g/24 Std. verliert.

Man ersieht hieraus, daß der Einfluß der Strahlung ganz bedeutend ist.

Eine Überschlagsrechnung aus den oben angegebenen Daten kann uns schon einen Anhalt geben. Ein evakuiertes, aber nicht versilbertes 2-Liter-Gefäß verliert allein durch Strahlung etwa 2,5 kg/24 Std. Durch die Versilberung machen wir nun das Gefäß für Strahlen undurchdringlich mit Ausnahme der Halsöffnung. Diese beträgt etwa 0,7% der Kugeloberfläche. Die durch den Hals eindringenden Strahlen würden demnach nur 17,5 g/24 Std. der Flüssigkeit verdampfen. Nach dem Versuch mit dem doppelwandigen unversilberten 2-Liter-Gefäß würde sich der Einfluß der Halsstrahlung zu 20 g/24 St. ergeben..

e) *Abhängigkeit vom Vakuum.* Wie schon erwähnt, spielt die Güte des Vakuums eine große Rolle. Um nun den Verlauf der Verluste für verschiedene Vakua festzustellen, und um zu erfahren, wie weit man durch Verbesserung des Vakuums kommen kann, wurde ein versilbertes 2-Liter-Gefäß bei verschiedenen Drucken untersucht. Unter Zwischenschaltung einer mit flüssiger Luft gekühlten Vorlage wurde es an eine Gäde-Quecksilberpumpe, die in Verbindung mit einem Mac-Leod-Manometer stand, angeschlossen.

Für die Werte bis zu 1 Hunderttausendstel Millimeter zeigt das Mac-Leod noch die Drucke an; unterhalb dieses Druckes sind wir jedoch auf Schätzungen angewiesen.

Wir wollen daher hier noch folgende Vakua unterscheiden: 1. Das Vakuum, das man mit der Pumpe erreicht, ohne daß das auszupumpende Gefäß erwärmt wird (Vakuum I); 2. das Vakuum, das wir mit den zu Gebote stehenden Hilfsmitteln als äußerstes erreichen können (Vakuum II). Dies äußerste Vakuum wurde durch Zuhilfenahme der absorbierenden Wirkung gekühlter Kokosnußkohle hergestellt. Direkt an das auszupumpende Gefäß wurde hierbei ein zylinderförmiges Gefäß angeschmolzen, in dem sich die Kokosnußkohle befand. Diese beiden Gefäße wurden während des Evakuierens auf 400 bis 450° erhitzt. War nach mehrstündigem Pumpen ein konstanter Druck erreicht, so wurden diese beiden Gefäße von

der Pumpe abgeschmolzen, und dann nach Abkühlung des Kohlegefäßes, letzteres in flüssige Luft getaucht. Um die Absorption durch die Kokosnußkohle gut auszunutzen, wurde das auszupumpende Gefäß noch weiter erhitzt, während das Kohlegefäß sich in flüssiger Luft befand. Nachdem dies einige Stunden geschehen war, wurde durch Abschmelzen das Versuchsgefäß von dem Kohlegefäß getrennt.

Für die Herstellung eines guten Vakuums ist es von großer Bedeutung, daß das zu evakuierende Gefäß lange Zeit gleichmäßig erhitzt wird, damit die an den Wandungen haftenden Gase entfernt werden. Aus Gründen, die namentlich bei den später beschriebenen Versuchen in Frage kommen, wurde die Erhitzung des auszupumpenden Gefäßes mittels Wirbelströme herbeigeführt. Zu diesem Zweck wurde das Gefäß von einem 2 mm starken Eisenblech umgeben, das ringförmig zusammengenietet, in einzelnen Teilen um das Gefäß herumgebaut werden konnte. Der Zwischenraum zwischen Glasgefäß und diesem Eisenmantel wurde mit aufgelockertem Asbest ausgefüllt, um ein Berühren von Glas mit Eisen zu vermeiden und um Luftströmungen in diesem Zwischenraum auszuschließen. Der Eisenmantel wurde nun außerdem noch außen mit Asbest eingehüllt und von einer aus 5 mm starken Kupferdraht bestehenden Spirale umgeben. Durch diese Wickelung wurde ein Wechselstrom von 600 Perioden in der Sekunde geschickt. In Fig. 3 ist diese Anordnung wiedergegeben. Der dort eingezeichnete Quecksilberverschluß, der als Sicherheitsventil bei den Abdampfproben diente, wurde während des Heizens entfernt. Mittels eines Stickstoffthermometers wurde die Temperatur im Inneren des auszupumpenden Gefäßes, die bis auf 450° gesteigert werden konnte, gemessen, und ein Platin-Platin-Rhodium-Thermoelement, das an dem Eisenmantel anlag, ließ dessen Temperatur erkennen. Bei Herstellung der besten Vakua mußte das

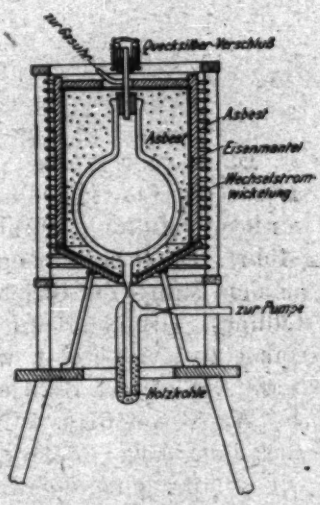


Fig. 3.

Gefäß stundenlang erhitzt werden. Hierbei war ein Energieverbrauch an Wechselstrom von 3400 Watt erforderlich. Das für die Herstellung des Vakuums II benutzte Gefäß mit Kokosnußkohle wurde mit einem Thermostaten und Bunsenbrenner auch bis auf etwa 450° erhitzt.

Bei diesen Versuchen, abgesehen von dem mit extremem Vakuum, wurde das Gefäß nicht abgeschmolzen. Es war daher nicht möglich, den Gewichtsverlust durch Wägung festzustellen. Um trotzdem ein Maß für die Abdampfmenge zu erhalten, wurden die entwickelten Gase durch eine geeichte Gasuhr geleitet. Die Eichung dieser Gasuhr wurde den Messungen entsprechend mit flüssiger Luft ausgeführt, so daß die mit derselben gemessene Luftmenge durch Gewichtsverlust an flüssiger Luft ausgedrückt werden konnte.

Bei Ausführung des Versuches zur Bestimmung der Abhängigkeit vom Vakuum wurde mit der Gädepumpe das Gefäß nebst anschließendem Röhrensystem bis zum gewünschten Druck ausgepumpt und mittels Mac-Leod der Druck gemessen. Dann wurde das Gefäß zur Hälfte mit flüssiger Luft gefüllt, und die Öffnung mit dem in Fig. 3 eingezeichneten Quecksilberverschluß abgesperrt, so daß die entweichenden Gase durch die Gasuhr strömen mußten. Während des Versuches wurde wiederholt eine Druckbestimmung vorgenommen und der nach der Abkühlung vorherrschende Druck im Mittelwert in Rechnung gesetzt.

Da es sehr schwierig war, das Gefäß bei jedem Versuch bis zur gleichen Höhe mit flüssiger Luft wieder zu füllen, so wurde die Füllung jedesmal nur ungefähr bis zur Hälfte ausgeführt. Die Gesamtmenge der eingefüllten Luft ergab sich dann aus dem Stande der Gasuhr, nachdem alles verdampft war (Endstellung), vermindert um den Stand der Gasuhr zu Beginn des Versuches. Außerdem wurden in bestimmten Zeitintervallen durch Ablesen des Standes der Gasuhr Zwischenwerte ermittelt.

Wie schon oben bemerkt, verläuft die Gewichtsabnahme eines gut ausgepumpten Gefäßes geradlinig. Ist der Druck jedoch über einem gewissen Wert, etwa über $^1/_{1000}$ mm, so können wir die Gewichtsabnahme nicht mehr als geradlinig annehmen, denn es spielt dann die Wärmeleitung durch die umgebende Luft schon eine größere Rolle gegenüber der Leitfähigkeit des Glases.

Wir haben hier also eine Abhängigkeit von der Oberfläche der die Flüssigkeit berührenden Wandung. Um nun ein gleiches Maß für die verschiedenen Kurven zu haben und um die Gewichtsabnahme für die verschiedenen Vakua miteinander vergleichen zu können, wurden alle Beobachtungen auf eine bestimmte Füllung des Gefäßes reduziert, und zwar auf einen Inhalt von 300 g flüssiger Luft.

Konstruieren wir für jeden Druck eine Kurve, die den jeweiligen Inhalt des Gefäßes als Funktion der Zeit wieder-

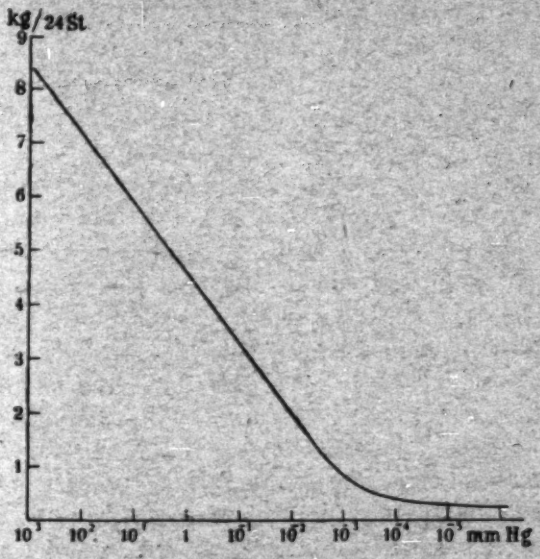


Fig. 4.

gibt, so können wir aus der Neigung dieser Kurven zur Abszisse bei 300 g Füllung die Abdampfmenge pro 24 Stunden ermitteln. Diese Abdampfmengen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und ergeben die Kurve Fig. 4, wenn die Drucke logarithmisch aufgetragen werden.

	p mm	log p	Abdampfmenge A g/24 Std.
	760	2,8808	8210
	6,4	0,8062	4600
	0,72	0,8573 – 1	4440
	0,0013	0,1139 – 3	880
	0,00014	0,1461 – 4	460
Vakuum I.	0,0000423	0,6263 – 5	410
Vakuum II.	0,0000175	0,2430 – 5	240

Man ersieht hieraus, daß sich die Verluste des Gefäßes mit besser werdendem Vakuum einem Grenzwert nähern. Nehmen wir an, daß dieser Grenzwert bei 200 g/24 Std. liegt, so können wir die Ursache dieses restierenden Verlustes nicht mehr auf die Leitfähigkeit des Vakuums schieben.

f) *Diskussion der Verluste in doppelwandigen Glasgefäßen.* Füllen wir ein weder ausgepumptes noch versilbertes doppelwandiges 2-Liter-Glasgefäß mit flüssiger Luft, so verliert es in 24 Stunden 9,6 kg. Ein versilbertes und nicht ausgepumptes Gefäß verliert dagegen nur 8,2 kg/24 Std. Pumpen wir letzteres bis zum äußersten Vakuum aus, so verliert es nur noch 200 g/24 Std. Diesen Verlust können wir noch weiter verringern, wenn wir das Gefäß in Watte verpacken und mit einem Wattepfropfen verschließen. Es verliert dann nur noch 185 g/24 Std. (0,023 kg/Tag auf 1 dm² Gefäßoberfläche). Von diesem Verlust wird hervorgerufen durch die Leitung der Glaswandung des Halses 38 g, durch die Strahlung durch die Halsöffnung 20 g. Ein kleiner Betrag mag noch infolge der Leitung durch die Versilberung des Halses hinzukommen; er wird aber in Anbetracht der geringen Dicke der Silberschicht — vielleicht 0,001 mm — kaum stark in Betracht kommen. Der übrig bleibende Rest von 127 g/24 Std. kann in der Hauptsache anscheinend nur noch durch Wärmeeinstrahlung hervorgerufen werden. Eine Frage für sich ist, wieviel davon darauf zurückzuführen ist, daß die Versilberung nicht dicht genug ist und noch Wärmestrahlen durchläßt, und wieviel noch dann übrig bliebe, wenn der Spiegel überall zuverlässig zusammenhinge.

4. Gefäße aus Zelluloid.

Auf Vorschlag von Hrn. Banneitz wurde der Versuch mit einem doppelwandigen Gefäß aus Zelluloid gemacht. Vorversuche ergaben bereits, daß das Zelluloid bei tiefen Temperaturen wesentlich spröder ist als bei gewöhnlichen Temperaturen und sich nur um ein Geringes verbiegen läßt ohne zu brechen.

Weitere Versuche ergaben, daß eine Zelluloidkugel vollständig luftdicht hergestellt werden kann.

Eine Kugel von 0,8 mm Dicke wurde von dem Luftdruck eingedrückt, so daß man später zu einer Dicke von 8 mm überging. Das Zelluloid gibt zwar sehr viel Gase ab, in denen

mit Hilfe eines Spektralrohres hauptsächlich Kohlenwasserstoffe und Wasserstoff erkannt werden konnten. Aber diese Gase kondensieren sich zur Hauptsache bei tiefen Temperaturen, da das Vakuum nach Eintauchen der Kugel in flüssige Luft wesentlich verbessert wurde.

Auf Grund dieser günstigen Vorversuche wurde ein doppelwandiges Gefäß aus Zelluloid hergestellt, dessen Ausführung in Fig. 5 wiedergegeben ist. Man gelangt zu einem Vakuum, das durch die Dampfspannung des Zelluloids begrenzt ist. In diesem Zustand verlor das Gefäß bei nicht versilberten Wandungen 2,5 kg in 24 Std., also nicht mehr, als ein gut evakuiertes Glasgefäß ohne Versilberung.

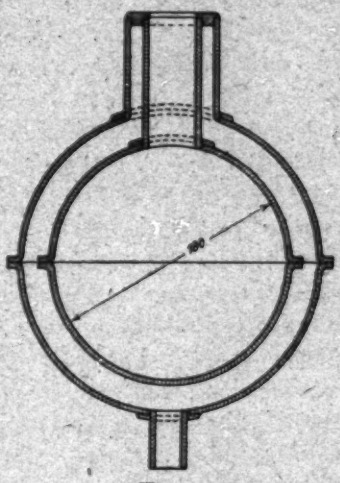


Fig. 5.

Eine Versilberung der Wandungen ist nicht geglückt.

Die Versuche mußten schließlich deshalb abgebrochen werden, weil das Gefäß bei späteren Füllungen mit flüssiger Luft sprang. Die Sprödigkeit dieses Materials bei tiefen Temperaturen ist offenbar zu groß, um die durch das Einfüllen der flüssigen Luft bedingten Spannungen auf die Dauer und mit Sicherheit auszuhalten.

5. Gefäße der Firma Ahrendt.

a) *Konstruktion.* Seit einiger Zeit werden von der Firma Ahrendt Transportgefäße für verflüssigte Gase in den Handel gebracht, die aus Metall hergestellt sind. Die Konstruktion ist, soviel uns bekannt, etwa die folgende.

Ähnlich wie bei den Glasgefäßen sind auch hier zwei kugelförmige Gefäße aus Messingblech ineinander gebaut, so daß das innere Gefäß durch den Hals am äußeren hängt. Der schwache Hals des inneren Gefäßes ist aus Manganstahl hergestellt, um die Leitfähigkeit desselben möglichst herabzusetzen. Der Zwischenraum zwischen den beiden Teilen ist ausgepumpt, aber nicht bis zum äußersten Vakuum, sondern nur mit einer Ölpumpe bis auf einige Millimeter Druck. Um die übrigen

Gasreste zu entfernen, ist Holzkohle zwischen beiden Wandungen so angebracht, daß sie von der eingefüllten flüssigen Luft abgekühlt wird und dabei die Gasreste absorbiert. Das Ganze ist in einem stabilen zylinderförmigen Eisenbehälter untergebracht.

Das innere Gefäß hängt frei am Halse des äußeren. Das Ausgießen des Inhalts geschieht durch Neigung, wobei die Wandung des inneren Gefäßes sich mit der des äußeren berührt (Patent Ahrendt). Die hierdurch eintretende Wärmezufuhr drückt dann die flüssige Luft aus der an und für sich engen Öffnung des Halses.

b) *Festgestellte Verluste.* Es standen zu Versuchszwecken zur Verfügung: ein 5-Liter-Gefäß, ein 15-Liter-Gefäß und ein 25-Liter-Gefäß. Die Abdampfmengen wurden wie oben durch Wägung ermittelt. Es ergab sich, daß das 5-Liter-Gefäß seinen ganzen Inhalt in 6 Tagen verlor. Der Gewichtsverlust fand gleichmäßig statt und betrug 1,095 kg/24 Std. bzw. 22% vom Inhalt (0,075 kg/Tag auf 1 dm^2 Gefäßoberfläche).

Das 15-Liter-Gefäß wurde in gleicher Weise untersucht und es stellte sich heraus, daß dasselbe relativ zu seiner Oberfläche bedeutend mehr als das 5-Liter-Gefäß verlor. Der Verlust betrug im Mittel 2,671 kg/24 Std. bzw. 18% vom Inhalt. Da hier anscheinend ein Fabrikationsfehler vorlag, wurde hierfür von der Firma ein anderes gleichgroßes Gefäß geliefert, dessen Untersuchung einen Verlust von 1,026 kg/24 Std. bzw. 7% vom Inhalt ergab (0,084 kg/Tag auf 1 dm^2 Oberfläche).

Bei dem 25-Liter-Gefäß wurden 1,258 kg in 24 Stunden (0,029 kg/Tag auf 1 dm^2) bzw. 5% vom Inhalt als Verlust festgestellt.

Nach Angaben der Firma sollen die 5-Liter-Gefäße in 24 Stunden 432—1920 g verlieren, je nachdem die Gefäße aus Sparmetall oder zum Teil aus Ersatzmetall ausgeführt sind. Für die 25-Liter-Gefäße wird ein Verlust von 1080 bis 1920 g in 24 Stunden angegeben. Die Firma garantiert, daß ihre Gefäße (wenn von Sparmetall hergestellt), nicht mehr als 1,5 kg in 24 Stunden verlieren, gibt aber bei dieser Garantie keine Unterschiede für die verschiedenen Größen an. Die größten von der Firma offerierten Gefäße fassen 100 Liter.

6. Vorversuche mit Metallgefäßen.

a) *Das Nickelgefäß von Lilienfeld.* Bereits vor mehreren Jahren hat Prof. Lilienfeld ein Metallgefäß für verflüssigte

Gase zu Versuchszwecken bauen lassen. Dasselbe stand noch zur Verfügung und wurde nochmals untersucht. Es besteht aus kugelförmig gepreßtem Nickelblech, ist doppelwandig und hat etwa 1 Liter Inhalt. Der Hals der inneren Wandung ist durch ein zwischengesetztes Glasrohr von dem äußeren Mantel getrennt. Hierdurch soll die metallische Wärmeleitung durch den Hals vermieden werden. Dieses Glasrohr ist unter Zwischensetzung von Platin luftdicht mit dem Nickel verbunden. | Die übrigen Wandungen des Gefäßes sind hart mit Silber verlötet. Außerdem sind noch einige Stützen zwischen beiden Gefäßen angebracht, um eine gleichmäßig sichere Lage für das innere Gefäß zu gewährleisten und den zerbrechlichen Glashals vom Druck zu entlasten. Dieses Gefäß ist auch mit einem Spektralrohr versehen und im Jahre 1913 von Prof. Lilienfeld ausgepumpt worden. Das Vakuum hat sich bis jetzt gut gehalten. Nach Angabe von Prof. Lilienfeld fluoresziert das Spektralrohr jetzt noch genau so wie vor Jahren.

Dieses Gefäß verlor jetzt 1,2 kg/24 Std. flüssige Luft. Es wurde an den äußeren Wandungen außerdem sehr kalt und es fand dort Eisbildung statt. Während flüssige Luft im Gefäß war, wurde das Vakuum durch die Abkühlung bedeutend besser und es ging durch das Spektralrohr keine Entladung mehr. Eine Isolation dieses Gefäßes mit Eiderdaunen verbesserte das Resultat auf 775 g/24 Std. (0,16 kg/Tag dm^3).

Es geht hieraus hervor, daß ein außerordentlich gutes Vakuum die Vorbedingung für die praktische Verwertbarkeit eines solchen Gefäßes ist. Die weiteren Versuche sollen zeigen, ob es möglich ist, ein brauchbares Gefäß aus Metall zu konstruieren, von dem man nachher auf die geforderten größeren Gefäße schließen kann.

b) *Material, Wandstärke, Dichtigkeit.* Vor allen Dingen war festzustellen, welche Metalle geeignet sind, welche Wandstärke als Minimum vorausgesetzt werden muß, und womit die Verbindungsstellen gelötet bzw. gedichtet werden müssen.

Für diese Vorversuche wurden kugelförmige Gefäße hergestellt, die, mit einem Glashals versehen, unter Zwischenschaltung von Platin an die Luftpumpe angeschlossen werden konnten. Die Kugelgefäße wurden aus zwei gedrückten Halbkugeln zusammengesetzt und hart verlötet. An Material stand nur Kupfer und Eisen zur Verfügung. Bei Eisen sind Schlacke-

einschlüsse vorhanden, über die sich von vornherein nichts sagen läßt. Man wird daher die Wandstärke nicht zu dünn wählen dürfen. Das beste Resultat wurde bei diesen Versuchen mit einer Wandstärke von 1,5 mm erzielt.

c) *Lötstellen.* Auf die Verbindungsstellen muß ganz besonderer Wert gelegt werden, und es hat schon bei den Vorversuchen sehr viel Schwierigkeiten bereitet, die Lötstellen sicher zu dichten. Das zuerst angewandte Schlaglot bewährte sich nicht. Durch die notwendige Erhitzung beim Auspumpen bildeten sich kleine Kanäle und Poren, die hauptsächlich durch anhaftende Oxyde und Reste des Lötmittels (Borax) zustande kamen, und die vom Lötmaterail selbst nicht ausgefüllt waren.

Ebenso schlecht war die Lötung mit Zinn, abgesehen davon, daß man ein mit Zinn gelötetes Gefäß beim Evakuieren nicht hoch genug erhitzen kann.

Erst eine ganz sorgfältige Lötung mit einer Silberlegierung führte zum Ziele. Es wurde hierbei so verfahren, daß die zu verlötenden Stellen zuerst sauber versilbert wurden und, dann miteinander in Verbindung gebracht, mit einem Schweißbrenner so stark erhitzt wurden, daß das Silberlot dünnflüssig zwischen beiden Lötstellen lief.

d) *Die Herstellung des Vakuums.* Die Herstellung eines guten Vakuums in Metallgefäßen ist ganz besonders schwierig. Die für die Versuche hergestellten Gefäße wurden, mit einem Spektralrohr versehen, an eine rotierende Gäde-Hg-Pumpe angeschlossen und ausgepumpt. Im kalten Zustand pumpt man die Gefäße ohne weiteres bis zum harten Röntgenvakuum. Dieses Vakuum reicht aber bei weitem noch nicht aus. Man muß die an den Wänden haftenden Gase entfernen und eventuell vorhandene Kohlenwasserstoffe, die sich zum Teil in Form von Öltropfen kondensieren, herausbringen. Dies ist nur möglich, wenn man das Gefäß stark erhitzt.

Als einfachste Methode erwies sich auch hier die Erhitzung des auszupumpenden Gefäßes durch Wirbelströme. Die Anordnung der Fig. 3 ist hier besonders vorteilhaft, da die Wirbelströme direkt in den Wandungen des Gefäßes erzeugt werden. Das Gefäß wurde mit Asbest gut verpackt und ähnlich wie in Kapitel 3e beschrieben, mit einer aus 5 mm starkem Kupferdraht bestehenden Drahtspirale umgeben, durch die der

Wechselstrom mit 600 Perioden in der Sekunde geschickt wurde. Bei genügender Isolation des Gefäßes mit Asbest reicht eine Maschinenleistung von 3 KW. aus, um das Gefäß bis zur Rotglut zu erhitzen. Die Temperatur des Gefäßes wurde mittels Thermoelementes gemessen. Außerdem wurden noch an verschiedenen Stellen Glasröhren so durch die Asbestumhüllung geführt, daß man durch sie die Metallwand beobachten konnte und dadurch festzustellen vermochte, ob Rotglut erreicht war. An der Stelle, wo der Metallhals an Platin angelötet war, und letzteres an das Glasrohr, das zur Pumpe führte, angeschmolzen war, wurde weniger stark erhitzt.

Mit Eisenkugeln von 0,7 mm Wandstärke konnte trotz vorzüglicher Herstellung der Schweißstellen kein genügendes Dichthalten erzielt werden.

Es wurde daher eine starkwandige Eisenkugel von 1,5 mm Wandstärke hergestellt, und ganz besonders sorgfältig gelötet. Die zu verlötenden Stellen wurden zuerst mit einem Überzug des Lötmittels, das aus einer schwer schmelzbaren (etwa 600°) Silberlegierung bestand, versehen. Sodann wurden die zu verlötenden Teile aneinander gebracht und mit dem Schweißbrenner so stark erwärmt, daß das aufgetragene Silberlot dünnflüssig den Zwischenraum ausfüllte. Gleich beim ersten Auspumpen stellte sich heraus, daß bei diesem Gefäß das Vakuum bedeutend besser hielt, als bei den früheren. Das Gefäß wurde stark erhitzt und mehrere Male stundenlang ausgepumpt, und schließlich abgeschmolzen.

Nach Ablauf von 5 Tagen hatte sich das Vakuum kaum merklich geändert, so daß angenommen werden konnte, daß dieses Gefäß dicht war. Es wurde daher beschlossen, dasselbe als inneren Teil eines doppelwandigen Gefäßes zu benutzen. Die Versuche mit demselben werden später beschrieben werden.

e) *Wärmezufuhr durch die Metallwandung des Halses.* Genau wie wir oben die Wärmeleitung durch die Halswandung des Glasgefäßes ermittelt haben, wurde festgestellt, wie groß die Wärmezufuhr durch einen Metallhals ist. Wir benutzen hierzu wieder ein doppelwandiges Glasgefäß, dessen Verluste bekannt sind, und tauchen ein Metallrohr von bekanntem Querschnitt hinein. Aus der Zunahme des Verlustes ergibt sich dann die durch das Metallrohr herbeigeführte Wärmezufuhr.

Es wurde ein Eisenrohr von 6 mm äußerem, 4,5 mm innerem Durchmesser und 50 cm Länge untersucht. Es ergab sich eine Differenz der Abdampfmengen von 229 g/24 Std. Da der Metallquerschnitt hier 12,37 qmm betrug, berechnet sich der Verlust pro 1 qcm zu 1,85 kg/24 Std. für Eisen.

f) *Beeinflussen die ausströmenden kalten Gase die Wärmezufuhr durch die Halswandung?* Es erschein wissenswert, ob bei Verwendung eines Metallhalses die durch denselben ausströmenden kalten Gase den Hals besonders kühlen und dadurch die Wärmezufuhr durch die Halswandung vermindern, eine Frage, die durch Hrn. Prof. Lilienfeld aufgeworfen worden war.

Um hierüber genauere Angaben machen zu können, wurde der folgende Versuch gemacht. Ein doppelwandiges 5-Liter-Gefäß wurde wie in Fig. 6 mittels eines Quecksilberverschlusses nach außen hin abgeschlossen. Durch den Hals der Glocke (*G*) wurden ein Eisenrohr (*E*) von 6 mm äußerem und 4,5 mm innerem Durchmesser und ein Glasrohr (*R*) so angebracht, daß das entwickelte Gas entweder durch das Eisenrohr oder durch das Glasrohr strömen mußte. Diese Umstellung geschah mittels der Hähne H_1 und H_2. Die kalten Gase der verdampfenden flüssigen Luft sollten nun durch das 50 cm lange Eisenrohr der ganzen Länge nach strömen, unabhängig von der Höhe der Flüssigkeitsoberfläche im Gefäß. Daher wurde am unteren Ende des Eisenrohres ein 10 cm langer Kupferzylinder (*Cu*) angelötet. Die entweichenden Gase mußten durch diesen Kupferzylinder strömen, bevor sie in das Eisenrohr gelangten (in der Figur durch Pfeile gekennzeichnet). Der Kupferzylinder tauchte während des Versuches dauernd in flüssige Luft und hatte an allen Stellen die gleiche Tempe-

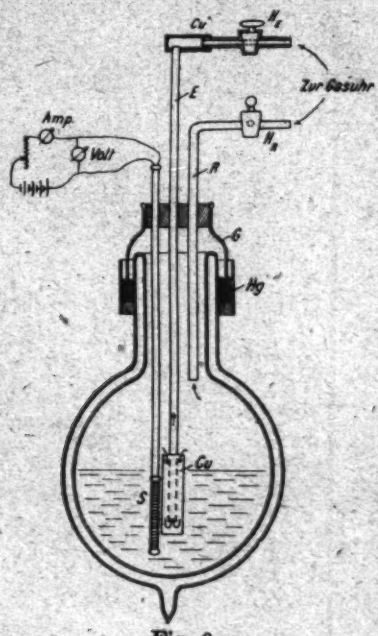


Fig. 6.

ratur von $-190°$. Am äußeren Ende des Eisenrohres herrschte Zimmertemperatur, was durch den dort aufgelöteten kleinen Kupferzylinder (*Cu'*) sichergestellt wurde. Um nun auch für verschiedene Gasmengen, die durch das Rohr strömen, den Einfluß auf dessen Leitfähigkeit feststellen zu können, wurde noch eine Heizspirale (*S*) in das Gefäß eingeführt. Mittels derselben konnten bis 10 Watt zugeführt werden. Diese Wärmezufuhr entsprach ungefähr einer Verdampfung von 3000 Liter flüssiger Luft in 24 Stunden.

Der Versuch verlief negativ, d. h. es ergab sich, daß in beiden Fällen stets gleiche Mengen verdampften, auch dann, wenn die oben genannte Menge zur Verdampfung kam.

7. Das doppelwandige Metallgefäß.

a) *Konstruktion.* Die schon bei den Vorversuchen (Kapitel 6d) ausgepumpte Eisenkugel von 1,5 mm Wandstärke, die sich als dicht erwiesen hatte, wurde nun zu einem doppelwandigen Gefäß verwendet. Diese Kugel wurde hierbei für den inneren Teil des Gefäßes benutzt. Sie wurde von einer zweiten aus zwei Hälften bestehenden Kugel von rund 30 cm Durchmesser umgeben. Die Konstruktion dieses Gefäßes geht aus Fig. 7 hervor. Der Abstand zwischen beiden Wandungen beträgt 1,8 cm. Das innere Gefäß ist mit dem äußeren am Halse verbunden, jedoch ist in die innere Halswandung ein Glasrohr von etwa 10 cm Länge eingesetzt, durch das die direkte Überleitung der Wärme von der äußeren Kugel auf die innere vermieden wird. Das Gefäß faßt 10 Liter und sein Leergewicht beträgt etwa 10 kg.

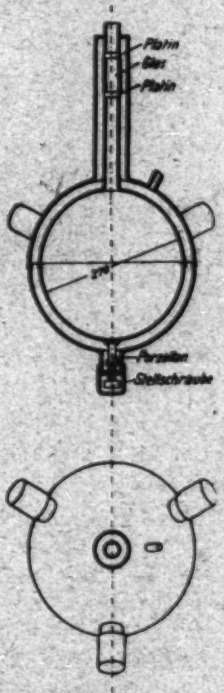


Fig. 7.

Entsprechend dem Gefäß von Prof. Lilienfeld mußte zur Entlastung des Glashalses die innere Kugel gegen die äußere abgestützt werden. In der Figur sind die Einzelheiten dieser Stützen (4 Stück) zu erkennen. Sie bestehen im wesentlichen aus einem Porzellanrohr als isolierendes Material zwischen der äußeren und inneren Kugel, dann aus den Stellschrauben,

mit deren Hilfe die innere Kugel in der äußeren zentrisch festgestellt werden kann. Nach der Einstellung dieser Stellschrauben wurden zur Dichtung Kappen über dieselben gesetzt und verlötet.

Da im Verlauf der Versuche sich die als Stützen dienenden Porzellanröhrchen als zu schwach bzw. zu zerbrechlich erwiesen, wurden sie durch Serpentinzylinder ersetzt. Der Wärmetransport durch diese Stützen wurde an einem Modell geprüft. Es ergab sich, daß der hierdurch bewirkte Mehrverlust pro Stütze rund 60 g/24 Std. beträgt. Die Verwendung von Stützen erwies sich jedoch besonders insofern als ungeeignet, als bei der Erhitzung des Gefäßes ihre stützende Wirkung durch die Ausdehnung des Metalles verloren ging, wodurch der Hals zu sehr beansprucht wurde und an der Verbindungsstelle zwischen Platin und Glas zerriß. Es wurde daher ein neues kleines 2 Liter fassendes Eisengefäß gebaut, wie es Fig. 8 zeigt. Unter Vermeidung von Stützen wurde nach einem Vorschlag von Prof. Lilienfeld die Aufhängung am Hals durch ein zweites Glasrohr verstärkt.

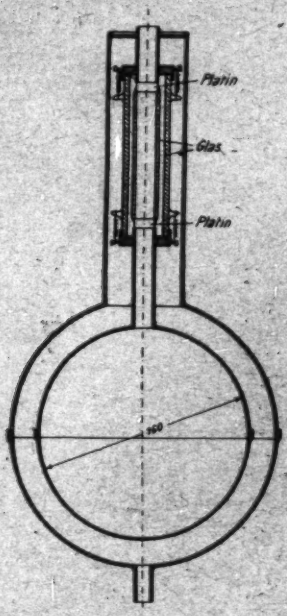


Fig. 8.

b) *Das Vakuum.* Die Einrichtung zum Evakuieren war hierbei die gleiche, wie früher bei Untersuchung der Glasgefäße. Während des Pumpens wurde das Gefäß bis zum Beginn der Rotglut erhitzt. Um festzustellen, ob die Lötstellen dicht hielten, wurde das Gefäß zunächst im kalten Zustand möglichst weit ausgepumpt und über Nacht stehen gelassen. War eine Undichtigkeit vorhanden, so konnte dies leicht an den Stickstofflinien im Spektralrohr festgestellt werden. Die undichten Stellen wurden dann durch teilweises Verschmieren der Lötstellen mit Siegellack ermittelt und nochmals nachgelötet.

Beim erstmaligen Erhitzen und Evakuieren destillierte aus dem Gefäß eine ölige gelbe Flüssigkeit. Erst nach tage-

langem Pumpen unter gleichzeitigem Erwärmen gelangte man so weit, daß nach Absperren des Gefäßes von der Pumpe das Vakuum erhalten blieb. Die Loslösung der Gasreste von den Metallwänden geht nur sehr langsam vor sich. Während des Pumpens in den ersten Tagen und besonders während der ersten Periode dieser Zeit verbesserte sich das Vakuum nicht mit der Abkühlung des Gefäßes. Hieraus war zu schließen, daß die einmal abgegebenen Gase beim Erkalten nicht kondensiert und von den Wänden nicht wieder aufgenommen werden. Besonders stark war die Abgabe von Wasserstoff. Erst zuletzt, nachdem das Gefäß etwa 6 Tage unter Vakuum gestanden hatte, und die Erhitzung täglich mehrere Stunden betrieben worden war, gelangte man zu einem konstanten Vakuum, kenntlich durch kräftige Fluoreszenz des Spektralrohres. Jetzt ließ sich schon beobachten, daß die Wandungen beim Erkalten wieder Gase aufnahmen. Das Vakuum verbesserte sich also während des Abkühlens. Aber trotzdem war nicht das gewünschte extreme Vakuum erreicht. Es ist jedoch anzunehmen, daß es durch noch längeres Pumpen unter gleichzeitigem Erhitzen noch verbessert werden kann. Man muß durch Erwärmung die Gase von den Wänden bis zu dem Grade abtreiben, bei dem die Wandungen beim Erkalten den ganzen Rest der noch vorhandenen Gase wieder absorbieren.

c) *Verluste bei Füllung mit flüssiger Luft.* Es wurde auch ein Versuch mit flüssiger Luft gemacht, um die Abdampfmenge des 10 Liter fassenden Gefäßes der Fig. 7 bei dem bisher erzeugten Vakuum festzustellen. Die Gädepumpe war während dieses Versuches dauernd in Betrieb. Das Vakuum war also im kalten Zustand des Gefäßes so weit vorgeschritten, daß durch das Spektralrohr keine Entladung mehr hindurchging.

Während des Einfüllens der flüssigen Luft und der darauf folgenden Beobachtungszeit wurde die Pumpe nicht abgestellt, auch konnte im Spektralrohr eine Verschlechterung des Vakuums nicht beobachtet werden.

In das Gefäß wurden etwa 10 Liter flüssige Luft eingefüllt, von denen jedoch ein beträchtlicher Teil schon beim Einfüllen verloren ging. Der Abdampfverlust wurde mit der Gasuhr gemessen, und es ergab sich hierbei im Durchschnitt ein Verlust von 10,6 kg/24 Std. Merkwürdigerweise hatte sich unmittelbar nach diesem Versuch das Vakuum sehr verschlechtert.

Die Wandungen hatten anscheinend bei der Temperatur der flüssigen Luft viel Gase absorbiert und gaben dasselbe bei der Zimmertemperatur ab.

Der gleiche Versuch bei dem 2-Liter-Gefäß der Fig. 8 ergab einen Verlust von 4,8 kg/24 Std.[1]) Auf 1 dm^2 Oberfläche verlor das 10-Liter-Gefäß 0,46 kg/24 Std., das 2-Liter-Gefäß 0,60 kg/24 Std.

8. Weitere Versuche mit Metallvakuumgefäßen, insbesondere Schutz gegen Wärmestrahlung.[2])

Es entstand die Frage, warum die Gefäße trotz ausgezeichneten Vakuums noch so große Abdampfverluste ergeben. Es lag der Verdacht nahe, daß die Eisenoberfläche sehr viel mehr Wärmestrahlen aussendet, als das eine glänzende Silberoberfläche tun würde. Es wurde daher von jetzt ab versucht, die Wärmestrahlung durch geeignete Überzüge, insbesondere durch Versilberung, herabzusetzen.

Eine weitere Verminderung kann nach O. Wiener[3]) durch die Einschaltung von gut isolierten Schirmen erzielt werden. Derselbe hat theoretisch nachgewiesen, daß durch Zwischenschalten von $n-1$ isolierten dünnen spiegelnden Metallschirmen der stationäre Wärmeaustausch im Vakuum auf den $n$ten Teil herabgesetzt werden kann. Die im folgenden beschriebenen Versuche bezwecken die Untersuchung der technischen Anwendbarkeit der angegebenen Wärmeschutzmittel, sowie die Feststellung der damit erzielten und zu erwartenden Erfolge. Zunächst wurde eine Reihe von Gefäßen konstruiert, um die verschiedenen Möglichkeiten hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit gegeneinander abzuwägen. Dabei zeigte es sich nun, daß nicht unter allen Umständen eine genügende Evakuierung möglich war. Daher wurden besondere Versuche angestellt, die die Entgasung der geschützten Oberflächen im allgemeinen aufklären sollten.

Das im vorigen Abschnitt beschriebene kleine 2 Liter fassende Versuchsgefäß (Fig. 8) hatte als Abdampfverlust, auf den Tag berechnet, den, verglichen mit den Glasgefäßen gleicher Größe, außerordentlich großen Wert 4,8 kg ergeben. Weiteres

1) Bis hierher reichen die Versuche des Hrn. Banneitz.

2) Versuche von Hrn. Rhein.

3) O. Wiener, Ber. d. math.-phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. 70. S. 13. 1918.

Erhitzen führte zu keinen besseren Werten. Im Gegenteil, die Verluste wurden immer größer. Auch bei einem ähnlich gebauten aber versilberten Gefäß führte starkes Erhitzen zu keinem besseren Ergebnis als vorher. Vermutlich wurde der Glanz der Versilberung durch die übermäßige Erhitzung zerstört, so daß die Verluste durch Wärmestrahlung zunehmen. Für die Behandlung des Vakuums ergab sich daraus die Folgerung, daß das Erhitzen nur mäßig erfolgen und nicht über eine Temperatur von 300° hinaus gesteigert werden dürfte. Die im folgenden beschriebenen Gefäße sind daher — wenn überhaupt — nur ganz mäßig während des Auspumpens erwärmt worden.

Zunächst wurden vier doppelwandige 2-Liter-Gefäße gebaut. Die Konstruktion war dieselbe wie die des oben beschriebenen kleinen Eisengefäßes der Fig. 8. Sie waren aber darüber hinaus noch nach Art der Dewar-Gefäße versilbert, und zwar die Innenkugel außen und die Außenkugel innen. Das erste ließ nach mehrtägigem Pumpen ohne Erwärmen ein gutes Vakuum erzielen. Die Abdampfverluste betrugen 1,6 kg/Tag, auf 1 dm^2 Oberfläche berechnet: 0,20 kg/24 Std. Ein Heizen auf 400° hatte wiederum nachteilige Folgen. Die Verluste stiegen bis auf etwa 3 kg/Tag. Bei dem zweiten Gefäß war noch eine Zwischenwand aus Silber eingefügt. Mit diesem Gefäß, das gar nicht erhitzt wurde, wurden die besten Resultate erzielt. Die Verluste betrugen 0,6 kg/Tag (0,075 kg im Tag auf 1 dm^2 Oberfläche), spätere Versuche ergaben 0,9 kg/Tag (0,11 kg/Tag auf 1 dm^2 Oberfläche). Sein Durchmesser beträgt 20 cm, sein Gewicht 2,7 kg. Bei den letzten beiden Gefäßen waren neben der Versilberung noch weitere Zwischenwände unregelmäßiger Art angewandt. Der Hohlraum des einen war mit Asbestwolle gefüllt, der des anderen mit versilberten Glasscherben. Das erstere ließ sich nur mangelhaft auspumpen; es verlor pro Tag 6 kg. Das letztere lieferte bessere Resultate; es verlor nur 1,1 kg. Ein nennenswerter Fortschritt war aber auch nicht erzielt.

Nunmehr wurden zwei Gefäße konstruiert, bei denen zwischen der Außen- und der Innenwand noch zwei Zwischenwände aus Eisen eingeschoben waren. Das eine derselben war innen versilbert, das andere nach einem Verfahren der Firma Metallatom mit Aluminium bespritzt. Das aluminierte Gefäß

ließ sich auch beim Erwärmen nicht auspumpen. Es blieb zweifelhaft, ob das Gefäß undicht war oder ob soviel Gase vom Aluminium abgegeben wurden. Das (galvanisch) versilberte Gefäß wurde während des Auspumpens nicht erwärmt; es zeigte, verglichen mit den früheren Konstruktionen, keinen wesentlichen Fortschritt. Über die Einzelheiten der Konstruktion sei folgendes mitgeteilt: um das innere Gefäß von etwa 2 Liter Inhalt, unter dem sich ein Sieb mit geglühter Holzkohle befand, waren vermittelst von je sechs Ebonitstutzen die beiden Zwischenwände herumgebaut. Ohne jede äußere Verbindung hingen alle Innenteile an dem wie früher gestützten Glashals im äußeren Mantel. Das Gewicht des Gefäßes betrug 6,13 kg. Der Durchmesser der innersten Kugel betrug 16, der der äußersten 28 cm. Die Abdampfverluste betrugen 1,1 kg/Tag.

Dieser wider Erwarten große Abdampfverlust erklärt sich vielleicht daraus, daß die Zwischenräume nur mit der inneren, nicht aber auch mit der äußeren Kugel durch die Stutzen in Verbindung standen. Diese Konstruktion war gewählt worden, um andernfalls auftretende Spannungen, die zur Zertrümmerung des Glashalses führen könnten, zu vermeiden. Derartige Spannungen würden auch bei genauester Abmessung der Stutzen infolge der Temperaturerniedrigung beim Einbringen von flüssiger Luft hervorgerufen werden und hatten bereits früher nachteilig gewirkt. Durch diese Anordnung kann nun eine zu niedrige Temperatur der Zwischenwände bedingt sein, indem sich das Gefälle, das zwischen den inneren Wandungen vorhanden sein sollte, wiewohl die Stutzen aus Ebonit, also einem Isolator, bestanden, zum Teil ausgleicht. Das hat aber zur Folge, daß zwischen den beiden äußersten Wänden ein um ein Beträchtliches zu großer Temperaturunterschied vorhanden sein muß, so daß infolge der größeren Oberfläche Verluste bedingt werden, die den Gewinn durch die Schirmwirkung der Zwischenwände ausgleichen, ja sogar überkompensieren können.

Es hat den Anschein, daß es technisch nicht möglich ist, über einen Mindestverlust von 0,6 kg bis 1 kg pro Tag mit 2-Liter-Gefäßen aus Metall wesentlich hinauszukommen. Die Güte der Glasvakuumgefäße scheint nicht erreichbar zu sein. Größere Metallvakuumgefäße, die zumeist ausgiebig von Kohle als Absorbens Gebrauch machen, soweit sie bereits in der

Technik Verwendung finden, liefern natürlich prozentual bessere Resultate.

Es war geplant, ein größeres dreiwandiges Gefäß von etwa 30 Liter Inhalt herzustellen. Das Gefäß sollte sich, um der Kugelgestalt möglichst nahe zu kommen, aus zwei konischen und einem zylindrischen Teil zusammensetzen. An Stelle des zerbrechlichen Glashalses sollten zur Vermeidung größerer Verluste durch Wärmeleitung auf Vorschlag von Prof. Lilienfeld zwei Metallspiralen eingebaut werden, eine zum Füllen, die andere zum Entleeren. Die Stutzen sollten aus Porzellan hergestellt werden. Die Gefäßteile waren zum Teil geschweißt. Es zeigte sich nun[1]), daß die autogen verbundenen Schweißnähte absolut undicht waren; es war nicht möglich, das innere Gefäß auszupumpen. Da eine galvanische Versilberung in den schwierigen Zeiten nicht ausgeführt werden konnte, war ein Bespritzen der Oberfläche in Aussicht genommen. Die schlechten Erfahrungen mit dem aluminierten Gefäß jedoch ließen es dringend geraten erscheinen, die Möglichkeit der Entgasung gespritzter Oberflächen zuvor klarzustellen. Diese Versuche, die im nächsten Kapitel beschrieben sind, ergaben, daß die außerordentlichen Mengen von Gasen, die den gespritzten Oberflächen anhaften, einen derartigen Überzug als ungeeignet erscheinen lassen. Man wird also auf die galvanische Versilberung zurückkommen müssen. Angesichts der technischen Schwierigkeiten, die das Hartlöten derartig großer Nähte, wie sie hier in Frage kamen, mit sich bringt, sowie angesichts der technischen Unmöglichkeit, gegenwärtig einen galvanischen Überzug herzustellen, mußte der Zusammenbau des Gefäßes vorläufig zurückgestellt werden.

9. Über die Entgasung wärmegeschützter Eisenbleche.[1])

Es sollen hier Versuche beschrieben werden, die die Entgasung wärmegeschützter Eisenbleche zum Gegenstand hatten. Wie bereits bemerkt, war es zweifelhaft geblieben, ob das aluminierte Gefäß undicht war oder ob die entweichenden Gase aus der Aluminiumschicht stammten. Um die Frage klarzustellen, wurde die Untersuchung von Grund auf geführt. Die Versuchsbedingungen waren allerdings sehr verwickelt; die Resultate sind daher mehr qualitativ als quantitativ, zu-

1) Nach Versuchen von Hrn. Kurze.

mal das Problem der Absorption von Gasen in Metallen noch keineswegs restlos aufgeklärt ist. Das Ziel der Versuche bestand hauptsächlich in der Frage: ob und in welcher Weise die Entgasung möglich ist.

Ein metallischer Überzug auf metallischer Unterlage kann in verschiedener Weise hergestellt werden: einmal galvanisch; er läßt sich dann gut polieren und liefert hochglänzende Oberflächen; dann durch Aufspritzen der Metalle; in diesem Falle ist er mehr oder weniger matt und verträgt nicht unter allen Umständen eine Politur. Die Metallisierung nach dem letzteren Verfahren wird von der Firma Metallatom-Berlin (später Frankonia) ausgeführt. Nicht alle Metalle haften aufeinander. Man kann jedoch durch Aufspritzen einer dünnen Zinkhaut beispielsweise die Haltbarkeit erhöhen, wenn sich nämlich sowohl die Unterlage wie das aufgespritzte Metall mit Zink leicht legieren. In dieser Weise waren sämtliche nach diesem Verfahren bespritzten Bleche, die zur Untersuchung kamen, hergestellt.

Die Versuche wurden so angestellt, daß die behandelten Eisenbleche aufgerollt in zylindrische Glasgefäße eingeschlossen wurden. Nach Anschluß an die Pumpleitung wurde zunächst ohne Erwärmung der Gefäße mit der Gädepumpe ausgepumpt und stehen gelassen. Zur Messung des Vakuums waren ein Mac-Leod-Manometer sowie ein Spektralrohr angeschlossen. Aus der Druckänderung konnte auf das abgegebene Volum geschlossen werden. Selbstverständlich war es nach dieser Methode nicht möglich, die überhaupt abgegebene Gasmenge zu bestimmen; denn es bleibt unbekannt, wieviel während des Pumpens bereits entweicht. Die abgegebene Menge ist Funktion des Druckes; aber sie hängt darüber hinaus noch von einer Reihe anderer mehr oder weniger unkontrollierbarer Parameter ab: von der Natur des Stoffes, von der Beschaffenheit der Oberfläche, vor allem aber von der Vorgeschichte. Geglühte Bleche verhalten sich ganz anders als nichtgeglühte. Bleche, die bereits im Vakuum waren, geben weniger ab als andere usf. Immerhin dürften die im folgenden des näheren beschriebenen Versuche die daruas auf die Herkunft der abgegebenen Gase gezogenen Schlüsse rechtfertigen.

1. Zunächst wurde gespritztes Aluminium untersucht. 65 qdm Eisenblech wurden beiderseits mit Aluminium bespritzt und in ein Glasrohr von 100 mm Durchmesser eingeschlossen.

Das Volum des Gefäßes (mit Einschluß der Meßapparate bis zum Verschluß) betrug $v = 7{,}3\ \mathrm{dm}^3$. Folgende einfache Überlegung gestattet das Volum Δv der abgegebenen Gase auf Atmosphärendruck umgerechnet zu berechnen. Steigt der Druck um Δp, so ist:

(1) $$\Delta p \cdot v = 760 \cdot \Delta v.$$

Daraus folgt:

(2) $$\Delta v = \frac{v}{760}\,\Delta p = \frac{7{,}3}{760} \cdot \Delta p = 0{,}0096\,\Delta p\ \mathrm{dm}^3 = 9{,}6\,\Delta p\ \mathrm{cm}^3.$$

Bezieht man die abgegebene Menge auf die Einheit der Oberfläche, so wird:

(3) $$\Delta v/\mathrm{qm} = \frac{v}{760 \cdot f}\,\Delta p = 7{,}4\,\Delta p\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{qm}.$$

Bereits nachdem die Pumpen wenige Minuten in Betrieb gesetzt waren, zeigte das Spektralrohr Kathodenstrahlung. Das Vakuum ging außerordentlich stark zurück: während zweier Tage von etwa 0,001 mm bis 0,1 mm. Alle 2—3 Tage wurde das Auspumpen wiederholt. Anfangs wurde wenig, später außerordentlich viel Wasserstoff abgegeben. Auch bei zwölfmal wiederholtem Pumpen war noch keine Änderung zu verzeichnen. Darauf wurde das Gefäß sich selbst überlassen und über $^1/_2$ Jahr lang beobachtet. Folgende kleine Tabelle gibt die nach Verlauf der angegebenen Zeit täglich abgegebene Menge in $\mathrm{cm}^3/\mathrm{qm}$. Die letzte Spalte enthält den jeweils herrschenden Gesamtdruck.

nach Tagen	wurden abgegeben $\mathrm{cm}^3/\mathrm{qm}$ Tag	bei einem Druck von mm
2	0,28	0,06
6	0,18	0,19
14	0,10	0,28
56	0,07	0,70
240	0,02	1,2

Die Zahlen entstammen der letzten Beobachtungsreihe. Ein Stillstand ist also auch nach einem halben Jahre nicht eingetreten.

2. Um nun die Herkunft dieser gewaltigen Gasmengen zu erklären, war es wünschenswert, die Gasabgabe von blankem Eisen zu kennen. Es wurden daher Gegenversuche mit nicht bespritzten Eisenblechen gleicher Herkunft angestellt. Im Interesse der technischen Verwertung der Ergebnisse wurde

dabei ein geglühtes und ein nicht geglühtes Blech gleichzeitig untersucht. Die Fläche dieser Bleche betrug je 2·35,8 qdm, ihr Gewicht 1,56 kg (geglüht) bzw. 1,48 kg (nicht geglüht). Das Volumen der Anordnung betrug 4,0 dm³ (geglüht) bzw. 4,7 dm³ (nicht geglüht). Aus diesen Zahlen ergibt sich für den Koeffizienten der Gleichung (3) $\frac{v}{760 \cdot f} = 7{,}5$ (geglüht) und 8,8 (nicht geglüht).

Bei diesen Versuchen ging das Pumpen bedeutend langsamer vor sich als beim ersten Versuch. Der Unterschied zwischen dem geglühten und nicht geglühten Blech war zwar deutlich, aber nicht beträchtlich. Während bei dem aluminierten Blech der Druck während zweier Tage bis auf etwa 0,1 mm stieg, stieg er jetzt anfangs bis auf 0,03, später nur bis auf 0,015. Das geglühte Blech gab dabei vor allem CO ab, das nicht geglühte hingegen Wasserstoff. Eine Konstanz wurde auch hier nicht erreicht. Die folgende kleine Tabelle gibt zum Vergleich die den oben mitgeteilten entsprechenden Werte. Sie ist ebenfalls den Beobachtungen der letzten Versuchsreihe entnommen.

geglüht			nicht geglüht		
Tag	cm³/qm Tag	mm	Tag	cm³/qm Tag	mm
1	0,038	0,013	1	0,018	0,025
2	0,008	0,016	2	0,009	0,030
5	0,007	0,019	5	0,009	0,033
11	0,007	0,027	11	0,009	0,037

Es hat den Anschein, daß das geglühte Blech infolge der Auflockerung des Gefüges rascher abgibt, als das nicht geglühte, jedoch ist dieser Schluß nicht sicher.

Der Unterschied zwischen dem aluminierten Blech und den blanken Eisenblechen ist gewaltig. Ersteres gibt nach einem halben Jahre täglich noch etwa doppelt soviel ab, wie die letzteren nach 8 Tagen!

3. Diese Versuche waren ausgeführt worden, ohne daß die Bleche erwärmt wurden. Da sich eine restlose Entgasung bei gewöhnlicher Temperatur als unmöglich herausstellte, wurden weitere Versuche angestellt, bei denen die Anordnung so getroffen wurde, daß die Bleche erwärmt werden konnten. Außerdem wurden vergleichsweise neben dem gespritzten Metall auch galvanisch hergestellte Überzüge untersucht.

Über die Anordnung im einzelnen sei folgendes mitgeteilt. Es kamen im ganzen fünf Bleche zur Untersuchung. Zwei von ihnen waren neu, d. h. noch nicht im Vakuum behandelt, das eine war blank, nicht versilbert, das andere war hochglänzend versilbert. Sie stammten von einem Stück. Ein drittes war matt versilbert; es war geglüht und auch bereits im Vakuum behandelt. Die zwei letzten Bleche endlich, die dieselbe Vorgeschichte wie das dritte hatten, waren bespritzt, das eine mit einer Zinkhaut, das andere mit Silber, nachdem auf letztem zuvor ebenfalls eine dünne Zinkhaut aufgespritzt worden war. Die Bleche konnten einzeln untersucht werden. Nebenstehende Tabelle orientiert über die wichtigsten Maßverhältnisse.

Die gespritzte Silberauflage haftet schlecht auf dem Eisen. Beim Biegen löste sie sich stellenweise los. Hingegen schien die Temperaturerhöhung keinen nachteiligen Einfluß zu haben. Weder konnte ein selbsttätiges Losblättern noch auch überhaupt eine Veränderung der Oberfläche festgestellt werden.

Diese Versuche bestätigten noch ausgezeichnet den gewaltigen Unterschied zwischen blankem oder galvanisch behandeltem Eisen und den gespritzten Oberflächen. Es zeigte sich das beim Erhitzen. Während bei einer Temperatursteigerung bis auf 200—250° innerhalb von $^3/_4$ Stunden der Druck bei gewöhnlichem Eisen (I) von 0,06 bis auf 0,76 mm stieg, entsprechend einer Abgabe von 8,5ccm/qm,

	Herkunft	Zurüstung	Fläche	Gewicht ohne Auflage	Auflage	Auflage/qm	Volum	$\varepsilon/760\,f$ in cm^3/mm qm
I.	neu	blank	8,7 qdm	0,3810 g	— g	—	1,61 dm^3	12,2
II.	neu	hochglänzend versilbert	8,7 „	0,3655 g	15,2 g Ag	87,3 g Ag	1,59 „	12,0
III.	geglüht, bereits im Vakuum behandelt	galvanisch versilbert	8,6 „	0,4225 g	22,5 g Ag	130,8 g Ag	1,61 „	12,3
IV.	geglüht, bereits im Vakuum behandelt	mit Zn bespritzt	7,8 „	0,38 g	20 g Zn, — g Ag	128 g Ag	1,57 „	13,2
V.	geglüht, bereits im Vakuum behandelt	mit Ag bespritzt	8,6 „	0,35 g	7 g Zn, 49 g Ag	41 g Zn, 285 g Ag	1,55 „	11,9

veränderte sich das Vakuum unter gleichen Verhältnissen beim Erhitzen des mit Zink bespritzten Bleches (IV) von 0,05 bis auf 30 mm; d. h. es wurden 400 ccm/qm, also die 50fache Menge abgegeben. Im übrigen lieferten diese Versuche diesbezüglich kaum ein anderes Resultat wie früher. Die Natur der gespritzten Oberfläche scheint fast belanglos zu sein. Die abgegebenen Gase bestanden aus Wasserstoff und Luft, wozu beim Erwärmen noch Kohlenoxyd hinzutrat. Luft und Wasserstoff scheinen beim Herstellen der Auflage mechanisch in der Oberfläche festgehalten zu werden.

Ein größeres Interesse hat die Frage, ob die Entgasung durch Erhitzen möglich ist. Zunächst zeigte sich, daß ein Erhitzen bis auf 200—250° nicht genügt. Daher wurde bei gleichzeitigem Pumpen die Temperatur bis 400° erhöht. Der Versuch wurde nicht eher abgebrochen, als auch bei diesen Temperaturen das Spektralrohr Kathodenstrahlung anzeigte. Diese Versuche zeigten deutlich den Einfluß der Vorgeschichte der Bleche. Ein wesentlicher Einfluß der galvanisch versilberten Oberfläche konnte hingegen nicht festgestellt werden. Wiewohl also eine absolute Konstanz des Vakuums nicht erreicht werden konnte, war doch der fördernde Einfluß der Temperatur sehr deutlich, wie ja vorauszusehen war. Verglichen mit den nichtgespritzten, ließen die gespritzten Bleche nicht in derselben Weise einen niedrigen Druck erreichen. Immerhin war es möglich, auch hier ein einigermaßen konstant bleibendes Vakuum herzustellen. So wurde mit dem verzinkten Blech ein Druck von 0,010 mm erreicht, der in 14 Tagen nur um 0,001 stieg. Das entspricht einer Abgabe von etwa 0,013 ccm/qm, also einer täglichen Abgabe von 0,001 cm^3/qm. Das mit Silber gespritzte Blech lieferte schließlich einen Druck von 0,009 mm. Vergleichsweise betrug die Abgabe des parallel untersuchten blanken Eisenbleches pro Tag 0,0005 cm^3.

Bedenkt man, daß die Entgasung gespritzter Oberflächen, ganz abgesehen von dem größeren (ungefähr dreifachen) Materialverbrauch und ganz abgesehen davon, daß eine spiegelglänzende Oberfläche nicht erreicht ist, außerordentlich viel zeitraubender und schwieriger ist, als die der galvanisch hergestellten, wie dies Versuche gezeigt haben, so ist es klar, daß für die Herstellung von Vakuumgefäßen nur die galvanische Versilberung in Frage kommt. Aber auch hier ist es unum-

gänglich notwendig, durch andauerndes Erhitzen die Wände von den absorbierten Gasen zu befreien. Man wird dabei mit der Temperatur nicht allzu hoch gehen dürfen; bei höheren Temperaturen tritt nämlich eine Umkristallisation ein, durch die das Gefüge der Feinbleche zerstört, die Oberfläche, welche Gase abgibt, vergrößert und die Wärmestrahlung erhöht wird.

Ergebnisse.

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, daß es möglich ist, selbst mit Eisengefäßen das zur Aufbewahrung von verflüssigten Gasen erforderliche hohe Vakuum herzustellen, wenn man nur dafür sorgt, daß die Lötstellen mit größter Sorgfalt, am besten mit Silberlot (Lilienfeld) ausgeführt werden, und die Gefäße vor Benutzung längere Zeit unter Auspumpen auf eine Temperatur von etwa 300° C, gebracht werden.

Die Wärmeisolation der Zuführung kann bei kleinen Gefäßen nach Vorgang von Lilienfeld durch Zwischenschaltung eines Glasrohres erreicht werden, das durch Platinring an das Metall beiderseits angeschlossen ist. Für größere Gefäße hat man nach Vorschlag von Lilienfeld ausreichend lange Rohre, gegebenenfalls Schlangen von schlechtleitendem Metall einzuschalten.

Ein zweites wichtiges Ergebnis der Untersuchung ist aber, daß mit unüberzogenen Metallgefäßen aus Eisen und Nickel aus dem Grunde noch kein gutes Ergebnis erzielt werden kann, weil die Wärmestrahlung dieser Metalle viel zu groß ist. Es ist daher ein möglichst wenig strahlender Überzug herzustellen, der am besten aus Silber gewählt wird und zwar darf der Überzug nicht durch Spritzverfahren hergestellt werden, weil das aufgespritzte Metall erstens außerordentlich viel Gase adsorbiert und zweitens nicht genügend blank hergestellt werden kann. Man muß daher unbedingt auf galvanische Versilberung Bedacht nehmen. Ob eine Verzinnung genügt, konnte nicht geprüft werden, da während des Krieges kein Zinn erhältlich war.

Der Überzug leidet durch zu große Erhitzung Schaden. Man darf daher die Entgasung nur bei mäßigen Temperaturen bis etwa 300° C. vornehmen. Die Dauer der Erhitzung und des Auspumpens hat dementsprechend eine längere Zeit vor sich zu gehen.

Der Verlust durch Strahlung und durch Wärmeleitung im äußersten Vakuum kann nach Vorschlag von O. Wiener durch Zwischenschaltung einer gut isolierten beiderseits versilberten Wand auf die Hälfte herabgesetzt werden.

Auf diese Art wurde das günstigste Ergebnis mit einem versilberten Eisengefäß von 2 Liter Inhalt erzielt, mit einem täglichen Verlust von 0,6 kg flüssiger Luft. Unter der Annahme, daß der Verlust mit zunehmendem Volumen v im Verhältnis von $v^{2/3}$ anwächst, berechnet sich daraus für ein entsprechendes Gefäß von 1000 Litern Inhalt ein Verlust von 38 kg täglich, d. h. rund 4%.

Die folgende Tabelle enthält für die wichtigsten der untersuchten Gefäße mit den jeweils besten Ergebnissen eine Zusammenstellung des spezifischen Abdampfverlustes, d. h. das Verhältnis des Abdampfverlustes A in kg/Tag zur Oberfläche des innersten Gefäßes in dm². Die Oberfläche des Gefäßes wurde, wo nicht die Maße genau bekannt waren, aus dem angegebenen Inhalt unter Aufschlag von 4 v. H. berechnet.

	Besprochen auf Seite	Inhalt in Litern	Abdampfungsverlust in kg/Tag	Angenommene Oberfläche in dm²	Spezifischer Abdampfungsverlust $\frac{A}{O}\left(\frac{\text{kg}}{\text{Tag dm}^2}\right)$
Versilbertes Glasgefäß von Burger im Laboratorium extrem ausgepumpt . .	12	2	0,185	8,0	0,023
Versilbertes Glasgefäß von Burger geliefert	5	5	0,361	14,7	0,025
Gefäße von Ahrendt . . .	14	5	1,095	14,7	0,075
	14	15	1,026	30,6	0,034
	14	25	1,258	43,0	0,029
Nickelgefäß von Lilienfeld	15	1	0,775	5,0	0,16
Eisengefäße unversilbert	22	10,3	10,6	22,9	0,46
	22	2	4,8	8,0	0,60
Eisengefäße galvanisch versilbert, doppelwandig . .	23	2	1,6	8,0	0,20
Dreiwandig	23	2	0,6	8,0	0,075

Leipzig, Physik. Institut der Universität, August 1919.

(Eingegangen 6. August 1919.)

2. *Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Wassers, Äthylalkohols, Methylalkohols und Acetons vom Druck;*

von G. Falckenberg.

(Rostocker Habilitationsschrift.)

In vorliegender Arbeit wird der Druckkoeffizient der Dielektrizitätskonstante von Wasser, Äthylalkohol, Methylalkohol und Aceton untersucht. Den Zuwachs der Dielektrizitätskonstanten durch Drucksteigerung bezeichne ich im folgenden mit $\Delta\varepsilon$. Eine Untersuchung von $\Delta\varepsilon$ für Wasser und die beiden Alkohole ist deswegen von besonderem Interesse, weil für diese drei Flüssigkeiten genaue Messungen über ihre Kompressibilität vorliegen und infolgedessen die Beziehung von $\Delta\varepsilon$ zu der durch Druck bewirkten Änderung der Dichte geprüft werden kann. Die ersten Untersuchungen über Änderung der Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeiten durch Drucksteigerung führte Röntgen[1]) aus. Röntgen stellte für Wasser fest, daß ε bei Drucksteigerung von 1 auf 500 Atmosphären „nicht sicher nachweisbar um 1% geändert wurde". Zu ähnlichen Resultaten führten Röntgens Untersuchungen bei Äthylalkohol. Messungen von Ratz[2]) für Wasser ergaben: „Eine Änderung der Dielektrizitätskonstante innerhalb eines Intervalls von 300 Atm. konnte nicht sicher beobachtet werden und liegt jedenfalls unter 1%." Ratz untersuchte ferner Äther, Benzol, Anilin und Amylalkohol. Röntgen und Ratz benutzten zu ihren Messungen die bekannte Nernstsche Brückenanordnung, welche für diese Messungen nicht empfindlich genug ist. Ortvay[3]) untersuchte mit einer durch Differentialschaltung verbesserten Nernstschen Anordnung $\Delta\varepsilon$ von Äthyläther, Benzol, Xylol, Toluol, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Paraffin liqu., Petrol-

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 52. S. 599. 1894.
2) F. Ratz, Zeitschr. f. physik. Chemie 19. S. 111. 1896.
3) R. Ortvay, Ann. d. Phys. 36. S. 1. 1911.

äther und Rizinusöl. Auf diese Arbeit komme ich noch weiter unten zurück. Für Messungen von $\Delta\varepsilon$ an Wasser, Äthylalkohol und Methylalkohol würde auch die von Ortvay benutzte Differentialanordnung zu ungenaue Resultate liefern, weil das Leitvermögen dieser Flüssigkeiten zu groß ist. Es mußten daher andere Wege beschritten werden. Ich ging aus von der bekannten Drudeschen Anordnung für Dielektrizitätskonstanten-Messungen mittels stehender Wellen von hoher Frequenz, bei welcher sich die zu untersuchende Flüssigkeit in einem kleinen Kondensatorfläschchen befindet. Diese Anordnung verbesserte ich durch Verwendung von elektromagnetischen Schwingungen sehr kleinen Dämpfungsdekrements, wie sie der von Rukop[1]) konstruierte Sender liefert; d. h. ich kombinierte aus dem Drudeschen und Rukopschen Apparat eine zur Durchführung der vorgenommenen Messungen geeignete Versuchsanordnung.

Versuchsanordnung.

Zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen von 5 m Wellenlänge benutzte ich den vortrefflichen, von Rukop konstruierten Sender (in Fig. 1 in $^1/_6$ natürlicher Größe abgebildet), welchen Rukop in seiner Arbeit über „Messungen im elektromagnetischen Spektrum des Wassers“[1]) beschreibt. Dieser Sender gestattet, die Wellenlänge seiner Eigenschwingung in weiten Grenzen kontinuierlich zu ändern. Die Änderung der Wellenlänge geschieht durch Verlängern oder Verkürzen der Schenkel des Senders (Antennen) mit Hilfe einer Mikrometerschraube. Fig. 1 stellt Sender und Empfänger dar. Der mit dem Sender lose gekoppelte Empfänger, welcher wie der Sender als $\lambda/4$ schwingt, besteht aus einem mit der zu messenden Flüssigkeit gefüllten Kondensatorfläschchen in einem Druckgefäß, welches in Fig. 1 in $^1/_6$ natürlicher Größe abgebildet ist, und zwei parallelen, ineinander verschiebbaren Messingröhren, die bei A kurzgeschlossen sind. Das aus Messing hergestellte Druckgefäß ist mit Glasplattenverschlüssen versehen. Die Glasplatten liegen direkt auf dem Messingrand des Druckgefäßes auf. Ebenso liegen die kleinen Platten s direkt auf dem durchbohrten Glase auf. Die Ab-

1) H. Rukop, Ann. d. Phys. 42. S. 489. 1913.

dichtung besteht aus einem Rande von Marineleim im Innern des Druckgefäßes. Die Drucksteigerung wurde durch eine Cailletetsche Druckpumpe erzeugt. Zirka 2 cm vom Ende der Messingröhren bei *A* ist als Wellenindikator ein Thermokreuzelement eingeschaltet. Es wurde mit einem Kugel-Panzergalvanometer von Du Bois-Rubens verbunden. Werden Schwingungen im Sender erzeugt, so wird das Thermoelement Maximalausschläge am Galvanometer hervorrufen, wenn Sender und Empfänger in Resonanz sind. Wird im Empfänger die Resonanz gestört durch Vergrößerung der Fläschchenkapazität bei Drucksteigerung, so müssen ent-

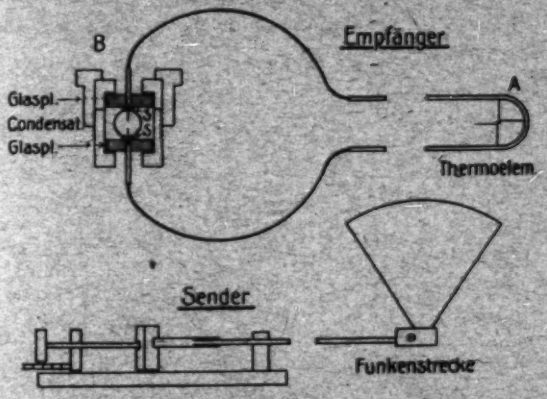


Fig. 1.

weder die Messingrohre am Empfänger verkürzt oder die Antennen des Senders verlängert werden, um die Resonanzlage wieder herzustellen. Die Resonanzlage wurde folgendermaßen bestimmt. Die Länge der Schenkel am Sender wurde mit Hilfe einer Mikrometerschraube verändert. Die beobachteten ballistischen Ausschläge des Galvanometers wurden als Ordinaten, die Länge der Schenkel als Abszissen aufgetragen. Die so erhaltene Resonanzkurve gestattet den Resonanzpunkt bis auf $^1/_{10}$ mm genau zu bestimmen (vgl. Fig. 2). Aus der Verschiebung der Resonanzlage bei Drucksteigerung kann durch Beschicken des kleinen Kondensators mit Eichflüssigkeiten bekannter Dielektrizitätskonstante ε die Änderung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten durch Drucksteigerung berechnet werden, wie später eingehend beschrieben wird. Die Kapazität *B*, Fig. 1, setzt sich in der

Hauptsache aus zwei Größen zusammen, der Kapazität des Fläschchens und der Kapazität des Druckgefäßes. Das Druckgefäß wurde möglichst klein gewählt, denn je kleiner die Kapazität des Druckgefäßes ist, um so größer kann bei gleicher Eigenschwingungsdauer des Systems die Fläschchenkapazität gewählt werden und um so größer ist die Änderung der Kapazität durch Drucksteigerung und damit die Genauigkeit der Messung. Die Glasplatten sprangen bei etwa 250 Atm. Das Druckgefäß und die Cailletetsche Pumpe wurde mit Paraffinöl gefüllt, weil dasselbe eine keine Dielektrizitätskonstante hat, deren Änderung mit dem Druck bekannt ist.

Messungen.

I. Wasser.

Das Kondensatorfläschchen wurde mehrmals mit doppelt destilliertem Wasser ausgespült und nach Füllung in das Druckgefäß eingefügt. Nach dem Zusammensetzen des Empfangsapparates wurde Öl in das Druckgefäß gepumpt. Die Luft entwich durch ein im oberen Teil des Druckgefäßes befindliches Loch, welches erst verschlossen wurde, nachdem sich an dem heraustretenden Öl längere Zeit keine Luftblasen mehr zeigten. Dann wurde das Gefäß zirka 10 Minuten lang unter 200 Atm. Druck gesetzt. Unter einem Druck von 7 Atm. wurde dann das Druckgefäß 2—3 Stunden gelassen, bevor die Messungen begannen. Für möglichste Konstanz der Zimmertemperatur innerhalb dieser Zeit wurde gesorgt. Mit Hilfe eines im Innern des Druckgefäßes befindlichen Thermoelements wurde festgestellt, daß in 20 Minuten die Kompressionswärme auf einen Betrag zurückging, deren Einfluß bereits innerhalb der Versuchsfehler der übrigen Messungen lag. Während der Aufnahme der Resonanzkurven befand sich kein Thermoelement zur Temperaturmessung im Druckgefäß, um Kapazitätsstörungen durch dasselbe zu vermeiden. Auf Konstanthaltung der Temperatur mußte deshalb die größte Sorgfalt verwandt werden, da bereits 2° Temperaturerhöhung die Kapazitätsvermehrung durch Druckerhöhung von 200 Atm. aufgehoben hätten. Die letzte Stunde vor Beginn der Messungen wurde die Zimmertemperatur auf $16{,}8 \pm 0{,}1°$ konstant gehalten, bis auf kurze Zeit andauernde Schwankungen, welche durch Öffnen der Tür entstanden. Der Anfangsdruck

von 7 Atm. wurde benutzt, weil bei kleinerem Überdruck die Gefahr bestanden hätte, daß die Glasplatten des Druckgefäßes nicht dicht auf dem Rand des Druckgefäßes aufliegen würden und bei weiterer Drucksteigerung sich eventuell verschieben könnten. Zuerst wurde die Resonanzkurve I, Fig. 2, bei 7 Atm. Druck aufgenommen, durch Veränderung der Länge der Antennen, wie schon oben beschrieben. Sofort nach dieser Messung wurde der Druck auf 200 Atm. erhöht

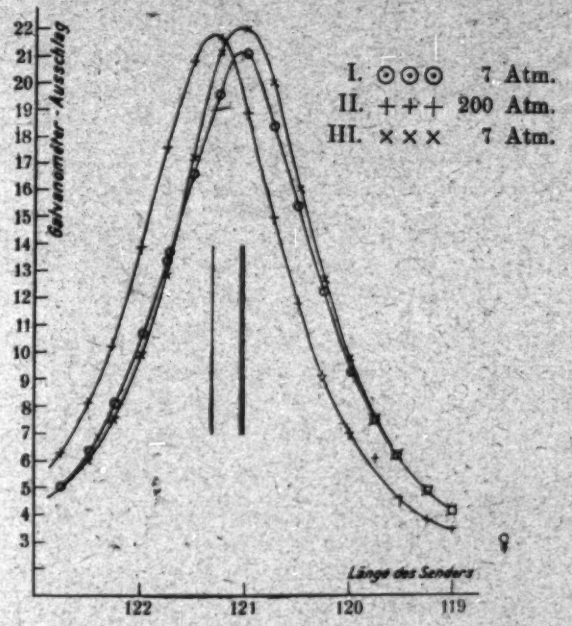


Fig. 2.

und 30—45 Minuten gewartet bis zum Beginn der zweiten Messung. Nach der Aufnahme der II. Resonanzkurve (Fig. 2) bei 200 Atm. wurde wieder sofort der Druck auf 7 Atm. reduziert und abermals 30 Minuten gewartet bis zum Beginn der Aufnahme der III. Resonanzkurve bei 7 Atm. Druck.

Die I. und III. Resonanzkurve deckten sich auch bei anderen Füllungen nie völlig miteinander. Kleine Temperaturänderungen, Schwankungen der Senderenergie, sowie Leitfähigkeitsänderung des Wassers, die nicht zu verhindern waren, werden wohl die Differenzen verursachen.

Der Druck konnte durch geeignete Belastung des Pumpen-

hebels auf $\pm$ 1 Atm. konstant gehalten werden. So wurden mehrere Messungen mit verschiedenen Füllungen gemacht.

Mit Einstellung l_s des Senders werde ich im folgenden die Länge der Schenkel des Senders im Resonanzpunkt, mit Einstellung l_e des Empfängers die Länge des Empfängers von der Glasdurchbohrung bis zum Ende bei A ebenfalls im Resonanzpunkt bezeichnen.

Der Resonanzpunkt verschob sich bei drei Gruppen von Messungen, wenn man die Differenz nimmt zwischen den Einstellungen des Senders bei 200 Atm. und dem Mittel der vor und nach dieser Messung mit 7 Atm. am Sender gefundenen Einstellungen, im Mittel um 3,05 mm wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle 1.

Gruppe	Mikrometer-Einst. des Senders in mm bei 7 Atm. vor erhöhtem Druck	200 Atm.	7 Atm. nach erhöhtem Druck	Mittlere Differenz der Einstellungen
1	$42{,}9_2$	$46{,}0_6$	$48{,}5_0$	$2{,}8_9$
2	$50{,}4_8$	$53{,}2_5$	$50{,}2_6$	$2{,}9_1$
3	$51{,}2_1$	$54{,}7_6$	$51{,}5_1$	$3{,}4_0$
				Mittelwert $3{,}0_5 \pm 0{,}23$

Dieser Mittelwert von $3{,}0_5$ wurde der Berechnung zugrunde gelegt. Durch Messungen ergab sich bei der benutzten Einstellung, daß eine Verlängerung des Senders um 40,0 mm eine Verlängerung des Empfängers von 38,2 mm entsprach. Dem Mittelwert der Verschiebung des Resonanzpunktes am Sender von $3{,}0_5$ mm entspricht daher einer Verkürzung der Einstellung l_e von $2{,}9_1$ mm.

Eichung des Kölbchens mit Gemischen von Aceton und Wasser.

Um die Änderung der Dielektrizitätskonstante $= \Delta\varepsilon$ des Wassers durch Drucksteigerung berechnen zu können, wurde das Kölbchen mit verschiedenen Mischungen von Aceton und Wasser beschickt. Es wurde mit 6, $12^1/_2$ und 25 g Aceton in 100 g Mischung gearbeitet. Die Werte der betreffenden Dielektrizitätskonstante wurden aus einer Arbeit von Drude[1]) entnommen. Die Einstellung l_e wurde diesmal durch Änderung

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 61. S. 496. 1897.

der Röhrenlänge des Empfängers aufgenommen. Als Abszissen wurden die Längen des Empfangssystems eingetragen, als Ordinaten, wie früher, die ballistischen Ausschläge des Galvanometers. Die Werte der Dielektrizitätskonstante wurden dann in Fig. 3 als Abszissen, die gefundenen Werte der Einstellungen als Ordinaten aufgetragen.

$\Delta\,\varepsilon$ wurde aus der so erhaltenen Kurve auf zweierlei Art berechnet:

1. Es wurde angenommen, daß zwischen den Punkten 4 und 5 und 1 und 2, Fig. 3, die Kurve als Gerade betrachtet

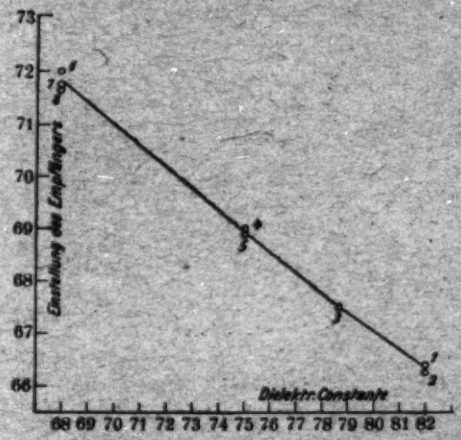


Fig. 3.

werden kann. Der Mittelwert von 4 und 5 wurde der Rechnung zugrunde gelegt.

2. Die Mittelwerte von 6 und 7 und 1 und 2 wurden benutzt und $\Delta\,\varepsilon$ mit Hilfe einer von Drude aufgestellten Formel berechnet. Trägt man nach Drude die Werte von $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$, wo l die Einstellung, λ die Wellenlänge bedeutet, als Ordinaten, die zugehörigen Dielektrizitätskonstanten der im Kölbchen befindlichen Mischungen als Abszissen auf, so ist die so erhaltene Kurve nahezu eine gerade Linie.

Ich lege den von Drude angegebenen Wert der Dielektrizitätskonstante des Wassers zugrunde. Auf einen kleinen Fehler des absoluten Wertes kommt es hier nicht an. Nach Drude ist ε für 1 Atm. und $16{,}3^0 = 81{,}99$.

Nach 1 berechnet ist

$$\Delta\varepsilon = 0{,}76_4 \text{ für 193 Atm. Druckdifferenz.}$$

Nach 2 berechnet ist

$$\Delta\varepsilon = 0{,}775\,.$$

Paraffinölkorrektion.

Der für $\Delta\varepsilon$ ermittelte Wert bedarf der Korrektur, weil die Dielektrizitätskonstante des Paraffinöls mit zunehmendem Druck ebenfalls größer geworden ist. Zur Berechnung der Korrektion wurde das Druckgefäß parallel geschaltet zu einem variablen, geeichten Meßkondensator, welcher sich in einem der beiden Zweige einer Differentialanordnung[1]) befand. Diese Anordnung gestattet, mit ungedämpften Wellen von 800 m Wellenlänge genaue Kapazitätsmessungen auszuführen. Das Fläschchen wurde zur Bestimmung seiner Kapazität mit Aceton gefüllt, weil Aceton ein kleines Leitvermögen hat.

Unter der Annahme, daß die Paraffinölkapazität des Druckgefäßes als parallel geschaltet zur Fläschchenkapazität angesehen werden kann, beträgt die Gesamtkapazität C des inneren Druckgefäßes:

$$\varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 = C\,, \tag{1}$$

wo

ε_1 = Dielektrizitätskonstante des Acetons für $16{,}1^0 = 20{,}8$.
c_1 = Kapazität des luftgefüllten Fläschchens.
ε_2 = Dielektrizitätskonstante des Paraffinöls für $16{,}1^0 = 2{,}2$.
c_2 = Kapazität des Teiles des Druckgefäßes, welcher bei obigen Druckmessungen mit Paraffinöl gefüllt war für Luftfüllung.

Bedeutet p den Druck, unter dem das Aceton und Paraffinöl steht, so beträgt die durch Druckänderung Δp bedingte Änderung der mit Aceton gefüllten Fläschchenkapazität $= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p} c_1 \Delta p$, der Paraffinölkapazität $= \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} c_2 \Delta p$.

Durch die Druckerhöhung Δp wächst die Gesamtkapazität C [Gleichung (1)] um den Betrag ΔC. Es ist also:

$$\Delta C = \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p} c_1 + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} c_2\right) \Delta p\,. \tag{2}$$

Die Gesamtänderung durch den Druck wurde gemessen

1) Vgl. nachstehende Abhandlung: G. Falckenberg, Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten usw.

durch die Vergleichung mit den Fläschchenkapazitäten bei der Eichung mit Aceton-Wasser-Gemischen beim konstanten Druck von 1 Atm. Beim Eichen des Fläschchens mit Aceton-Wasser-Gemischen wurde also dieselbe Änderung ΔC durch Änderung der Dielektrizitätskonstante der Fläschchenfüllung um $\Delta \varepsilon$ erzeugt. Folglich

$$\Delta C = c_1 \cdot \Delta \varepsilon . \tag{3}$$

Gleichung (2) und (3) ergeben, wenn $\Delta \varepsilon / \Delta p = A$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p} = A - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} \frac{c_2}{c_1} ,$$

wo

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} \cdot \frac{c_2}{c_1}$$

das Korrektionsglied ist.

Durch Messungen mit Hilfe der Differentialschaltung wurde festgestellt, daß sich die Kapazität des nur mit Luft gefüllten Druckgefäßes (also ohne Fläschchen) $= K$ durch

Hineinbringen des mit Aceton gefüllten Fläschchens um 0,97 cm
„ „ „ Luft „ „ „ $0{,}08_5$ „

Hineingießen von Paraffinöl in das innere Druckgefäß

falls Fläschchen mit Aceton gefüllt war, um 0,162 cm
„ „ „ Luft „ „ „ $0{,}13_1$ „

steigerte.

$$C_a = \varepsilon_1 c_1 + c_2 \quad = K + 0{,}97 \text{ cm}$$
$$C_b = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 = K + 0{,}97 \text{ cm} + 0{,}16_2 \text{ cm} = K + 1{,}13_2 \text{ cm}$$
$$C_c = c_1 + c_2 \quad = K + 0{,}085 \text{ cm}$$
$$C_d = c_1 + \varepsilon_2 c_2 \quad = K + 0{,}085 \text{ cm} + 0{,}13_1 \text{ cm} = K + 0{,}21_1 \text{ cm}.$$

Aus $C_b - C_a = c_2 (\varepsilon_2 - 1)$ folgt: $c_2 = \frac{0{,}162}{1{,}2} = 0{,}13_5$ cm

„ $C_d - C_c = c_2 (\varepsilon_2 - 1)$ „ $c_2 = \frac{0{,}131}{1{,}2} = 0{,}10_9$ cm

„ $C_a - C_c = c_1 (\varepsilon_1 - 1)$ „ $c_1 = \frac{0{,}885}{19{,}8} = 0{,}045$ cm

„ $C_b - C_d = c_1 (\varepsilon_1 - 1)$ „ $c_1 = \frac{0{,}916}{19{,}8} - 0{,}046$ cm.

Die Differenz der beiden Werte von c_2 zeigt, daß obige Annahme, wir könnten die Paraffinölkapazität als parallel zur Fläschchenkapazität geschaltet ansehen, genau der Wirklichkeit nicht entspricht. Es treten Kraftlinien aus der

Fläschchenkapazität in das Paraffinöl und umgekehrt. Der Fehler, der bei Bestimmung des Korrektionsgliedes unter obiger Annahme gemacht wird, liegt aber, da es sich um Korrektionsglieder handelt, innerhalb der Beobachtungsfehler bei der Bestimmung von $\Delta\varepsilon$. Es können daher Mittelwerte von c_1 und c_2 zur Bestimmung des Korrektionsgliedes mit hinreichender Genauigkeit benutzt werden.

$\partial\varepsilon_2/\partial p$ beträgt nach Ortvay[1]) für den Bereich von 7—200 Atm. $= 0{,}00010_4$.

Das Korrektionsglied

$$\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial p}\cdot\frac{c_2}{c_1} = \frac{0{,}00010_4\cdot 0{,}12_3}{0{,}045_8} = 0{,}00028.$$

Nun war $A = \partial\varepsilon/\partial p$ *unkorrigiert* für Wasser von 16,3° zwischen 7 und 200 Atm.

$$A = 0{,}0040_2$$

Korrektionsglied $= 0{,}00028,$

also ist $\partial\varepsilon/\partial p$ für Wasser *korrigiert* $= 0{,}0037_4$.

Die Korrektion beträgt also 7%.

Folglich beträgt der nach der Drudeschen cotg-Formel berechnete Wert $\Delta\varepsilon = 0{,}77_8$, welchen ich für den genaueren halte, korrigiert: $\Delta\varepsilon$ korrigiert $= 0{,}72_2$[2]) für 193 Atm. Druckdifferenz bei 16,3°.

Unter der Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante von Wasser sich nahezu proportional mit der Dichte ändert (die Annahme bestätigt sich später), kann aus dem Drudeschen Wert der Dielektrizitätskonstante von Wasser für 1 Atm. die Dielektrizitätskonstante für 7 Atm. berechnet werden.

Es beträgt: $\varepsilon_{16{,}3°,\ 7\ \text{Atm.}} = 82{,}0_1$.

Obgleich die beschriebene Anordnung gestattet, Änderungen der Kapazität auf einige Prozent genau zu messen, so halte ich $\Delta\varepsilon$ nur auf die erste Dezimale für sichergestellt, da infolge der Kompression das Volumen des Fläschchens sich ändert und kleine Deformationen am Druckgefäß eingetreten sein können. Durch Drucksteigerung von 7 auf 200 Atm.

1) R. Ortvay, Ann. d. Phys. **36**. S. 21. 1911.

2) In meiner vorläufigen Mitteilung über Änderung der Dielektrizitätskonstante des Wassers durch Drucksteigerung in den Sitzungsber. u. Abhandl. d. naturf. Ges. Rostock, Bd. IV, 1914, ist die Paraffinölkorrektion mit einem Fehler behaftet. Es fehlte mir damals eine Einrichtung zur Messung kleiner Kapazitätsänderungen.

bei 16,3° hat ε eine Zunahme von 0,8$_8$% erfahren, und es beträgt im Mittel zwischen 7—200 Atm. für Wasser: $\Delta\varepsilon = 0{,}004_6$% pro 1 Atm. Drucksteigerung bei 16,3° und einer Wellenlänge von 5 m.

II. Äthylalkohol.

Zu den Messungen wurde 99,8% Äthylalkohol von Kahlbaum benutzt. Die Messungen wurden mit denselben Vorsichtsmaßregeln wie bei Wasser durchgeführt. Für Äthylalkoholfüllung erwies sich ein Verschluß des Fläschchens nötig, da ohne diesen Verschluß sich die Dielektrizitätskonstante der Füllung durch Auflösen des Paraffinöls in Alkohol änderte. Der Verschluß bestand aus einer angekitteten U-förmig gebogenen Glaskapillare, in welcher sich ein Quecksilberfaden befand. Die Kapillare gab keine nachweisbare Änderung der gesamten Kapazität. Mit zwei verschiedenen Füllungen wurden wie beim Wasser Resonanzkurven bei 15 und 200 Atm. ausgeführt. Die Verschiebung des Resonanzpunktes am Sender durch Drucksteigerung betrug im Mittel $2{,}1_8$ mm wie Tab. 2 zeigt:

Tabelle 2.

Gruppe	Mikrometer-Einst. des Senders in mm bei 7 Atm. vor erhöhtem Druck	200 Atm.	15 Atm. nach erhöhtem Druck	Mittlere Differenz der Einstellungen
1	$38{,}2_5$	$40{,}4_3$	$38{,}5_9$	$2{,}0_3$
2	$39{,}7_6$	$42{,}1_7$	$40{,}0_2$	$2{,}2_9$
				Im Mittel $2{,}1_8 \pm 0{,}07$

Die Messungen sind ungenauer als wie beim Wasser, weil das Dämpfängsdekrement beträchtlich größer als beim Wasser war. Obiger Senderverlängerung von 2,16 mm entspricht eine Empfängerverlängerung von 2,20 mm. Die Eichung des Fläschchens mit Aceton-Wassergemischen mußte erneuert werden, weil der Sender nach den Messungen mit Wasserfüllung zwecks Reinigung der Funkenstrecke auseinandergenommen war. Die zur Berechnung benutzten Werte l_1, l_2 und l_3 sind in der folgenden Tabelle 3 enthalten.

Nach der cotg-Formel beträgt $\Delta\varepsilon$ unkorrigiert $= 0{,}48$ und nach Anbringung der für Äthylalkoholfüllung wie oben

Tabelle 3.

Flüssigkeit	Temperatur	Druck in Atm.	l_0	ε
100 Proz. Aceton . .	19,5	1	$l_1 = 91{,}8_7$	$26{,}4_0$
89,9 „ „ . .	19,5	1	$l_2 = 98{,}2_5$	$26{,}1_2$
Äthylalkohol	20,0	15	$l_3 = 90{,}2_5$	—

bei Wasserfüllung berechneten Paraffinölkorrektion $\Delta\varepsilon$ korrigiert = 0,43.

Die Dielektrizitätskonstante von Äthylalkohol beträgt nach der cotg-Formel aus Einstellung l_3 berechnet:

$$\varepsilon_{20°,15\,\text{Atm.}} = 23{,}9_0.$$

Durch Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. bei 20,0° hat ε eine Zunahme von $1{,}8_0\,\%$ erfahren. Es beträgt $\Delta\varepsilon = 0{,}009_7$ pro 1 Atm. Druckdifferenz für 20,0° im Mittel zwischen 15 und 200 Atm.

III. Methylalkohol.

Zu den Messungen wurde bester Methylalkohol von Kahlbaum benutzt. Die Messungen mit vier verschiedenen Füllungen wurden unter denselben Vorsichtsmaßregeln wie oben ausgeführt. Die Einstellungen für 15 Atm. vor und nach erhöhtem Druck zeigten nichtmeßbare Unterschiede. Es wurden daher die Galvanometerausschläge und die betreffenden Einstellungen *beider* Messungsreihen zur Zeichnung *einer* Resonanzkurve benutzt. Die Änderung der Einstellung l_3 am Sender durch Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. bei 18,0° betrug:

Tabelle 4.

Gruppe I	$3{,}1_2$ mm
„ II	$3{,}1_3$ „
„ III	$3{,}0_5$ „
„ IV	$3{,}0_5$ „
Mittelwert	$3{,}0_9$ mm $\pm$ 0,04

3,09 mm Verlängerung des Senders entsprechen 2,95 mm am Empfänger. Die Mittelwerte von Einstellungen des Empfängers für verschiedene Eichflüssigkeiten enthält untenstehende Tab. 5. Die Mittelwerte dieser Tabelle und der Eichtabellen für Äthylalkohol und Aceton sind zur Zeichnung

einer Kurve Fig. 4 benutzt, welche die Abhängigkeit der Einstellung des Empfängers von der Dielektrizitätskonstante der Fläschchenfüllung zeigt.

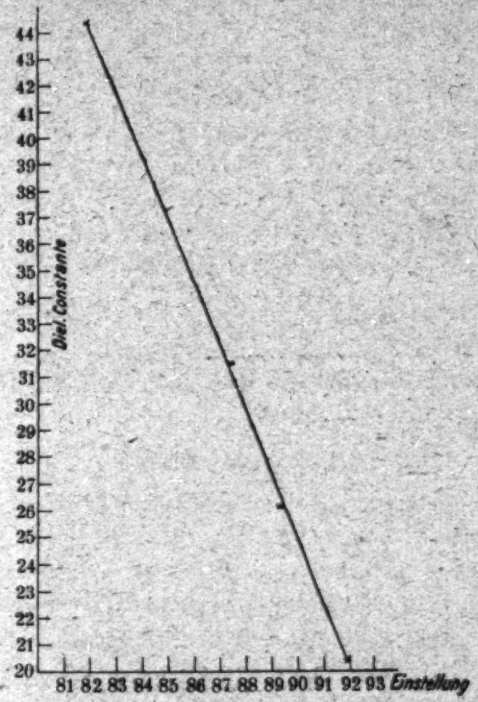


Fig. 4.

Tabelle 5.

Flüssigkeit	Temperatur	Druck in Atm.	l	s
Methylalkohol	18,0	15	$l_4 = 86{,}6$	—
80,2 Proz. Aceton . .	18,0	1	$l_3 = 87{,}4$	31,5
60,0 „ „ . .	18,0	1	$l_5 = 81{,}8_5$	44,4

Nach der cotg-Formel beträgt $\Delta\,\varepsilon$ unkorrigiert $= 0{,}67_2$ und nach Anbringung der für Methylalkoholfüllung wie vorstehend berechneten Paraffinölkorrektion

$$\Delta\,\varepsilon = 0{,}62_0\,.$$

Der aus der Kurve Fig. 4 entnommene Wert der Dielektrizitätskonstante für Methylalkohol beträgt:

$$\varepsilon_{18{,}0^\circ,\ 15\,\text{Atm.}} = 33_0\,.$$

Durch Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. hat ε eine Zunahme von $1{,}8_8\,\%$ erfahren. Es beträgt:

$$\Delta\,\varepsilon = 0{,}010_2$$

pro 1 Atm. Druckdifferenz für 18,0° im Mittel zwischen 15 und 200 Atm.

IV. Aceton.

Zu den Messungen wurde Aceton von Kahlbaum benutzt. Es wurde unter Beobachtung aller oben erwähnten Vorsichtsmaßregeln Resonanzkurven für 15 und 200 Atm. bei 20,0° aufgenommen. Die Änderung der Einstellung l_2 am Sender durch Drucksteigerung um 185 Atm. betrug im Mittel $2{,}9_8$, wie Tab. 6 zeigt.

Tabelle 6.

Gruppe	Mikrometer-Einst. des Senders in mm bei 15 Atm. vor erhöhtem Druck	200 Atm.	15 Atm. nach erhöhtem Druck	Mittlere Differenz der Einstellungen
1	$40{,}2_5$	$43{,}0_0$	$39{,}7_5$	$3{,}0_0$
2	$42{,}1_0$	$44{,}9_5$	$41{,}9_0$	$2{,}0_5$
			Mittelwert	$2{,}9_8 \pm 0{,}03$ [1]

$\Delta\,l = 2{,}98$ mm am Sender entspricht $\Delta\,l = 3{,}03$ mm am Empfänger. Unter der Annahme (die sich später bestätigt), daß bei Drucksteigerung ε $^4/_3$mal schneller wächst als die Dichte, beträgt nach den Drudeschen Werten die Dielektrizitätskonstante von Aceton für 1 Atm.:

$$\varepsilon_{20°,15\text{ Atm.}} = 20{,}43.$$

Die zur Berechnung von $\Delta\,\varepsilon$ benutzten Einstellungen für verschiedene Eichflüssigkeiten enthält folgende Tab. 7.

Tabelle 7.

Flüssigkeit	Temperatur	Druck in Atm.	l	ε
100 Proz. Aceton . .	20,0	15	$l_7 = 91{,}8_3$	$20{,}4_3$
89,9 „ „ . .	19,0	1	$l_3 = 89{,}2_4$	$26{,}1_2$

1) Die zunehmende Genauigkeit der Messungen erklärt sich durch die während der Messungen gemachten Erfahrungen. Die Messungen an den verschiedenen Flüssigkeiten wurden in der Reihenfolge angestellt, in der sie beschrieben sind. Die größere Fehlergrenze für Wasser erklärt sich wohl durch ungenügenden Temperaturausgleich.

Nach der cotg-Formel beträgt $\Delta\varepsilon$ unkorrigiert $= 0{,}64_4$ und nach Anbringung der für Acetonfüllung berechneten Paraffinölkorrektion $\Delta\varepsilon$ korrigiert $= 0{,}59$.

Also hat durch die Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. bei 20,0° ε eine Zunahme von 2,9% erfahren. Es beträgt $\Delta\varepsilon = 0{,}016\%$ pro 1 Atm. Druckdifferenz bei 20,0° im Mittel zwischen 15 und 200 Atm.

Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante der untersuchten Flüssigkeiten von ihrer Dichte.

Die bei den Messungen benutzte Wellenlänge von 5 m kann als praktisch unendlich groß angesehen werden. Es kann daher für ∞ lange Wellen $n_\infty = \sqrt{\varepsilon}$ gesetzt werden.

In folgendem soll die Frage erörtert werden, welche der drei vielumstrittenen Refraktionsformeln $\frac{n-1}{d} = \text{konst.}$, $\frac{n^2-1}{d} = \text{konst.}$ und $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{konst.}$ für die untersuchten Flüssigkeiten die Abhängigkeit des Brechungsexponenten n von der Dichte d bei konstanter Temperatur am besten darstellt. Tab. 9 enthält in Spalte 7 die mit Hilfe der beobachteten Kompressibilitäten berechneten Dichten. Spalte 8 bis 10 die mit Hilfe der obengenannten drei Refraktionsformeln berechneten Dichten.

Die mittleren Kompressibilitäten für 1—7 bzw. 1—15 und 1—200 Atm. wurden aus den von Amagat[1]) und Röntgen[2]) beobachteten Werten für Wasser und Äthylalkohol berechnet, für Methylalkohol und Aceton graphisch interpoliert. Die Fehlergrenze der so berechneten Dichte von Wasser, Äthylalkohol und Methylalkohol liegt innerhalb der Fehlergrenze der beobachteten Druckkoeffizienten der Dielektrizitätskonstanten. Die für Aceton berechnete Dichte dürfte nur auf 20% genau sein, da zur graphischen Interpolation nur die Abhängigkeit der Kompressibilität vom Druck für 0° und die mittlere Kompressibilität für 8,9 bis 36,5 Atm. bei 14,2° bekannt sind. Die zur Berechnung von d benutzten Kompressibilitäten enthält Tab. 8.

---

1) Landolt und Börnstein.
2) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 44. S. 22. 1891.

Tabelle 8.

Druck in Atm.	Mittlere Kompressibilitäten = 10^{-6}			
	Wasser 16,3°	Äthylalkohol 20,0°	Methylalkohol 18,0°	Aceton 20,0°
1— 7	49_4	—	—	—
1— 15	—	11_3	12_6	11_9?
1—200	46_{11}	10_1	11_1	11_6?

Tabelle 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Flüssigkeit	Druck in Atm.	n^2	$\frac{n^2-1}{d}$	$\frac{n-1}{d}$	$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$	d berechn. aus Kompressibilit.	d berechnet nach $\frac{n^2-1}{d}=c$	$\frac{n-1}{d}=c$	$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}=c$
Wasser	7	$82,0_1$	$81,0_6$	$8,06_3$	$0,965_1$	$0,992_2$			
	200	$82,7_3$	$81,0_7$	$8,03_0$	$0,956_8$	$1,008_9$	$1,008_1$	$1,004_1$	$0,999_5$
Methylalkohol	15	$33,0_0$	$40,2_7$	$5,97_1$	$1,15_1$	$0,794_6$			
	200	$33,6_2$	$40,2_1$	$5,91_5$	$1,12_9$	$0,811_2$	$0,810_0$	$0,808_6$	$0,795_9$
Äthylalkohol	15	$28,9_0$	$28,9_8$	$4,91_9$	$1,11_8$	$0,794_8$			
	200	$24,3_3$	$28,9_6$	$4,88_1$	$1,10_0$	$0,805_6$	$0,805_8$	$0,799_5$	$0,792_3$
Aceton	15	$20,4_3$	$24,4_9$	$4,43_7$	$1,09_3$	$0,793_3$			
	200	$21,0_3$	$24,7_3$?	$4,42_7$?	$1,07_4$?	$0,809_7$?	$0,817_5$?	$0,807_8$?	$0,796_4$?

Für Wasser und beide Alkohole kann man nur von einer Konstanz des Ausdruckes $\frac{n^2-1}{d}$ reden. Ebenso zeigt für diese drei Flüssigkeiten die mit Hilfe derselben Refraktionskonstanten für 200 Atm. berechnete Dichte nur kleine, innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtungen liegende, Abweichung. Die nach der Lorentz-Lorenzschen Refraktionsformel berechneten Dichten entsprechen am wenigsten der Wirklichkeit. Bereits Röntgen[1]) berechnete nach der Lorentz-Lorenzschen Formel, daß die Dielektrizitätskonstante von Wasser 25mal stärker beeinflußt werden müßte als die Dichte, wohingegen nach vorliegenden Messungen die Dielektrizitätskonstanten von Wasser und beider Alkohole durch Druck nahezu ebenso stark geändert werden wie die Dichten.

Die Dielektrizitätskonstante von Aceton wird durch Druck stärker beeinflußt als die der drei anderen Flüssigkeiten, doch lassen sich für Aceton sichere Schlüsse vorläufig noch nicht

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. **44**. S. 51. 1891.

ziehen, da, wie bereits oben angegeben wurde, die Kompressibilität von Aceton für die verwandten Drucke und Temperaturen nicht genau genug bekannt ist.

Zum Vergleich der von mir gefundenen Druckkoeffizienten der Dielektrizitätskonstante gebe ich folgenden Auszug aus der Tab. XIII der Röntgen-Zehnderschen[1]) Arbeit über Beeinflussung des Brechungsexponenten durch Druck für Na-Licht. In der 6. Spalte der Tab. 9 habe ich die Kompressibilität nach Angaben beider Verfasser mit Hilfe des Ausdrucks $\frac{n^2-1}{d} = \text{konst.}$ berechnet.

Tabelle 10.

Druck und Berechnungsexponent nach Röntgen.

Flüssigkeit	Temperatur	Kompressibilität · 10^{-6} beobachtet	berechnet nach $\frac{n-1}{d} = c$	berechnet nach $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d} = c$	berechnet nach $\frac{n^2-1}{d} = c$
Wasser . . .	17,95	46,2	45,7	41,5	52,3
Methylalkohol	17,60	119,5	124,4	113,0	142
Äthylalkohol	19,30	111,4	116,5	104,6	134

Die nach der Refraktionskonstante $\frac{n-1}{d}$ berechnete Kompressibilität für Wasser zeigt fast genaue Übereinstimmung mit der beobachteten Kompressibilität. Die nach $\frac{n^2-1}{d}$ berechneten Kompressibilitäten zeigen für die drei Flüssigkeiten die größte Abweichung von der beobachteten Kompressibilität.

Schließlich gebe ich einen Tabellenauszug der Ortvayschen[2]) Arbeit über „Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten". Ortvay prüfte nur für Benzol und Äthyläther die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Dichte, weil bei den anderen von ihm untersuchten Flüssigkeiten die Kompressibilitäten nicht genügend bekannt sind.

Spalte 5 und 6 der Tab. 11 enthält die von mir nach Ortvayschen Angaben berechneten Refraktionskonstanten.

1) W. C. Röntgen und Zehnder, Ann. d. Phys. **44**. S. 49. 1891.
2) R. Ortvay, Ann. d. Phys. **36**. S. 12. 1911.

Tabelle 11.

Nach Ortvay für $\lambda = \infty$.

1 Flüssigkeit	2 Druck in Atm.	3 ε	4 $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$	5 $\frac{n^2-1}{d}$	6 $\frac{n-1}{d}$
Äthyläther bei 17,4°	1	4,378	0,7379	4,707	1,522
	201	4,557	0,7327	4,805	1,533
	501	4,779	0,7283	4,937	1,549
Benzol bei 20,0°	1	2,285	0,3412	1,462	0,5821
	201	2,311	0,3396	1,464	0,5809
	501	2,345	0,3372	1,465	0,5788

Bei Benzol zeigt die Refraktionskonstante $\frac{n^2-1}{d}$ für 1—500 Atm. gute Übereinstimmung. Äthyläther zeigt im Intervall von 1—500 Atm. für alle drei Refraktionskonstanten beträchtliche Abweichungen.

Die Lorentz-Lorenzsche Formel ist abgeleitet für Körper, deren Molekeln kugelförmig und so weit voneinander entfernt sind, daß man das Feld im Innern der Kugel als homogen ansehen darf. Ich weise nun auf die grundlegende Abhandlung Otto Wieners „Zur Theorie der Refraktionskonstanten“ [1]) hin. Wiener stellte den Zusammenhang zwischen Dichte und Dielektrizitätskonstante in der die Allgemeinheit der Fälle umfassenden Form

$$\frac{1}{d}\,\frac{n^2-1}{n^2+\bar{u}} = \text{Const.} \tag{1}$$

dar. Wiener nennt u die Formzahl, weil, wie Wiener und seine Mitarbeiter [2]) experimentell feststellten, die Abweichung der Größe u von 2 um so größer ist, je mehr die Form der Molekel von der Kugelform abweicht. Berechnen wir u für die hier untersuchten Flüssigkeiten nach der Gleichung

$$\bar{u} = \frac{n_1^2 d_1 (n_2^2-1) - n_2^2 d_2 (n_1^2-1)}{\left[\frac{n_1^2-1}{d_1} - \frac{n_2^2-1}{d_2}\right] d_1 d_2},$$

welche aus (1) sich ergibt, wenn man

1) Otto Wiener, Berichte der Leipz. Ges. d. Wissensch., Math.-phys. Kl. **61.** S. 256. 1909/10.

2) E. Ficker, Diss. Leipzig 1909; Ann. d. Phys. **31.** S. 365. 1910 und W. John, Ann. d. Phys. **55.** S. 299. 1918.

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + \bar{u}} \cdot \frac{1}{d_1} = \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + \bar{u}} \cdot \frac{1}{d_2}$$

setzt. Hier bedeutet n_1^2, n_2^2 und d_1, d_2 die Dielektrizitätskonstanten bzw. Dichten für niedrige und hohe Drucke.

Die Resultate enthält Tab. 12. Ferner enthält Tab. 12 Werte von u, welche ich nach den Meßergebnissen der bereits erwähnten Abhandlung von Ortvay berechnete. Außerdem füge ich einige von Wiener errechnete Werte von u nach den Messungen von Röntgen und Zehnder für Na-Licht — derselben Tabelle zu.

Tabelle 12.

Stoff	u für Na-Licht	Beobachter	u für lange Wellen	Druckbereich	Beobachter
Wasser	4,96	Röntgen u. Zehnder	negativ sehr groß	7—200 Atm.	Falckenberg
Methylalkohol	3,08	„	negativ sehr groß	15—200 „	„
Äthylalkohol	3,15	„	∞	15—200 „	„
Aceton	—	„	41?	15—200 „	„
Äthyläther . .	3,09	„	3,8	1—500 „	Ortvay
Benzol	3,17	„	27	1—500 „	„

Unendlich große Werte für u haben physikalisch keinen Sinn. Die Berechnung von u für lange Wellen ist indes sehr unsicher, da bei der geringen Größe der Änderung der Dielektrizitätskonstante die Genauigkeit der Messung für diesen Zweck nicht ausreicht. Eine Fehlerberechnung für den von mir für Wasser ermittelten Wert von $\Delta\varepsilon$ zeigt, daß für 10% (20%) größere Werte von $\Delta\varepsilon$ als beobachtet u noch den großen Wert $u = +946$ $(+441)$ annimmt. Wiener wies nun bereits auf den Zusammenhang zwischen Refraktionskonstante und Polymerisation hin. Die von mir untersuchten vier Flüssigkeiten sind mehr oder weniger stark polymerisiert.

Einen gewissen Anhalt zur Berechnung des Grades der Polymerisation bietet das Gesetz von Eötvös.[1]) Nach diesem Gesetz ist der Temperaturkoeffizient „k" der molekularen Oberflächenenergie für die Mehrzahl der Flüssigkeiten ca. 2,12.

1) R. Eötvös, Ann. d. Phys. **27**. S. 452. 1886.

Die Abweichung des Temperaturkoeffizienten vom Normalwert bietet ein gewisses Maß für den Grad der Polymerisation. Werte für k nach Ramsay und Shields[1]) für die in vorliegender Arbeit untersuchten Flüssigkeiten enthält Tab. 13.

Ein weiteres Kriterium für den Grad der Polymerisation bietet das Gesetz von Trouton.[2]) Nach diesem Gesetz schwankt der Wert für den Quotienten aus der molekularen Verdampfungswärme (M. V. W.) und der absolut gezählten Siedetemperatur (T), $\frac{M.V.W.}{T}$ für die meisten Stoffe zwischen den Zahlenwerten 20 und 22. Tab. 13 enthält die Werte von $\frac{M.V.W.}{T}$ für die untersuchten Flüssigkeiten.

Tabelle 13.

	K	$\frac{M.V.W.}{T}$
Normalwert . .	2.12	20—22
Wasser	0,89	25,90
Äthylalkohol . . .	1,08	28,84
Methylalkohol . .	0,93	24,90
Aceton	1,82	23,7
Äthyläther	2,17	21,4
Benzol	2,10	20,84

Die unmöglichen Werte von u für Wasser und die beiden Alkohole erklären sich also dadurch, daß eine wichtige Voraussetzung der Wienerschen Untersuchungen, nämlich, daß durch die Drucksteigerung keine Änderung der Molekeln eintritt, bei den drei genannten Flüssigkeiten nicht erfüllt ist. Der Wert von u für das weniger polymerisierte Aceton ist bedeutend kleiner wie für Wasser und die beiden Alkohole, jedoch lassen sich aus diesem Wert sichere Schlüsse noch nicht ziehen, weil, wie bereits bei der Berechnung der Refraktionskonstante erwähnt wurde, die Kompressibilität von Aceton nicht genau genug bekannt ist. Außerdem verweise ich auf den großen Wert von u für Benzol bei langen Wellen, obgleich Benzol offenbar nicht polymerisiert ist. Für kurze Wellen wies bereits Wiener (a. a. O.) auf dieselbe Tatsache

1) W. Ramsay und J. Shields, Zeitschr. f. physik. Chemie 12. S. 433. 1893.

2) F. Trouton, Phil. Mag. (5) 18. S. 54. 1884.

hin und macht in diesem Falle die Form der Molekel des Benzols dafür verantwortlich. Nach der Röntgenschen Abhandlung über „Die Konstitution des flüssigen Wassers“[1]) geht hervor, daß durch Drucksteigerung sich das Verhältnis der „Eismolekeln“ (nach seiner Bezeichnung) zu den normalen Wassermolekeln ändert. Nach der heutigen Auffassung sind die eine der beiden Arten von Molekeln die polymerisierten. Die sehr großen Werte von u für Wasser und die beiden Alkohole bestätigen die Ansicht Röntgens, daß sich das Verhältnis der polymerisierten zu den normalen Molekeln auch bei anderen Flüssigkeiten als Wasser durch Drucksteigerung ändert. Erst weitere Untersuchungen am Wasser über die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante vom Druck für verschiedene Temperaturen, welche ich mit einer empfindlichen Differentialanordnung auszuführen beabsichtige, werden wohl weitere Klärung der Röntgenschen Vermutung bringen.

Zusammenfassung.

In vorliegender Arbeit wurde der Druckkoeffizient der Dielektrizitätskonstanten von Wasser, Äthylalkohol, Methylalkohol und Aceton untersucht. Die mittlere Änderung der Dielektrizitätskonstante pro 1 Atm. Druckdifferenz im Druckbereich von 7 (bzw. 15) bei 200 Atm. betrug für $\lambda = 5$ m:

Tabelle 14.

Flüssigkeit	Temperatur	Druckintervall in Atm.	$\Delta\varepsilon$ pro 1 Atm. Druckdifferenz in Proz.
Wasser	16,3	7—200	$0{,}004_6$
Äthylalkohol	20,0	15—200	$0{,}009_7$
Methylalkohol	18,0	15—200	$0{,}010_2$
Aceton	20,0	15—200	0,016

Ferner wurde für 7 (bzw. 15) und 200 Atm. für obige Flüssigkeiten die Refraktionskonstanten

$$\frac{n-1}{d}, \quad \frac{n^2-1}{d} \quad \text{und} \quad \frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$$

berechnet, wenn $n = \sqrt{\varepsilon}$ der Brechungsexponent für die benutzte Welle ist. Für Wasser und beide Alkohole wurde eine

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 45. S. 91. 1892.

gute Übereinstimmung des Ausdrucks $\frac{n^2-1}{d}$ für niedrigen und hohen Druck gefunden. Für Aceton läßt sich wegen der nicht genügend genau bekannten Kompressibilität nichts Bestimmtes sagen. Aus Angaben von Ortvay wurde der Ausdruck

$$\frac{n^2-1}{d} \quad \text{und} \quad \frac{n-1}{d}$$

für Benzol und Äthyläther berechnet. Für Benzol ergab sich für 1—500 Atm. eine gute Konstanz des Ausdrucks $\frac{n^2-1}{d}$. Für Äthyläther zeigten alle drei Refraktionskonstanten im Druckbereich von 1—500 Atm. beträchtliche Abweichungen. Die sehr großen, teils negativen Werte der Wienerschen Formzahl u für Wasser und die beiden Alkohole bestätigen die Vermutung Röntgens, daß sich durch Drucksteigerung auch bei anderen Flüssigkeiten als Wasser das Verhältnis der polymerisierten zu den nichtpolymerisierten Molekeln ändert. Ferner stehen diese durch Druckänderung hervorgebrachten Änderungen des Grades der Polymerisation in Widerspruch mit einer Voraussetzung, für welche die Wienersche und auch Lorentz-Lorenzsche Refraktionskonstante berechnet wurde.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Direktor des Rostocker Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Heydweiller, für die Anregung zu obiger Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Rostock 1919, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 12. August 1919.)

3. *Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-8}$;*
von G. Falckenberg.

Die Verwendung der Differentialschaltung zu Kapazitäts- und Selbstinduktionsmessungen ist nichts Neues. Philip[1]) und Bädecker[2]), später Ortvay[3]) benutzten Differentialschaltungen zu Kapazitätsmessungen. Eine empfindliche Differentialschaltung wurde ferner veröffentlicht in den Mitteilungen aus dem physikalisch-technischen Laboratorium von Dr. G. Seibt, Berlin. Die Kapazitätsempfindlichkeit dieser Schaltung kann nach Angabe der Firma „so weit getrieben werden, daß schon die Annäherung der Hand an den Schwingungskreis auf 10 cm sich in einer Änderung des (Galvanometer-) Ausschlages bemerkbar macht". Neuerdings hat A. Hund[4]) eine Differentialschaltung beschrieben in seiner Abhandlung „Ein neues Verfahren zur Bestimmung der magnetischen Flußdichte und Permeabilität". In diesen Schaltungen ist jedoch keine Verstärkung verwandt worden, auch werden über die Empfindlichkeit keine Zahlen angegeben.

Die Empfindlichkeit der Differentialschaltung für Kapazitäts- und Selbstinduktionsmessungen läßt sich beträchtlich steigern durch Verwendung von hochevakuierten Röhren als Wechselstromquelle und Wellenanzeiger. Über die Verwendung von hochevakuierten Röhren für die Differentialschaltung ist meines Wissens bisher nichts veröffentlicht worden.

Die von mir benutzte Differentialschaltung ist aus untenstehender Fig. 1 zu ersehen. Ungedämpfte Schwingungen werden mit einer Vakuumröhre (Type „M") der Firma C. Lorenz, Berlin, mit Hilfe einer Schaltung erzeugt, welche dieselbe Firma

1) J. C. Philip, Zeitschr. f. physik. Chemie **24.** S. 18. 1897.
2) K. Bädecker, Zeitschr. f. physik. Chemie **36.** S. 305. 1901.
3) R. Ortvay, Ann. d. Phys. **36.** S. 1. 1911.
4) A. Hund, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. **13.** S. 462. 1919.

für die von ihr gelieferten Röhrensender benutzt. Mit dem Schwingungskreis des Röhrensenders sind zwei möglichst symmetrische Schwingungskreise lose induktiv gekoppelt. Die beiden entgegengesetzt gewickelten Selbstinduktionen IV und V heben sich in ihrer Wirkung auf den Schwingungskreis VI für den Fall auf, daß die Ströme in beiden Zweigen der Differentialschaltung gleiche Amplitude und Phase besitzen. Als Wellenindikator für den Schwingungskreis VI dient ein Galvanometer, welches in den Anodenstromkreis der zweiten Röhre eines Röhrenverstärkers[1]) eingeschaltet ist. Die im Verstärker benutzten Widerstände bestehen aus Silit.[2]) Der Wellenindikator arbeitet folgendermaßen: Die Stromstärke des Galvanometers sinkt, sowie der Schwingungskreis VI erregt wird. Maximale Stromstärke wird also vom Galvanometer für den Fall angezeigt, daß sich die beiden Differentialkreise in ihrer Wirkung auf Schwingungskreis VI völlig aufheben. Die Empfindlichkeit der Differentialschaltung kann noch gesteigert werden durch Einschaltung einer elektromotorischen Kompensationskraft in den Galvanometerkreis, wie aus der Fig. 1 ersichtlich ist. Ein Akkumulator wird mit einem regulierbaren Vorschaltwiderstand A so an die Enden des Widerstandes D angeschlossen, daß die elektromotorische Kraft bei D die elektromotorische Kraft an den Enden des Widerstandes B für maximalen Anodenstrom nahezu aufhebt. Der Nebenschluß B des Galvanometers kann durch Einführung dieser Kompensation um ein Vielfaches vergrößert werden. Die Empfindlichkeit des Wellenindikators steigt proportional der Größe des Nebenschlußwiderstandes B. Ist eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit erwünscht, z. B. für Messungen des Druckkoeffizienten der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten, so wird zweckmäßig nicht die Stellung des geeichten Vergleichskondensators bei maximaler Stromstärke des Galvanometers (Umkehrpunkt) abgelesen, sondern

1) Diesen mit Silitwiderständen versehenen Verstärker lernte ich in meiner dienstlichen Tätigkeit Ende 1918 bei der Inspektion des Torpedowesens in Kiel kennen. Soweit mir bekannt ist, wurden Widerstände im Anodenstromkreis der Verstärker zuerst von Barkhausen benutzt.

2) Silitwiderstände wurden bezogen von der Firma Gebr. Siemens, Lichtenberg bei Berlin.

zwei Stellungen des Meßkondensators für zwei gleichgroße Galvanometerausschläge auf beiden Seiten des Resonanzpunktes. Der Mittelwert dieser beiden Stellungen ist dann die gesuchte Kapazität.

Die Empfindlichkeit oben beschriebener Anordnung für Kapazitätsmessungen soll nun an einem Beispiel gezeigt werden. Sollen kleine Änderungen der Kapazität gemessen werden, wie sie etwa durch Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten der

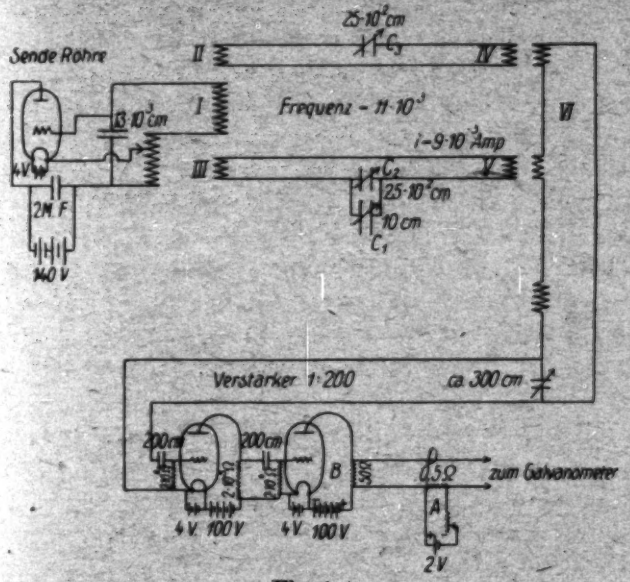


Fig. 1.

zwischen den Platten des Kondensators C_2 enthaltenen Flüssigkeit durch Drucksteigerung bedingt werden, so wird folgendermaßen verfahren. Zum Kondensator C_2 ist ein Plattenkondensator mit variablem, meßbarem Plattenabstand angebracht, der ermöglicht, die etwa durch Drucksteigerung bedingte Vergrößerung der Kapazität des Kondensators C_2 zu kompensieren. Die beiden Zweige der Differentialschaltung und Schwingungskreis VI werden auf die Eigenschwingung des Röhrensenders abgestimmt. Die Koppelung der beiden Differentialkreise mit dem Röhrensender bei II und III wird so gewählt, daß sich die induktiven Wirkungen der Spulen IV und V auf den Schwingungskreis VI aufheben, was daran erkenntlich ist, daß vom Galvanometer dieselbe Stromstärke

angezeigt wird, wie beim ausgeschalteten Sender, also, wie bereits oben erwähnt wurde, maximale Stromstärke. Wird nun die Resonanz gestört durch Vergrößerung der Kapazität C_2 durch Drucksteigerung, so sinkt der Galvanometerausschlag. C_2 muß verkleinert werden, um die Resonanz herzustellen. Die Verkleinerung der Kapazität von C_1 kann nach der bekannten Kirchhoffschen Formel aus der Änderung des Plattenabstandes errechnet werden.

Im folgenden soll nun die Gesamtkapazität des einen Differentialzweiges durch Änderung des Plattenabstandes des Meßkondensators C_1 um einen kleinen Betrag verringert werden und aus der hierdurch bedingten Änderung des Galvanometerausschlages die Empfindlichkeit der Anordnung geprüft werden.

Die Gesamtkapazität, welche sich in der Hauptsache zusammensetzt aus C_1, C_2 und den Spulenkapazitäten betrug $25 \cdot 10^2$ cm. Nun wurde der Plattenabstand des Kondensators von 5,000 mm auf 5,012 mm erhöht. Der Durchmesser der Platten des Kondensators betrug 10,0 cm, die Plattendicke 0,30 cm. Nach der Kirchhoffschen Formel beträgt für einen ungeerdeten Kondensator obiger Abmessung die Kapazität:

Plattenabstand d. Kondensators in mm	Kapazität in cm	Differenz
4,800	15,943	0,547
5,000	15,396	
5,200	14,891	0,505
5,400	14,422	0,469

Die Kapazitätsverkleinerung für obige Änderung des Plattenabstandes beträgt daher

$$\frac{0{,}52 \cdot 12}{200}\,\text{cm} = 3{,}1 \cdot 10^{-2}\,\text{cm}.$$

Der durch diese Kapazitätsverringerung bedingte Galvanometerausschlag betrug 8,1 cm.

Nun lassen sich die Galvanometerschwankungen, welche durch unkontrollierbare Vorgänge in den Röhren entstehen, für einen Beobachtungszeitraum von 10 Sekunden leicht auf 0,01 cm und darunter vermindern, falls etwa eine halbe Stunde vor der Messung die Röhren bereits eingeschaltet wurden.

Auch ungleichmäßige Wärmebestrahlung der Kondensatoren usw. etwa durch Glühlampen muß peinlichst vermieden werden. Einer noch gerade meßbaren Änderung des Galvanometerausschlages von 0,01 cm entspricht jedoch eine Kapazitätsänderung von

$$\frac{0{,}031 \cdot 0{,}01}{8{,}1} = 3{,}8 \cdot 10^{-5}.$$

(Die Änderung der Kapazität war in diesem Meßbereich nahezu proportional der Änderung der Galvanometerausschläge.) Die Empfindlichkeit der Anordnung beträgt also:

$$\frac{\text{Meßbare Kapazitätsänderung}}{\text{Gesamtkapazität}} = \frac{3{,}8 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{3}} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}.$$

Die angegebene Empfindlichkeit gilt für eine Frequenz von 11000 (Wellenlänge = 27000 m). Dieselbe Empfindlichkeit wurde beobachtet für Kapazitätsänderungen eines Nernstkondensators, welcher C_1 und C_2 parallel geschaltet wurde. Die Glasplatte des normalen Nernstkondensators wurde hierbei durch einen 8 mm breiten, 0,19 mm dicken Glimmerstreifen ersetzt, welcher durch eine Mikrometerschraube verschoben wurde. $^1/_{100}$ mm Verschiebung des Glimmerstreifens entspricht einer Kapazitätsänderung von $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ cm. Diese kleine Kapazitätsänderung ergab noch gut meßbare Galvanometerausschläge.

Ein weiteres Beispiel für die große Empfindlichkeit dieser Anordnung ist folgendes: Bereits Annäherung der Hand auf etwa 2 m an einen der beiden Zweige der Differentialschaltung ergab eine meßbare Änderung des Galvanometerausschlages. Der Experimentator muß daher die Meßkondensatoren aus mindestens 2 m Entfernung, etwa durch Glasstangen bedienen, falls nicht die Differentialschaltung durch ein metallisches Gitter vor äußeren Einflüssen geschützt wird.

Für die 2300-, 4000- und 27000-m-Welle wurden *ohne* Verstärkung unter Benutzung eines Detektors nahezu gleiche Empfindlichkeiten der Differentialschaltung festgestellt. Es kann daraus wohl geschlossen werden, daß für die 2300-m-Welle bei Verwendung der beschriebenen Verstärkeranordnung nahezu die gleiche Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-8}$ erreichbar ist. Da sich mit Röhrensendern Wellenlängen bis 20 m leicht herstellen lassen, wird aller Wahrscheinlichkeit nach auch für

diese kurzen Wellen die angegebene Differentialschaltung noch hohe Empfindlichkeitsgrade geben.

Obige Anordnung eignet sich auch für genaue Permeabilitätsmessungen, z. B. stark verdünnter Lösungen. In diesem Falle wird ein Glas mit der betreffenden Flüssigkeit in die Selbstinduktion IV gebracht. Ein Maß der Größe der Permeabilität bietet die Änderung der Kapazität des Meßkondensators C_1, welche erforderlich ist, um die durch Hineinbringung des gefüllten Glases erzeugte Verstimmung rückgängig zu machen. Störend erwies sich bei diesen Messungen die Vergrößerung der Spulenkapazität infolge des Hineinbringens der gefüllten Gläser. Diese Kapazitätssteigerung wurde zum größten Teil aufgehoben durch Verwendung doppelwandiger Gefäße. Fig. 2 zeigt ein derartiges Gefäß. Das Gefäß ist starr mit der Selbstinduktion IV verbunden. Im äußeren Mantel befindet sich maximal leitende Schwefelsäure, welche als Schutzmantel gegen elektrische Kraftlinien für das innere Gefäß dient. Die Füllung des inneren Raumes mit der zu untersuchenden Flüssigkeit findet durch Hineingießen statt, die Entleerung durch den Hahn.

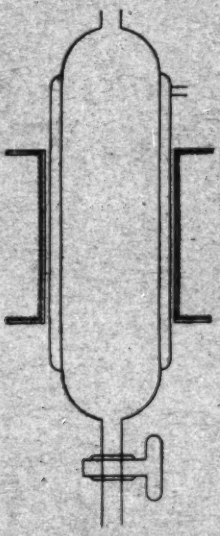


Fig. 2.

Ein Vergleich obiger Anordnung mit der von Heydweiller[1]) angegebenen Wheatstoneschen Brückenschaltung mit Zusatzwiderständen, mit welcher Philipp[2]) in seiner Abhandlung über „Untersuchungen über Magnetisierungszahlen von Salzen der Eisengruppe und die Abhängigkeit von der Konzentration" eine Empfindlichkeit von $6 \cdot 10^{-7}$ erreichte, zeigt, daß diese wohl bisher empfindlichste Anordnung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen durch die von mir angegebene Anordnung um über das Zehnfache an Empfindlichkeit übertroffen ist.

Rostock 1919, Physikalisches Institut.

1) A. Heydweiller, Boltzmann-Festschrift S. 4. 1903.
2) Paul Philipp, Dissertation Rostock 1914.

(Eingegangen 12. August 1919.)

4. *Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden;* *von George Jaffé.*

Versteht man unter einer Funktion $\chi(z)$ der komplexen Variablen $z = x + iy$,

$$\chi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y),$$

das komplexe Potential einer zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung, so ergeben sich die Strömungsgeschwindigkeiten u und v in bekannter Weise als partielle Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials φ oder der Stromfunktion ψ:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Soll die dargestellte Strömung an der Stelle $r = a + ib$ einen Wirbelfaden oder eine Quellinie aufweisen, so muß der Differentialquotient von $\chi(z)$,

$$\frac{d\chi(z)}{dz} = u - iv,$$

an der Stelle $z = r$ einen Pol erster Ordnung haben, und zwar mit rein imaginärem oder reellem Residuum, je nachdem es sich um Wirbel oder Quelle handelt. Damit nun $d\chi/dz$ einen solchen Pol besitzt, genügt es,

$$\chi(z) = c \lg \omega(z)$$

zu setzen, wo $\omega(z)$ bei passend bestimmter Konstante c für $z = r$ eine beliebige Nullstelle oder einen beliebigen Pol hat. Wählt man für $\omega(z)$ geeignete Funktionen, so gelangt man zu mannigfaltigen Lösungen der Strömungsgleichungen.

Im einfachsten Falle, wenn $\omega(z) = z - r$ gesetzt wird, erhält man das bekannte Potential

$$(2)\qquad \chi(z) = c \lg (z - r).$$

Es stellt die Strömung eines einzelnen Wirbelfadens oder einer Quellinie dar, und mit seiner Hilfe läßt sich die Strömung eines beliebigen Systems solcher Wirbel und Quellen im unbegrenzten Strömungsfelde zusammensetzen.

Will man eine unendliche Reihe von äquidistanten, gleichstarken Wirbelfäden oder Quellinien zusammenfassen, so braucht man für ω nur eine periodische Funktion einzusetzen. Das so gebildete Potential

$$\chi(z) = c \lg \sin (z - r) \tag{3}$$

ist von v. Kármán[1]) bei seinen Untersuchungen über den Mechanismus des Flüssigkeitswiderstandes benutzt worden, und kann, wie im folgenden gezeigt wird, mit Hilfe des Spiegelungsprinzips dazu dienen, die allgemeinste von Wirbelfäden und Quellinien herrührende zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen zwei parallelen ebenen Wänden darzustellen.

Ersetzt man den sin durch die Weierstrass'sche σ-Funktion, so stellt das Potential

$$\chi(z) = c \lg \sigma(z - r) \tag{4}$$

die Strömung eines sich nach zwei Richtungen ins Unendliche erstreckenden Systems von Wirbelfäden oder Quellinien dar, die in homologen Punkten des Periodenparallelogramms angeordnet sind. Dieses Potential leistet das gleiche für einen prismatischen Raum von rechteckigem Querschnitt, wie das Potential (3) für den Raum zwischen zwei parallelen Platten.

1. Wirbelströmung.

Es sei ein beliebiges System S von n isolierten Wirbelfäden A_ν von der Wirbelstärke $J_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ zwischen zwei parallelen Wänden vom Abstande $d/2$ gegeben; es soll das Strömungsfeld berechnet werden. Wir legen das Koordinatensystem so, daß den beiden Wänden die Gleichungen $x = 0$ und $x = d/2$ zukommen, und in diesem System sei die Lage der A_ν charakterisiert durch die komplexen Zahlen

$$r_\nu = a_\nu + i b_\nu; \qquad \nu = 1, 2 \ldots n.$$

---

1) Th. v. Kármán, Gött. Nachr. 1911. S. 509; 1912. S. 547; Th. v. Kármán u. H. Rubach, Phys. Zeitschr. 13. S. 49. 1912.

Um die Aufgabe zu lösen, spiegeln wir das System S an der Ebene $x = d/2$, d. h. wir nehmen ein zweites System S' von weiteren n Wirbelfäden $A_{n+\nu}$ hinzu, mit der Festsetzung

$$(5)\quad J_{n+\nu} = -J_\nu;\ a_{n+\nu} = d - a_\nu;\ b_{n+\nu} = b_\nu;\ \nu = 1, 2 \ldots . n.$$

Wird jetzt das Potential

$$(6)\quad \chi_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^{2n} {}_\nu J_\nu \lg \sin \frac{\pi}{d}(z - r_\nu)$$

gebildet, wo die Summation über alle Wirbel von S und S' zu erstrecken ist, so erfüllt es alle Bedingungen der Aufgabe. Zunächst ist ersichtlich, daß die durch (6) dargestellte Strömung für jede der Stellen $z = r_\nu$ einen Wirbel von der Stärke J_ν besitzt; denn für kleine Werte von $z - r_\nu$ reduziert sich (6) — von einer unwesentlichen Konstante abgesehen — mit beliebiger Genauigkeit auf

$$(6')\quad \frac{1}{2\pi i} J_\nu \lg (z - r_\nu),$$

und dieses Potential stellt einen Wirbel von der Stärke J_ν dar.

Es sind aber auch die Grenzbedingungen erfüllt, wie aus der Betrachtung des Differentialquotienten

$$(7)\quad \frac{d\chi_1}{dz} = u - iv = \frac{1}{2di} \sum_1^{2n} {}_\nu J_\nu \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d}(z - r_\nu)$$

hervorgeht. Nach Trennung des Reellen und Imaginären ergibt sich

$$(8)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_1^{2n} {}_\nu J_\nu \dfrac{\mathfrak{Sin} \frac{2\pi}{d}(y - b_\nu)}{\mathfrak{Cof} \frac{2\pi}{d}(y - b_\nu) - \cos \frac{2\pi}{d}(x - a_\nu)}, \\ v = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_1^{2n} {}_\nu J_\nu \dfrac{\sin \frac{2\pi}{d}(x - a_\nu)}{\mathfrak{Cof} \frac{2\pi}{d}(y - b_\nu) - \cos \frac{2\pi}{d}(x - a_\nu)}, \end{cases}$$

und wenn man in dem Ausdruck für u die je zwei Summanden zusammenfaßt, die von dem Wirbel A_ν und seinem Bilde $A_{n+\nu}$ herrühren, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Festsetzungen (5)

$$u = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{und für } x = d/2,$$

womit den Grenzbedingungen genügt ist. Es muß übrigens betont werden, daß durch die Grenzbedingungen an den Wänden das Potential noch nicht eindeutig bestimmt ist, und daß eine Bedingung über das Verhalten der Strömung im Unendlichen hinzukommen muß. Fordert man, daß die Strömungsgeschwindigkeiten für unendlich große y verschwinden sollen, so genügt (6) auch dieser Bedingung, und stellt bis auf eine unwesentliche, additive Konstante die eindeutige Lösung dar.

Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion für einen bestimmten Augenblick, in dem sich die Wirbel A_ν an den Stellen r_ν befinden, ergeben sich aus (6) zu:

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sum_1^{2n} J_\nu \tau_\nu, \\ \psi_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\sum_1^{2n} J_\nu \lg s_\nu, \end{cases}$$

mit der Bedeutung

$$(10)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \tau_\nu = \dfrac{\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{d}(y-b_\nu)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{d}(x-a_\nu)} \\ s_\nu = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(x-a_\nu) + \mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{d}(y-b_\nu)}. \end{cases}$$

Es ist nun noch zu berücksichtigen, daß sich die Wirbelfäden selbst im Strömungsfelde bewegen. Man erhält die Bewegung des Fadens A_ν, indem man die Strömung berechnet, die sich für die Stelle r_ν aus dem Potential (6) ergibt, nachdem man davon das Potential (6'), d. h. die Wirkung des Fadens selbst, abgezogen hat. Nun ist aber

$$\lim_{(z-r_\nu)=0} \frac{d}{dz}\left[\lg \sin \frac{\pi}{d}(z-r_\nu) - \lg (z-r_\nu)\right] = 0,$$

d. h. die durch das erste Glied dargestellte unendliche Reihe von Wirbelfäden hat keine Wirkung auf einen einzelnen der Fäden, wie ja auch schon aus Symmetriegründen hervorgeht. Anstatt also das Potential des einzelnen Fadens (6') von (6) abzuziehen, kann man einfach in (6) den Summanden unterdrücken, der sich auf den betreffenden Faden bezieht. Demnach lassen sich die Bewegungsgleichungen der Wirbelfäden

in genau analoger Weise schreiben, wie es Kirchhoff für den Fall eines unbegrenzten Strömungsfeldes zuerst getan hat.[1])

Wir definieren nämlich eine Funktion W_1 durch die folgende Gleichung:

$$(11)\qquad W_1 = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\nu,\mu\\ \nu\neq\mu}} J_\nu J_\mu \lg s_{\nu\mu}, \qquad \left.\begin{matrix}\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots 2n,$$

wobei die Summation über alle Paare von Wirbeln der Systeme S und S' zusammengenommen, und über jedes Paar nur einmal, zu erstrecken ist. Dabei hat $s_{\nu\mu}$ folgende Bedeutung:

$$(12)\qquad s_{\nu\mu} = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(a_\nu - a_\mu) + \mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{d}(b_\nu - b_\mu)}.$$

Die Bewegungsgleichungen des Wirbelfadens A_ν lauten dann:

$$(13)\qquad \begin{cases} J_\nu \dfrac{da_\nu}{dt} = \dfrac{\partial W_1}{\partial b_\nu}, \\ J_\nu \dfrac{db_\nu}{dt} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial a_\nu}. \end{cases} \qquad \nu = 1, 2, \ldots 2n.$$

Es ist zu beachten, daß die Koordinaten $a_{n+\nu}$, $b_{n+\nu}$ der zu S' gehörigen Wirbel $A_{n+\nu}$ in dem Ausdruck für W_1 stehen bleiben müssen und nicht nach (5) durch a_ν, b_ν ausgedrückt werden dürfen. Demgemäß sind sie auch bei den partiellen Differentiationen, welche (13) erfordert, als unabhängige Variable anzusehen; die Ersetzung von $a_{n+\nu}$, $b_{n+\nu}$ durch a_ν, b_ν darf erst nach erfolgter Differentiation geschehen.

Aus der Definitionsgleichung von W_1 folgt

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial a_\nu} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial a_{n+\nu}}, \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial b_\nu} = \dfrac{\partial W}{\partial b_{n+\nu}}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen sind leicht zu verifizieren, indem man je zwei Paare von Wirbeln zusammenfaßt, die spiegelbildlich zueinander liegen, und indem man (5) berücksichtigt. Aus (13) und (14) ergibt sich dann

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{da_\nu}{dt} = -\dfrac{da_{n+\nu}}{dt}, \\ \dfrac{db_\nu}{dt} = \dfrac{db_{n+\nu}}{dt}. \end{cases}$$

1) G. Kirchhoff, Mechanik. 20. Verl. ausführlicher bei Appell. Traité de Mécanique rationelle. Deuxième édition. Paris. Gauthier-Villars. 1909. 3. S. 480 ff.

Durch diese Gleichungen, die schon aus Symmetriegründen zu erwarten waren, wird die Bewegung des Systems S' vollständig auf die des Systems S zurückgeführt. Integriert besagen sie, daß die Beziehungen (5) für alle Zeiten bestehen bleiben, wenn sie zu irgendeiner Zeit bestanden haben. Demnach stellt das Potential (6) nicht nur für einen bestimmten Augenblick die Strömung des Systems dar, sondern für alle Zeiten, wenn für die Koordinaten a_ν, b_ν die durch Integration der Bewegungsgleichungen (13) gewonnenen Zeitfunktionen eingesetzt werden.

In dem Falle des unendlich ausgedehnten Strömungsfeldes lassen sich aus der Kirchhoffschen Darstellung eine Anzahl von Integralen der Bewegungsgleichungen gewinnen. Diese Integrale behalten in dem vorliegenden Falle nur zum Teil ihre Bedeutung. Betrachten wir zunächst den „Schwerpunkts-Satz".

Aus den Definitionsgleichungen (11) und (12) folgt ohne weiteres

$$\sum_1^{2n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial a_\nu} = 0, \qquad \sum_1^{2n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial b_\nu} = 0; \tag{16}$$

die zweite dieser Gleichungen ergibt mit der zweiten Gleichung (14) zusammen

$$\sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial b_\nu} = \sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial b_{n+\nu}} = 0, \tag{17}$$

dagegen ist

$$\sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial a_\nu} = -\sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial a_{n+\nu}} \tag{18}$$

im allgemeinen von 0 verschieden. Definieren wir nun die Koordinaten ξ, η des „Schwerpunkts" $\mathfrak{S}$ der fiktiven Massen J_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$) durch die Gleichungen

$$\xi \sum_1^{n}{}_\nu J_\nu = \sum_1^{n}{}_\nu a_\nu J_\nu, \qquad \eta \sum_1^{n}{}_\nu J_\nu = \sum_1^{n}{}_\nu b_\nu J_\nu, \tag{19}$$

und entsprechend die Koordinaten ξ', η' des Schwerpunkts $\mathfrak{S}'$ für das System S' durch

$$(20)\quad \xi \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} = \sum_1^n{}_\nu a_{n+\nu} J_{n+\nu}, \quad \eta \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} = \sum_1^n{}_\nu b_{n+\nu} J_{n+\nu},$$

so ist natürlich

$$(21)\qquad \xi' = d - \xi, \qquad \eta' = \eta,$$

und aus den Bewegungsgleichungen (13) folgt für die Schwerpunktskoordinaten unter Benutzung von (17) und (18)

$$(22)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi'}{dt} = 0,$$

$$(23)\qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta'}{dt}.$$

Es gilt also hier nur der Satz, daß die x-Koordinate des Schwerpunkts des ursprünglich gegebenen Systems konstant bleibt; dagegen ist $\frac{d\eta}{dt}$ im allgemeinen von 0 verschieden. Existiert der Schwerpunkt nicht (d. h. ist $\sum_1^n{}_\nu J_\nu = 0$), so treten an die Stelle von (22) und (23) die Integrale

$$(24)\qquad \sum_1^n{}_\nu J_\nu a_\nu = \text{const}, \qquad \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} a_{n+\nu} = \text{const},$$

$$(25)\qquad \sum_1^n{}_\nu J_\nu b_\nu + \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} b_{n+\nu} = \text{const},$$

aber nur (24) enthält eine Aussage über die Systeme S und S' einzeln genommen. Die Beziehung (25) [bez. (23)] ist dagegen schon in den Gleichungen (15) enthalten.

Ebenso gelten vermöge derselben Gleichungen (15) der „Flächensatz" und der „Satz von der Erhaltung der Trägheitsmomente" bezüglich einer durch den Punkt $d/2$, 0 gehenden Achse für die Systeme S und S' zusammengenommen; sie gelten aber nicht für die beiden Systeme einzeln.

Dagegen ist das Integral

$$(26)\qquad W_1 = \text{const},$$

das sich ohne weiteres aus der Beziehung

$$\frac{dW_1}{dt} = \sum_1^{2n}{}_\nu \left(\frac{\partial W_1}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial b_\nu} \frac{db_\nu}{dt} \right)$$

und den Bewegungsgleichungen (13) ergibt, wieder unabhängig von den Gleichungen (15).

Als erste Anwendung der gewonnenen allgemeinen Gleichungen betrachten wir den Fall eines einzigen Wirbelfadens A von der Stärke J, und setzen also

$$J_1 = J; \quad J_2 = -J;$$
$$a_1 = a; \quad a_2 = d - a; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad 0 < a < d/2.$$

Das Strömungsfeld berechnet sich dann aus dem Potential

$$\chi = \frac{J}{2\pi i} \lg \frac{\sin \frac{\pi}{d}[(x-a)+iy]}{\sin \frac{\pi}{d}[(x+a)+iy]},$$

und die Bewegung des Stromfadens aus

$$W = \frac{J}{2\pi} \lg \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{d}(a_1 - a_2)}.$$ [1])

Man findet daraus

$$\frac{da}{dt} = 0; \quad \frac{db}{dt} = -\frac{J}{2d} \operatorname{ctg} \frac{2\pi a}{d}. \tag{27}$$

Für $a = d/4$ steht der Wirbelfaden fest; für $0 < a < d/4$ ist $\frac{db}{dt} < 0$, für $d/4 < a < d/2$ ist $\frac{db}{dt} > 0$. Je nach der Größe von a überwiegt also der Einfluß der einen oder anderen Wand. Ist a/d klein, so findet man in erster Annäherung

$$\frac{db}{dt} = -\frac{J}{4\pi a}, \tag{27'}$$

wie bei Abwesenheit der zweiten Wand.

An Stelle der Wand bei $x = d/2$ kann man sich auch bei $x = d$ eine Wand angebracht denken; man erhält dann das Strömungsfeld zweier Wirbel von entgegengesetzt gleicher Stärke, die sich beide mit der Geschwindigkeit (27) bewegen.

Als zweites Beispiel betrachten wir zwei Wirbel von gleicher Stärke in symmetrischer Anfangslage. In diesem Falle kann man setzen (vgl. Fig. 1):

1) In diesem Ausdruck müssen a_1 und a_2 stehen bleiben und bei der Differentiation wie zwei unabhängige Variable behandelt werden, sonst gelangt man zu einem fehlerhaften Resultat (vgl. S. 177).

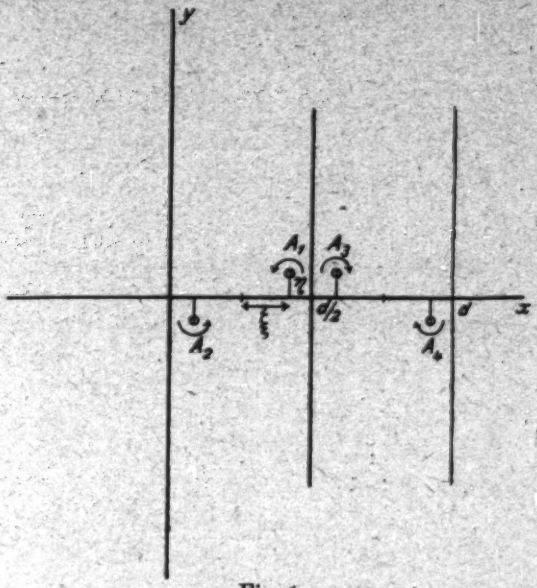


Fig. 1.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= J; \quad a_1 = d/4 + \xi; \quad b_1 = \eta; \\
J_2 &= J; \quad a_2 = d/4 - \xi; \quad b_2 = -\eta; \qquad 0 < |\xi| < d/4; \\
J_3 &= -J; \quad a_3 = 3d/4 - \xi; \quad b_3 = \eta; \qquad 0 < |\eta| < d/4; \\
J_4 &= -J; \quad a_4 = 3d/4 + \xi; \quad b_4 = -\eta.
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$
\frac{d\xi}{dt} = -\frac{J}{2d}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{4\pi\eta}{d}}{\operatorname{Cof}\frac{4\pi\eta}{d} - \cos\frac{4\pi\xi}{d}} - \operatorname{Tg}\frac{2\pi}{d}\eta\right],
$$

$$
\frac{d\eta}{dt} = \frac{J}{2d}\left[\frac{\sin\frac{4\pi\xi}{d}}{\operatorname{Cof}\frac{4\pi\eta}{d} - \cos\frac{4\pi\xi}{d}} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{d}\xi\right].
$$

Wir behandeln nur zwei Grenzfälle. Es seien erstens $\frac{4\pi\xi}{d}$ und $\frac{4\pi\eta}{d}$ kleine Größen, dann ist bis auf Glieder zweiter Ordnung in den genannten Größen

$$
\frac{d\xi}{dt} = -\frac{J}{4\pi}\frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2},
$$

$$
\frac{d\eta}{dt} = \frac{J}{4\pi}\frac{\xi}{\eta^2 + \xi^2}.
$$

Das vollständige Integral dieser Gleichungen lautet

$$\xi = \varrho_0 \cos(\nu t + \gamma), \qquad \eta = \varrho_0 \sin(\nu t + \gamma), \qquad \nu = \frac{J}{4\pi \varrho_0^2},$$

und die beiden Wirbel rotieren also näherungsweise mit konstanter Geschwindigkeit in einem Kreise umeinander, genau wie bei Abwesenheit der Wände.

Ist andererseits $d/4 - \xi = \varepsilon$ eine kleine Zahl bei beliebigem η, so ergibt sich mit gleichem Grade der Annäherung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0; \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{J}{4\pi\varepsilon},$$

in Übereinstimmung mit Formel (27'). Bei dem hier betrachteten Beispiel hängt es also von der Anfangslage ab, ob die beiden Wirbel in geschlossener Bahn verbleiben, oder unter dem Einflusse der Wände auseinanderlaufen.

Wir wenden uns nunmehr der Aufgabe zu, Strömungsfeld und Bewegung eines Systems von Wirbelfäden in einem prismatischen Raum von rechteckigem Querschnitt zu bestimmen. Die Gleichungen der Grenzebenen seien

$$x = 0; \qquad x = d/2; \qquad y = 0; \qquad y = d'/2.$$

Im folgenden bedeuten

$$\sigma(z), \qquad \zeta(z), \qquad \wp(z)$$

die Weierstrassschen Funktionen, welche zu den Perioden

(28) $$2\omega = d, \qquad 2\omega' = id'$$

gehören. Da ω reell und ω' rein imaginär ist, müssen die Invarianten g_2 und g_3, sowie die Wurzeln e_1, e_2, e_3 des zugehörigen Polynoms dritten Grades reell sein; die Diskriminante ist also positiv.[1]) Außer den genannten werden noch die Funktionen

$$\bar{\sigma}(z), \qquad \bar{\zeta}(z), \qquad \bar{\wp}(z)$$

Verwendung finden, die zu den Perioden

(29) $$2\bar{\omega} = \frac{2\omega'}{i}, \qquad 2\bar{\omega}' = 2i\omega$$

1) Die Bezeichnungen sind hier und im folgenden dem Werke G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, Paris, Gauthier-Villars, 1886, entlehnt. Für die folgenden Rechnungen sei auf dieses Werk verwiesen.

gehören. Es bestehen dann die Beziehungen

$$(30)\quad \begin{cases} \sigma(iz) = i\bar{\sigma}(z); & \zeta(iz) = -i\bar{\zeta}(z); \\ \wp(iz) = -\bar{\wp}(z); & \wp'(iz) = i\bar{\wp}'(z). \end{cases}$$

Das Wirbelsystem S möge wie bisher aus n Wirbelfäden A_ν von der Stärke J_ν bestehen, und die Wirbelfäden mögen sich zu irgendeiner Zeit an den Stellen

$$r_\nu = a_\nu + ib_\nu, \qquad \nu = 1, 2 \ldots n$$

befinden. Wir spiegeln das System S an der Ebene $x = d/2$, wobei das System S' entstehen möge; dann spiegeln wir S und S' an der Ebene $y = d'/2$ und gelangen so zu S'' und S'''. Wir nehmen also insgesamt zu S noch drei weitere Systeme hinzu, unter folgenden Festsetzungen (vgl. Fig. 2):

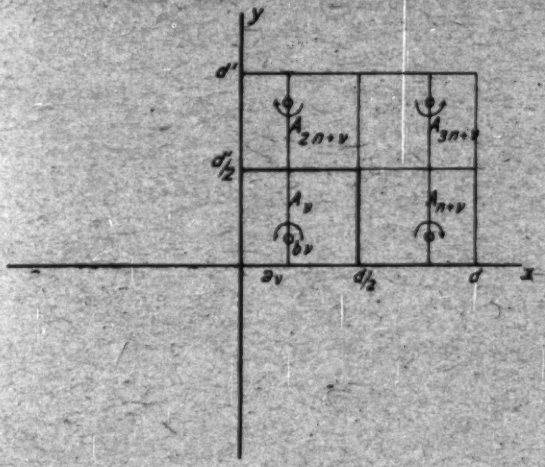


Fig. 2.

$$(31)\quad \begin{cases} \text{für } S': & J_{n+\nu} = -J_\nu; & a_{n+\nu} = d - a_\nu; & b_{n+\nu} = b_\nu \\ \text{für } S'': & J_{2n+\nu} = -J_\nu; & a_{2n+\nu} = a_\nu; & b_{2n+\nu} = d' - b_\nu \\ \text{für } S''': & J_{3n+\nu} = +J_\nu; & a_{3n+\nu} = d - a_\nu; & b_{3n+\nu} = d' - b_\nu. \end{cases}$$

Wir bilden nun das Potential

$$(32)\qquad \chi_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^{4n} J_\nu \lg \sigma(z - r_\nu),$$

wobei die Summation über alle vier Systeme zu erstrecken ist, und behaupten, daß es die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In der Tat besitzt die durch (32) dargestellte Strömung die

vorgeschriebenen Wirbel, was sich genau so zeigen läßt, wie oben (vgl. S. 175). Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich aus

$$\frac{d\chi_2}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{4n} J_\nu \zeta(z - r_\nu) \tag{33}$$

nach bekannten Formeln zu

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{4n}{}' \left[\zeta(y-b_\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{\bar{p}'(y-b_\nu)}{p(x-a_\nu)+\bar{p}(y-b_\nu)}\right], \\ v &= \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{4n}{}' \left[\zeta(x-a_\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{p'(x-a_\nu)}{p(x-a_\nu)+\bar{p}(y-b_\nu)}\right]. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Faßt man nun hier die je vier Summanden zusammen, die von den symmetrisch gelegenen Wirbeln A_ν, $A_{n+\nu}$, $A_{2n+\nu}$, $A_{3n+\nu}$ herrühren, so ergibt sich auf Grund der Festsetzungen (31)

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = d/2 \quad \text{und} \\ v &= 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = d'/2, \end{aligned}$$

womit den Grenzbedingungen genügt ist. Die Lösung ist in diesem Falle eindeutig durch die Grenzbedingungen bestimmt (d. h. χ_2 bis auf eine additive Konstante festgelegt).

Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion ergeben sich aus (32) durch Trennung des reellen und imaginären Teils; man findet[1])

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{4n}{}' J_\nu [2\pi + \tfrac{1}{2}\Phi(x-a_\nu, y-b_\nu)], \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{4n}{}' J_\nu \lg S_\nu, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

mit der Bedeutung

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x-a_\nu, y-b_\nu) &= \int_0^{y-b_\nu} \left[\zeta(x-a_\nu+i(y-b_\nu)) + \zeta(x-a_\nu-i(y-b_\nu))\right] dy, \\ S_\nu &= \sigma(x-a_\nu)\,\sigma(y-b_\nu)\sqrt{p(x-a_\nu)+\bar{p}(y-b_\nu)}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Auch in dem jetzt betrachteten Falle wirkt das durch einen einzelnen Summanden von (32) dargestellte Feld von un-

1) G. H. Halphen, 1. S. 178. 163. 151.

endlich vielen, in den Schnittpunkten eines rechteckigen Gitters angeordneten Wirbelfäden nicht auf einen dieser Wirbel. Das folgt einerseits aus Symmetriegründen, andererseits auch aus der Beziehung

$$\lim_{(z-r_\nu)=0} \frac{d}{dz}\left[\lg\sigma(z-r_\nu) - \lg(z-r_\nu)\right] = 0.$$

Man kann also zur Berechnung der Bewegung der Wirbelfäden A_ν genau so verfahren, wie oben (vgl. S. 177). Definiert man W_2 in der folgenden Weise:

$$(37)\quad \begin{cases} W_2 = -\dfrac{1}{2\pi}\sum_{\nu,\mu} J_\nu J_\mu \lg S_{\nu\mu}, & \left.\begin{matrix}\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} 1, 2 \ldots 4n \\ S_{\nu\mu} = \sigma(a_\nu - a_\mu)\,\sigma(b_\nu - b_\mu)\sqrt{\wp(a_\nu - a_\mu) + \bar{\wp}(b_\nu - b_\mu)}, \end{cases}$$

so lauten die Bewegungsgleichungen

$$(38)\quad \begin{cases} J_\nu \dfrac{da_\nu}{dt} = \dfrac{\partial W_2}{\partial b_\nu}, \\ J_\nu \dfrac{db_\nu}{dt} = -\dfrac{\partial W_2}{\partial a_\nu}. \end{cases} \qquad \nu = 1, 2 \ldots 4n$$

Die Summation in (37) ist über alle Paare zu erstrecken, die sich aus den $4n$ Wirbeln der Systeme S, S', S'', S''' bilden lassen, und die a_ν, b_ν für $\nu > n$ sind wieder als unabhängige Variable zu behandeln.

Aus (37) lassen sich genau wie oben die Relationen

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_2}{\partial a_\nu} = -\dfrac{\partial W_2}{\partial a_{n+\nu}} = \dfrac{\partial W_2}{\partial a_{2n+\nu}} = -\dfrac{\partial W_2}{\partial a_{3n+\nu}}, \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial b_\nu} = \dfrac{\partial W_2}{\partial b_{n+\nu}} = -\dfrac{\partial W_2}{\partial b_{2n+\nu}} = -\dfrac{\partial W_2}{\partial b_{3n+\nu}} \end{cases}$$

herleiten, aus denen mit Hilfe der Bewegungsgleichungen gefolgert werden kann:

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{da_\nu}{dt} = -\dfrac{da_{n+\nu}}{dt} = \dfrac{da_{2n+\nu}}{dt} = -\dfrac{da_{3n+\nu}}{dt}, \\ \dfrac{db_\nu}{dt} = \dfrac{db_{n+\nu}}{dt} = -\dfrac{db_{2n+\nu}}{dt} = -\dfrac{db_{3n+\nu}}{dt}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besagen integriert, daß die Beziehungen (31) bei der Bewegung der Wirbelfäden erhalten bleiben, und daß demnach das Potential (32) den Strömungsvorgang als Funktion der Zeit richtig darstellt, wenn die a_ν, b_ν gemäß (38) berechnet werden.

Schwerpunkts- und Flächensatz gelten jetzt beide nicht mehr für das System S alleine betrachtet, und außer den Integralen von (40) bleibt jetzt nur noch das Integral

$$W_2 = \text{const} \tag{41}$$

bestehen.

Als Beispiel betrachten wir nur den einfachsten Fall, daß sich das System S auf einen Wirbelfaden von der Stärke J mit den Koordinaten a, b reduziert. Für diesen Fall sind Strömungsvorgang und Bewegungsgleichung schon von Greenhill[1]) angegeben worden, wenn auch in einer Form, die von der hier gegebenen abweicht. Aus den allgemeinen Gleichungen, die sich jetzt auf Summen mit vier Gliedern reduzieren [bez. bei (37) auf sechs Glieder], ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{J}{4\pi}\,\frac{\overline{\wp}'(2b)}{\wp(2a)+\overline{\wp}(2b)}, \\ \frac{db}{dt} &= \frac{J}{4\pi}\,\frac{\wp'(2a)}{\wp(2a)+\overline{\wp}(2b)}. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen mit $\wp'(2a)$, die zweite mit $\overline{\wp}'(2b)$ und addiert, so gewinnt man ein erstes Integral:

$$\wp(2a) + \overline{\wp}(2b) = \text{const}. \tag{43}$$

Vermöge der bekannten Beziehung zwischen $\wp(z)$ und $\wp'(z)$ kann man mit Hilfe von (43) das System (42) auf Quadraturen zurückführen; wir wollen uns aber damit begnügen, einen Grenzfall zu behandeln. Für $2a = d/2$ und $2b = d'/2$, d. h., wenn der Wirbel sich in der Mitte des prismatischen Raums befindet, ergibt sich $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$, der Wirbel ruht also dann. Wir wollen den Sonderfall betrachten, daß

$$\begin{aligned} 2a &= d/2 + \varepsilon, \\ 2b &= d'/2 + \varepsilon' \end{aligned}$$

gesetzt werden kann, wo ε und ε' kleine Größen (gegen d und d') sind. Unter dieser Annahme wird bis auf Glieder zweiter Ordnung

---

1) A. G. Greenhill, Quart. Journ. Math. 15. S. 10. 1887.

$$\wp(2a) + \overline{\wp}(2b) = e_1 - e_3,$$

und aus (42) wird

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{J}{\pi}(e_2 - e_3)\varepsilon',$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{J}{\pi}(e_1 - e_3)\varepsilon.$$

Das vollständige Integral lautet

$$\varepsilon = A\cos(\lambda t + \gamma),$$
$$\varepsilon' = B\sin(\lambda t + \gamma),$$

mit den Werten

$$\lambda = \frac{J}{\pi}\sqrt{(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)},$$

$$A/B = \sqrt{\frac{e_3 - e_3}{e_1 - e_2}}.$$

Der Wirbelfaden beschreibt also eine Ellipse, deren Achsenverhältnis von den Dimensionen des prismatischen Raumes abhängt [denn es ist ja $e_1 = \wp(\omega)$; $e_2 = \wp(\omega + \omega')$; $e_3 = \wp(\omega')$].

Wir wenden uns nun wieder der Betrachtung eines allgemeinen Falles zu, der in gewissem Sinne als Verallgemeinerung des zuerst behandelten Problems aufgefaßt werden kann. Spiegelt man nämlich das auf Seite 183 gekennzeichnete System S nur an der Ebene $x = d/2$ und erstreckt dementsprechend die Summe in (32) nur über die ersten $2n$ Summanden, so sind auch die Grenzbedingungen nur an den Ebenen $x = 0$ und $x = d/2$ erfüllt, und man gelangt zu einer Strömung zwischen parallelen Wänden, bei der sich das Strömungsbild jeweils im Abstande d' wiederholt. In diesem Falle muß aber noch eine Änderung an den Formeln angebracht werden. Es wurde schon auf Seite 176 darauf hingewiesen, daß durch die Grenzbedingungen für zwei parallele Wände die Lösung noch nicht eindeutig bestimmt ist, sondern daß noch eine Bedingung für das Verhalten im Unendlichen hinzutreten muß. Fordert man statt dessen hier, daß die Strömung sich in dem betrachteten Raum rein periodisch wiederholen soll, so werden dadurch einfach periodische Zusatzglieder im komplexen Potential ausgeschlossen. Dieses ist aber dadurch erst bis auf ein lineares Zusatzglied bestimmt; denn offenbar kann man stets eine beliebige konstante Geschwindigkeit in Richtung der

y-Achse hinzufügen, ohne die Grenzbedingungen zu verletzen oder die Periodizität zu stören. Um nun auch noch dieses lineare Zusatzglied festzulegen, fordern wir, daß sich für $y = \infty$ die Geschwindigkeit 0 ergibt, wenn man den Abstand d' (d. h. die imaginäre Periode) unendlich groß werden läßt.

Diesen Bedingungen kann man nicht genügen, wenn man von (4) als partikulärem Potential ausgeht, sondern man muß statt dessen die Funktion

$$\chi(z) = e\left(\lg\sigma(z-r) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r)^2\right) \tag{44}$$

zugrunde legen, wobei wie üblich $\eta = \zeta(\omega)$ gesetzt ist. Mathematisch bedeutet das, von einem unwesentlichen Faktor abgesehen, den Ersatz der Weierstrassschen Funktion $\sigma(z)$ durch die Jacobi-Hermitesche Funktion $H(z)$, welche dieselben Nullstellen besitzt wie $\sigma(z)$, aber eine Periode (4ω) hat.

Nun unterscheidet sich (44) durch ein quadratisches Glied von (4), und das widerspricht scheinbar dem oben Gesagten. Es ist aber zu berücksichtigen, daß weder (4) noch (44) zu Strömungen führen, die den Bedingungen des Problems genügen, sondern erst die nach dem Spiegelungsprinzip gebildeten Differenzen

$$c\left(\lg\sigma(z-r_\nu) - \lg\sigma(z-r_{n+\nu})\right),$$

beziehungsweise

$$c\left[\left(\lg\sigma(z-r_\nu) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r_\nu)^2\right) - \left(\lg\sigma(z-r_{n+\nu}) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r_{n+\nu})^2\right)\right],$$

und diese zwei Ausdrücke unterscheiden sich nur um ein lineares Glied.

Bilden wir nun unter den Festsetzungen (5) das Potential

$$\chi_3 = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^{2n} J_\nu\left[\lg\sigma(z-r_\nu) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r_\nu)^2\right], \tag{45}$$

so genügt es allen oben aufgestellten Bedingungen. Die Strömungsgeschwindigkeiten berechnen sich nämlich aus

$$\frac{d\chi_3}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^{2n} J_\nu\left[\zeta(z-r_\nu) - \frac{\eta}{\omega}(z-r_\nu)\right] \tag{46}$$

in genau derselben Weise, wie (34) aus (33), nur daß noch

lineare Zusatzglieder auftreten, und man überzeugt sich leicht, daß die Grenzbedingungen

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = d/2$$

erfüllt sind. Ferner ist (46) doppeltperiodisch (wegen $J_{n+\nu} = -J_\nu$), und für $d' = \frac{2\omega'}{i} = \infty$ wird (46) identisch mit (7), so daß auch der zuletzt ausgesprochenen Forderung auf S. 188 genügt ist.

Die Bewegung der Wirbelfäden berechnet sich aus

$$(47) \quad \left\{ W_3 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu,\mu} J_\nu J_\mu \left[\lg S_{\nu\mu} - \frac{\eta}{2\omega}\left((a_\nu - a_\mu)^2 - (b_\nu - b_\mu)^2\right)\right], \right.$$
$$\left. \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} 1, 2 \ldots 2n$$

wo $S_{\nu\mu}$ die gleiche Bedeutung hat, wie in (37), und die Summation über alle Paare von S und S' zu erstrecken ist; auch die Bemerkung nach den Formeln (13) ist wieder zu beachten. Die Bewegungsgleichungen werden übereinstimmend mit (13), wenn man darin W_1 durch W_3 ersetzt.

Als erstes Beispiel betrachten wir den einfachen Fall, daß S nur aus einem Wirbel besteht, und setzen demgemäß

$$J_1 = J; \quad J_2 = -J; \quad a_1 = a; \quad a_2 = d - a; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad 0 < a < d/2.$$

Aus den Bewegungsgleichungen findet man

$$(48) \qquad \frac{da}{dt} = 0; \qquad \frac{db}{dt} = -\frac{J}{2\pi}\left[\zeta(2a) - \frac{\eta}{\omega} 2a\right].$$

Die Strömung wird in diesem Falle aus einer unbegrenzten Reihe von gleichen Wirbeln gebildet, die sich im Abstande d' voneinander zwischen zwei ebenen Wänden durchbewegen. Für $a = d/4 = \omega/2$ wird $\frac{db}{dt} = 0$, und das System steht also dann fest. Läßt man d' unendlich werden, so gelangt man zu dem ersten Beispiel auf S. 180 zurück, und (48) geht in (27) über.

Denkt man sich die Wand bei $x = d/2$ beseitigt und durch eine andere Wand bei $x = d$ ersetzt, so wird aus der einfachen Wirbelreihe eine Doppelreihe, bei der die Wirbel der einen Reihe entgegengesetzten Rotationssinn haben, wie die der anderen. Läßt man nun hier die reelle Periode $d = 2\omega$ unendlich werden, so ergibt sich aus (48)

$$\frac{db}{dt} = -\frac{J}{2d'} \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{d} 2a,$$

und man erhält den ersten der beiden von v. Kármán untersuchten Fälle, der allerdings unstabil ist.

Als zweites Beispiel lassen wir S aus zwei gleichen, entgegengesetzt rotierenden Wirbelfäden bestehen, in einer Anordnung, die aus Fig. 3 hervorgeht. Wir setzen

$$\begin{array}{lll} J_1 = J; & a_1 = a; & b_1 = 0 \\ J_2 = -J; & a_2 = d/2 - a; & b_2 = d'/2 \\ J_3 = -J; & a_3 = d - a; & b_3 = 0 \\ J_4 = J; & a_4 = d/2 + a; & b_4 = d'/2. \end{array} \qquad 0 < a < d/4.$$

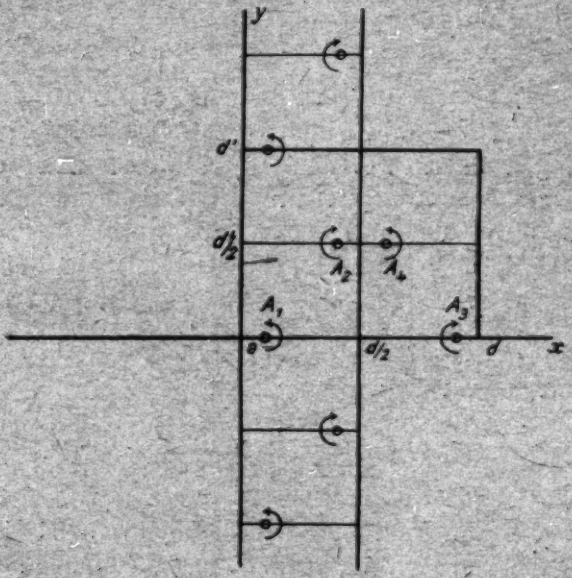


Fig. 3.

Die allgemeinen Formeln liefern dann nach einiger Umrechnung

$$(49) \quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = 0, \\ \dfrac{db}{dt} = \dfrac{J}{2\pi}\left[2\zeta(2\delta) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta) - e_2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta) - e_1} - \dfrac{\eta}{\omega} 4\delta\right], \end{cases}$$

wobei

$$d/4 - a = \delta$$

gesetzt ist. Läßt man nun hier die reelle Periode d unendlich werden, jedoch so, daß δ endlich bleibt, so gelangt man

zu dem zweiten v. Kármánschen Fall, der für ein bestimmtes Verhältnis von δ zu d' eine stabile Strömung darstellt. In dem angegebenen Grenzfall wird aus (49)

$$\frac{db}{dt} = \frac{J}{2d'} \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{d} 2\delta\right), \tag{49'}$$

in Übereinstimmung mit dem v. Kármánschen Resultat.

Die beiden zuletzt gegebenen Beispiele, wie überhaupt die durch (45) dargestellten Strömungen sind interessant als Fälle von nichtlaminarer, fortschreitender Wirbelströmung zwischen ebenen Wänden. Möglicherweise kann man aus den hier gegebenen Entwicklungen einen Ansatz für den Widerstand gewinnen, den eine Flüssigkeit bei nichtlaminarer Strömung zwischen zwei Wänden erfährt. Dafür muß aber zunächst die Stabilität der Gebilde untersucht werden.

2. Quellenströmung.

Multipliziert man das komplexe Potential einer zweidimensionalen Wirbelströmung mit der imaginären Einheit i, so vertauschen Geschwindigkeitspotential φ und Stromfunktion ψ ihre Rolle, und aus jedem Wirbelfaden A_ν von der Stärke J_ν wird eine Quellinie von der Ergiebigkeit J_ν. Dabei werden aus den Grenzflächen Äquipotentialflächen; die Potentiale (6), (32) und (45) stellen also nach der Multiplikation mit i Lösungen der entsprechenden elektrostatischen Probleme dar. Will man dagegen zu Quellenströmungen gelangen, bei denen wie bisher die Grenze eine Strömungsfläche ist, so muß man bei der Spiegelung so verfahren, daß das Bild einer Quelle gleiche Ergiebigkeit hat, wie diese. Hier tritt dann die neue Bedingung hinzu, daß die Gesamtergiebigkeit des betrachteten Systems 0 sein muß, wenn die Strömung bei geschlossener Begrenzung überhaupt möglich sein, und bei nicht geschlossener Begrenzung sich nicht ins Unendliche erstrecken soll.

Wir betrachten also jetzt ein System S, das aus k Quellinien (bez. Senken) $B_\varkappa$ von der Ergiebigkeit $M_\varkappa$ besteht ($\varkappa = 1, 2, \ldots k$) mit der einschränkenden Bedingung

$$\sum_1^k{}_\varkappa M_\varkappa = 0. \tag{50}$$

Das Strömungsfeld sei durch die Ebenen $x = 0$ und $x = d/2$ begrenzt, und die Quellen mögen sich unbeweglich an den Stellen

$$\varrho_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, 2 \ldots k$$

befinden.

Nehmen wir nun das gespiegelte System S' hinzu durch die Festsetzungen

$$M_{k+\varkappa} = M_\varkappa; \qquad \alpha_{k+\varkappa} = d - \alpha_\varkappa; \qquad \beta_{k+\varkappa} = \beta_\varkappa, \tag{51}$$

so löst das Potential

$$\chi'_1 = \varphi'_1 + i\psi'_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{2k} M_\varkappa \lg \sin\frac{\pi}{d}(z - \varrho_\varkappa) \tag{52}$$

die Bedingungen der Aufgabe. Denn es hat die vorgeschriebenen Quellen, und aus

$$\frac{d\chi'_1}{dz} = u - iv = \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa \operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(z - \varrho_\varkappa) \tag{53}$$

ergeben sich für die Strömungsgeschwindigkeiten die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa \frac{\sin\frac{2\pi}{d}(x - \alpha_\varkappa)}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{d}(y - \beta_\varkappa) - \cos\frac{2\pi}{d}(x - \alpha_\varkappa)}, \\ v &= \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa \frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi}{d}(y - \beta_\varkappa)}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{d}(y - \beta_\varkappa) - \cos\frac{2\pi}{d}(x - \alpha_\varkappa)}, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

aus denen sich für $x = 0$ und $x = d/2$ die Grenzbedingung $u = 0$ als erfüllt ergibt. Außerdem ist für $y = \infty$

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa = 0.$$

Geschwindigkeitspotential φ' und Stromfunktion ψ' findet man aus (52) analog wie oben (S. 176):

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'_1 &= \frac{1}{2\pi}\sum_1^{2k} M_\varkappa \lg s'_\varkappa, \\ \psi'_1 &= \frac{1}{2\pi}\sum_1^{2k} M_\varkappa \tau'_\varkappa, \end{aligned}\right. \tag{55}$$

mit der Bedeutung

$$(56)\quad \begin{cases} s'_\varkappa = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(x-\alpha_\varkappa) + \operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{d}(y-\beta_\varkappa)}, \\ \operatorname{tg}\tau'_\varkappa = \dfrac{\operatorname{Tg}\frac{\pi}{d}(y-\beta_\varkappa)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{d}(x-\alpha_\varkappa)}. \end{cases}$$

Gehen wir nun zu dem Fall des prismatischen Raumes über, wie er auf S. 182 charakterisiert ist, so muß man zu dem System S drei weitere gespiegelte Systeme S', S'' und S''' hinzunehmen. Wir treffen also folgende Festsetzungen (vgl. Fig. 2):

$$(57)\quad \begin{cases} \text{für } S': & M_{k+\varkappa} = M_\varkappa; & \alpha_{k+\varkappa} = d-\alpha_\varkappa; & \beta_{k+\varkappa} = \beta_\varkappa; \\ \text{für } S'': & M_{2k+\varkappa} = M_\varkappa; & \alpha_{2k+\varkappa} = \alpha_\varkappa; & \beta_{2k+\varkappa} = d'-\beta_\varkappa; \\ \text{für } S''': & M_{3k+\varkappa} = M_\varkappa; & \alpha_{3k+\varkappa} = d-\alpha_\varkappa; & \beta_{3k+\varkappa} = d'-\beta_\varkappa; \end{cases}$$

und bilden das Potential

$$(58)\qquad \chi'_2 = \varphi'_2 + i\psi'_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa \lg\sigma(z-\varrho_\varkappa).$$

Unter der Voraussetzung (50) löst dieses Potential die Aufgabe. Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion sind in diesem Falle

$$(59)\quad \begin{cases} \varphi'_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa \lg\sigma(x-\alpha_\varkappa)\,\bar{\sigma}(y-\beta_\varkappa)\sqrt{\wp(x-\alpha_\varkappa)+\bar{\wp}} - \\ \psi'_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa\left[2\pi + \tfrac{1}{2}\Phi(x-\alpha_\varkappa, y-\beta_\varkappa)\right], \end{cases}$$

und aus dem Differentialquotienten von χ'_2

$$(60)\qquad \frac{d\chi'_2}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa \zeta(z-\varrho_\varkappa),$$

findet man für die Geschwindigkeiten

$$(61)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa\left[\zeta(x-\alpha_\varkappa) + \frac{1}{2}\dfrac{\wp'(x-\alpha_\varkappa)}{\wp(x-\alpha_\varkappa)+\bar{\wp}(y-\beta_\varkappa)}\right], \\ v = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa\left[\bar{\zeta}(y-\beta_\varkappa) + \frac{1}{2}\dfrac{\bar{\wp}'(y-\beta_\varkappa)}{\wp(x-\alpha_\varkappa)+\bar{\wp}(y-\beta_\varkappa)}\right]. \end{cases}$$

Beschränkt man sich auf den Fall einer Quelle und einer gleich starken Senke, d. h., setzt man in den Formeln (57) bis,

(61) $k = 2$, so lösen diese Gleichungen das Problem der Elektrizitätsleitung in einer rechteckigen Platte mit beliebig gestellten Elektroden.

Aus der Superposition von (6) mit (52), oder von (32) mit (58) erhält man die allgemeinste zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen Platten, bez. in einem rechteckigprismatischen Raum, soweit dieselbe von isolierten Wirbelfäden und Quellinien herrührt. Dabei ist natürlich noch zu berücksichtigen, daß — bei festgehaltenen Quellen — die Wirbel sich nicht nur unter ihrem gegenseitigen Einfluß, sondern auch durch die Wirkung der Quellen bewegen. Dieser Wirkung ist leicht mit Hilfe der Funktionen (55) bez. (59) Rechnung zu tragen, so daß von einer Aufstellung der Gleichungen abgesehen werden kann. Auch der Übergang zu kontinuierlich ausgedehnten Wirbel- und Quellgebieten begegnet keiner prinzipiellen Schwierigkeit.

Leipzig, im August 1919.

(Eingegangen 14. August 1919.)

5. *Versuch einer einheitlichen Erklärung der Erscheinungen der atmosphärischen Polarisation;* von *Marie Anna Schirmann.*

§ 1. Einleitung.

Die Probleme der normalen atmosphärischen Polarisation gehören in jenes Gebiet der meteorologisch-optischen Phänomene, in welchem die Atmosphäre die Rolle eines trüben Mediums spielt, in der als der Trägerin kleiner, bereits mit der Lichtwellenlänge vergleichbarer und noch kleinerer Teilchen die einfallenden Wellen an den Störungszentren gebeugt und somit die primäre Strahlung zum Teil diffus zerstreut wird.

Da man nach dem heutigen Stande der Kosmophysik noch immer nicht mit Sicherheit weiß, welcher Art die trübenden Partikel in der Atmosphäre sind und welches das für die Größe der Teilchen geltende Verteilungsgesetz ist, so haftet den Theorien zur Erklärung dieser optischen Erscheinungen noch immer eine gewisse Unsicherheit und Uneinheitlichkeit an.

Dies hat auch nicht zum geringsten Teil darin seinen Grund, daß man Theorie, Beobachtung und Experiment vor allem der Extinktion und Absorption des direkten Lichtes einerseits, der Intensität und Farbe des diffusen Lichtes andererseits zuwandte, während man die zweifellos *empfindlichste* Erscheinung der *Polarisation* bis nun nicht kritisch untersuchte.

Im Folgenden soll nun versucht werden, auf Grund der Ergebnisse meiner Arbeit über „*Polarisiertes Licht am Einzelteilchen*“[1]) bloß für Fremdkörperpartikel in der Atmosphäre aus deren Größe und optischem Verhalten unter Ausschaltung jeglicher Sekundärdiffusion des Lichtes die Gesamtheit der Phänomene der atmosphärischen Polarisation in qualitativer Hinsicht einheitlich zu erklären.

1) M. A. Schirmann, Ann. d. Phys. 59. S. 493. 1919.

Die Frage, inwieweit die Gase durch atomistische Natur, spontan eintretende Dichteschwankungen infolge der Molekularbewegung und Richtungsschwankungen[1]) infolge der Anisotropie gewisser Molekeln als Trübungen im „Äther" einen Anteil an den *einfachsten* dieser Erscheinungen haben, ist für die gestellte Aufgabe nicht entscheidend, da eine quantitative Lösung der optisch-atmosphärischen Probleme wegen der Kompliziertheit der Konsistenz der Atmosphäre ohnedies kaum möglich sein wird.

§ 2. Die Polarisation des diffusen Lichtes in trüben Medien und in der Atmosphäre.

Die erste Stütze für die Berechtigung der Annahme, daß die Atmosphäre ein natürliches trübes Medium wäre, war die rohe Übereinstimmung der Farben- und Polarisationserscheinungen in dieser mit denen in künstlichen trüben Medien.

Wäre die damals noch sehr unvollkommene Theorie der Optik der Atmosphäre als trübes Medium bei Deutung der komplizierten Polarisationsverhältnisse nicht von größerem Einfluß gewesen als das Experiment, so hätte man bei jenen Versuchen auch Analoga zu den differenzierteren Polarisationseffekten gefunden und wäre natürlicherweise auf die in vorliegender Studie versuchte einheitliche Erklärungsweise durch eine in Hinsicht auf Größe und optische Konstanten der Partikel allgemeine elektromagnetische Beugungstheorie gekommen. Diese in der meteorologischen Optik vielfach als optische Anomalien gedeutete differenziertere Polarisationserscheinungen sind: Die partielle Polarisation im Maximum der Polarisation, die spektrale Polarisation, die negative Polarisation und die durch den stetigen Übergang von positiver zu negativer Polarisation bedingten sogenannten neutralen Punkte mit natürlichem Licht.

Ich habe nun in einem diesbezüglichen Artikel in der Meteorologischen Zeitschrift[2]) auf die Existenz analoger Erscheinungen bei Experimenten mit verschiedenen Suspensionen in Gasen und Flüssigkeiten ausführlich hingewiesen. Diese schon durch die Verschiedenheit der Partikel unter-

1) M. Born, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. **19.** S. 243. 1917; **20.** S. 16. 1918.

2) M. A. Schirmann, Met. Zeitschr. wird demnächst erscheinen.

einander nicht mehr ganz berechtigte Parallele reicht jedoch streng genommen nur so weit, als die Atmosphäre durch die in ihr suspendierten Nebeltröpfchen, Staubteilchen, ferner gasförmigen und flüssigen, durch ultraviolettes Licht erzeugten Kondensationskerne luftfremder hygroskopischer Substanzen[1]) charakteristisch ist.

Eine gewisse Korrektur dazu bringt die Berücksichtigung der Gestalt der Atmosphäre, der Partikel in ihr und des Beobachtungsstandpunktes auf dem ringsum von der Atmosphäre umschlossenen Erdkörpers.

Nicht uninteressant ist eine diesen letzten Punkt betreffende Erscheinung: Neben den außerordentlichen neutralen Punkten (wahrscheinlich Superpositionspunkten zufällig gleicher positiver und negativer Polarisationsgrößen an derselben Stelle, da ihr Zustandekommen an einen außerordentlichen Zustand der Atmosphäre geknüpft ist) existieren oberhalb der Sonne und ihres Gegenpunktes der Babinetsche und der Aragosche Punkt, unterhalb der Sonne der Brewstersche Punkt. Wegen der Symmetrie der Beleuchtung ober- und unterhalb der Sonne müßte auch ein dem Aragoschen Punkt entsprechender neutraler Punkt unterhalb des Gegenpunktes der Sonne existieren. Bei den Meteorologen herrscht die Ansicht, daß dieser Punkt — aus der Sekundärdiffusion gedeutet — bloß wegen der Lichtschwäche nicht zur Beobachtung kommt, da hierzu die Sonne ziemlich tief unter dem Horizont stehen müßte. Diese Deutung ist unwahrscheinlich, da sie auf der im gegebenen Fall unendlich verdünnter Suspensionen (in der Atmosphäre) kaum möglichen Sekundärdiffusion (d. i. Zerstreuung des bereits einmal zerstreuten Lichtes an den Partikeln) beruht, und wird durch die Tatsache überflüssig, daß die anvisierte Stelle nicht primär diffus zerstreut, weil sie durch das Hindernis der Erde kein direktes Licht erhält. Auf das Kriterium für das Auftreten sekundärer Diffusion wird noch im folgenden Paragraph hingewiesen werden.

§ 3. Folgerungen aus der Theorie.

Die Rayleighsche Theorie, die ursprünglich für trübende Fremdkörperpartikel gedacht war, gibt in ihrer ersten Fassung

1) A. Wigand, Met. Zeitschr. **30**. S. 10. 1913; W. Bieber, Met. Zeitschr. **31**. S. 358. 1914.

für Partikel, die unendlich klein gegen die Lichtwellenlänge sind und deren Dielektrizitätskonstante ε sich von 1 nur um eine differentiale Größe unterscheidet, bloß die durch die bekannte Gleichung

$$P(\gamma) = \frac{\sin^2\gamma}{1 + \cos^2\gamma}$$

(Polarisationsgröße als Funktion des Winkels gegen die Einfallsstrahlen) schematisierten einfachsten Polarisationsverhältnisse. Über partielle Polarisation im Maximum, über spektrale Polarisation und über das stetige Übergehen von positiver in negative Polarisation wird nichts ausgesagt.

Die Erweiterung der ursprünglichen Theorie Rayleighs für größere Kügelchen von der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon > 1$ läßt schon folgende Schlüsse zu: 1. Daß weißes einfallendes Licht in keiner Richtung vollständig polarisiert wird, da die totalpolarisierten Strahlen für die verschiedenen Farben nebeneinander liegen und sich den partiell polarisierten anderer Farben superponieren. 2. Daß monochromatisches einfallendes Licht bei verschiedenen großen Partikeln auch in keiner Richtung vollständig polarisiert wird, da eine bestimmte Wellenlänge relativ zur Teilchengröße kleiner oder größer ist, je nachdem die Teilchen größer oder kleiner sind. Daraus folgt eine Aussage über spektrale Polarisation und daraus wieder eine über partielle Polarisation im Maximum; jedoch nur bei weißem einfallendem Licht bei gleich großen und um so eher bei ungleich großen Partikeln und bei monochromatischem Licht bei verschieden großen Partikeln. Die Erklärung negativer Polarisation und neutraler Punkte ist die Rayleighsche Theorie schuldig geblieben.

Soret und später Hurion bauen dann auf Grund der Annahme einer zusätzlichen sekundären Diffusion unter gewisser Berücksichtigung der Gestalt der Atmosphäre und der Partikelverteilung in ihr die Rayleighsche Theorie weiter aus, so daß sie die partielle Polarisation im Maximum, die negative Polarisation und die neutralen Punkte und schließlich unter Berücksichtigung spektraler Extinktion für die Sekundärdiffusion[1]) die spektrale Polarisation zwischen Sonne

1) H. Dember u. M. Uibe, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 149. 1917.

bzw. antisolaren Punkt und den neutralen Spektralbändern erklären könnte. Diese Erklärungsweise ist aber einseitig, da sie bloß aus atmosphärischen Eigenheiten die Erscheinungen der negativen Polarisation und der neutralen Punkte erklärt, während diese Phänomene schon bei Versuchen mit künstlichen trüben Medien auftreten; sie ist unnatürlich, da beträchtliche sekundäre Diffusion zugrunde gelegt ist, die aber nur dort in Erscheinung tritt, wo die Partikeln sehr eng beisammen liegen, wie eine Berechnung von Maxwell-Garnett[1]) auf Grund der Theorie von L. Lorenz[2]) für sehr kleine Partikel erweist; schließlich ist sie unvollständig, da die Erklärungsweise für die spektrale Polarisation für kleine Teilchen — eine Erscheinung, die tatsächlich im ganzen Gebiet zwischen Sonne und Gegenpunkt der Sonne vorhanden ist — sich nur auf die kleinen Gebiete von 0° bzw. 180° zur Einfallsstrahlenrichtung bis zum neutralen Streifen bei Sonne und Gegensonne beschränkt.

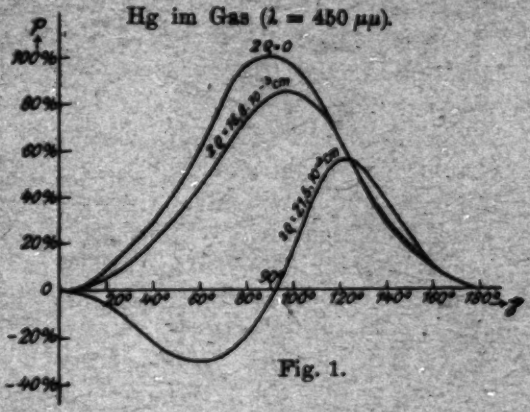


Fig. 1.

Da sich doch die Existenz größerer, stets in der Atmosphäre vorhandener Partikel[3]) und der ihnen eigentümlichen optischen Konstanten — wenn auch über die Art der Teilchen zurzeit noch nichts sicheres feststeht — bei allen optischen Phänomenen der Atmosphäre als trübes Medium nicht nur quantitativ, sondern ganz besonders *qualitativ* von Einfluß zeigen muß, so liegt es doch nahe, diese natürlichen Voraussetzungen auch für die *differenzierteren* Polarisationsphänomene verantwortlich zu machen; und zwar um so eher, als diese eine verläßliche experimentelle Stütze haben, während die

1) J. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. **203.** S. 385. 1904; **205.** S. 237. 1906.
2) L. Lorenz, Wied. Ann. **11.** S. 70. 1880.
3) H. Schmidt, Met. Zeitschr. **35.** S. 105. 1918.

sekundäre Diffusion bei den in der Atmosphäre gegebenen Verhältnissen noch einer sicheren Grundlage entbehrt.

In meiner bereits einmal zitierten Arbeit habe ich nun durch eingehendes theoretisches Studium der Polarisation am *Einzelteilchen* für einige absorbierende und dielektrische Medien nicht nur die in diesen beiden Fällen bezüglich der Richtung verschiedene Abhängigkeit der Polarisationsgröße vom Partikelradius bei monochromatischem Licht (Fig. 1 und 2) nachgewiesen, sondern auch die in den genannten Fällen bezüglich der Richtung verschiedene spektrale Polarisation[1]) für Partikel bestimmten Materials und bestimmter Größe.

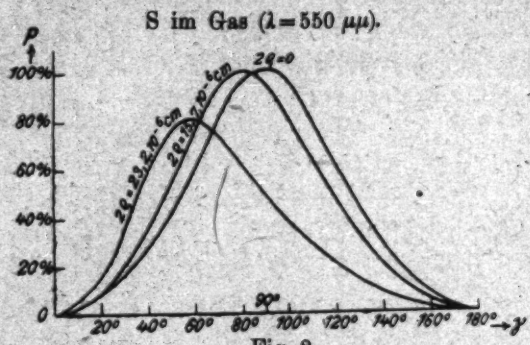


Fig. 2.

Ferner ergeben die Untersuchungen stets partielle Polarisation im Maximum, dann unter gewissen Voraussetzungen negative Polarisation und einen oder zwei neutrale Punkte.

§ 4. Zusammenfassung.

Auf Grund der eben angeführten theoretischen Resultate läßt sich behaupten: Die elektromagnetische Beugungstheorie ist imstande, die Gesamtheit der Probleme der atmosphärischen Polarisation aus der Größe und dem optischen Verhalten der trübenden Partikelchen der Atmosphäre *einheitlich* zu erklären.

Eine qualitative Lösung aller Probleme der meteorologischen Optik, bei denen die Atmosphäre die Rolle eines trüben Mediums spielt, wäre nur dann möglich, wenn das Problem der Diffusion und Absorption für die speziellen Arten der Partikel in der Atmosphäre (Wassertröpfchen, Staubpartikel usw.) numerisch durchgerechnet würde.

Wien, I. phys. Institut d. Universität.

---

1) M. A. Schirmann, a. a. O., S. 17—19 u. 29, 30.

(Eingegangen 14. August 1919.)

6. *Läßt sich ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen nachweisen?*

von Karl Heil.

(Freiburger Dissertation.)

Einleitung.

Schon lange vermutete man, daß der bestimmten Regelmäßigkeit der Kristalle in der Gestalt auch eine solche in der Anordnung ihrer kleinsten Teile entspreche. Bravais stellte schon 1850 eine Theorie auf, nach der die Atome der Kristalle in Raumgittern angeordnet sind. Aber erst die Entdeckung der Röntgenstrahlen und der radioaktiven Strahlen machten eine Nachprüfung dieser Theorie möglich. Laue, Friedrich und Knipping gelang mit der bekannten Arbeit der Nachweis derartiger Raumgitter. Es folgten viele andere Arbeiten, die u. a. den Aufbau solcher Gitter für verschiedene Kristalle zeigten.[1 u. 2]) Hupka und Steinhaus[3]) und W. H. Bragg und W. L. Bragg[4]) erklärten die Resultate ihrer Untersuchungen aus der schichtenweise Anordnung der Moleküle.

Die regelmäßige Anordnung der Kristallmoleküle ist also nicht zu bestreiten. Die erwähnten Resultate wurden mit Hilfe der Röntgenstrahlen gewonnen.

Nun hat N. Bohr[5]) aus der Bremswirkung und der Streuung der Materie auf die korpuskularen α-Strahlen eine Abhängigkeit ihrer Reichweite und Richtung von den Schwingungen der Elektronen der durchsetzten Materie abgeleitet. Er kommt dabei zu der Auffassung, daß das Atom aus einem positiven

1) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 44. S. 257. 1914.
2) A. Johnson, Phys. Zeitschr. 15. S. 712. 1914.
3) E. Hupka u. W. Steinhaus, Verh. d. phys. Ges. 15. S. 712. 1914.
4) W. H. Bragg und W. L. Bragg, Proc. of the Roy. Soc. 88. S. 428. 1913.
5) N. Bohr, Phil. Mag. 25. S. 10. 1913.

Zentralkern besteht, der von Elektronen umgeben ist. Zu ähnlichen Resultaten waren auch E. Rutherford[1]) und andere gekommen.

Nun lag es nahe, zu untersuchen, ob nicht die in einem Kristall so regelmäßig angeordneten Atome, auf die den Kristall durchdringenden α-Strahlen je nach der Richtung, in der dies geschieht, einen wechselnden Einfluß ausüben. Man kann zwar bei korpuskularen Strahlen nicht die gleichen Erscheinungen erwarten, wie bei einer Wellenbewegung im Falle der Röntgenstrahlen, doch ließe sich einerseits vermuten, daß die in Kristallen in Vorzugsrichtungen schwingenden Elektronen auf das von dem α-Teilchen mitgeführte, elektrische Feld verschiedene Wirkung haben, je nach dem Winkel, unter dem dies an den Atomen vorbeigeht. Andererseits kann man an besondere Durchgangskanäle oder -Schichten denken, wie sie früher einmal von Stark[2]) zur Erklärung der Wirkung von Röntgenstrahlen angenommen worden waren.

Auf Veranlassung von Hrn. Prof. M. Reinganum unternahm ich es in den Jahren 1913 und 1914 im physikalischen Institut der Universität Freiburg i. Br., dahingehende Untersuchungen anzustellen, deren Ergebnisse ich in Nachstehendem wiedergebe.

Ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen kann sich äußern:

1. in der Reichweite,
2. in der Streuung.

Ich untersuchte zunächst den Einfluß auf die Reichweite.

1. Einfluß auf die Reichweite.

Der Einfluß auf die Reichweite wurde nach zwei Methoden untersucht, einer photographischen und einer elektrometrischen.

a) Photographische Methode.

Gehen von einem Punkte dicht über einer photographischen Platte α-Strahlen aus, so treffen sie die Platte innerhalb einer Kreisfläche, deren Durchmesser von dem Abstand des Präparates und von der Reichweite der α-Strahlen in Luft abhängig ist.

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 21. S. 669. 1911.
2) J. Stark, Phys. Zeitschr. 13. S. 973. 1913.

Befindet sich nun zwischen Präparat und Platte eine sehr dünne Kristallplatte, so wird der Fleck zunächst bedeutend kleiner, da die schräger einfallenden Strahlen infolge der Bremswirkung des Kristallplättchens nicht mehr durchdringen. Ist diese Bremswirkung in den einzelnen Richtungen verschieden, so ist es auch der entsprechende Einfallswinkel der äußersten noch durchdringenden Strahlen, d. h. es tritt eine Veränderung der Kreisfigur des Fleckes ein.

Unter Umständen könnte die Wirkung auch nur darin bestehen, daß das Aussehen der Bahnen der α-Teilchen auf der photographischen Platte an der Peripherie des Kreises in verschiedenen Richtungen verschieden ist. Es sei hier bemerkt, daß nach den Untersuchungen von Kinoshita[1]) die Schwärzung der Platte vom Anfang bis zum Ende der Bahn des α-Teilchens in der lichtempfindlichen Schicht konstant bleibt und dann plötzlich auf Null herabsinkt. Auch meine Aufnahmen bestätigen das. Es steht dies in bemerkenswertem Gegensatz zur Ionisation.

Zu allen Untersuchungen wurden die α-Strahlen des RaF (Polonium) verwendet. Um brauchbare Resultate zu erzielen, mußte die Strahlungsquelle möglichst punktförmig sein. Zu diesem Zweck wurde ein starkes Poloniumpräparat mit einer Nadelspitze berührt. Es wurden möglichst feine Nähnadeln benutzt. Die Spitze wurde unter dem Mikroskop geprüft und eventuell nachher von seitlich ansitzenden Körnchen befreit. Sie durfte nur vorne einen schwarzen Punkt haben. Um ein Abfallen des Körnchens zu verhindern, war die Nadelspitze vor dem Polonisieren mit einer Spur Zaponlack versehen worden.

Es ist leicht zu sehen, daß bei größerem Abstand der Nadelspitze von dem Kristallplättchen die Figur des Fleckes immer weniger von der Kreisform abweichen, der gesuchte Effekt sich immer weniger bemerkbar machen wird. Die Abweichung muß um so größer sein, je dichter sich die Nadelspitze über der Platte befindet. Dagegen hat die Entfernung des Kristallplättchens von der photographischen Platte keinen Einfluß darauf. Da aber die Reichweite der α-Strahlen durch den Durchgang durch den Kristall schon erheblich vermindert

1) S. Kinoshita, Proc. of the Roy. Soc. A 83. S. 432. 1910.

wird, empfahl es sich, das Kristallplättchen direkt auf die photographische Platte zu legen.

Gemäß den Ergebnissen von M. Reinganum[1]), sowie den sich anschließenden Untersuchungen von Michl[2]) und Fr. Mayer[3]) wurden photomechanische Platten (von R. Jahr in Dresden) verwandt. Für eine schleierfreie Entwicklung ergab Hydrochinonentwickler in der Verdünnung 1:5 die besten Resultate.

Untersucht wurden dünne Kristallplättchen aus hellem Glimmer (Muscovit), der in der üblichen Weise gespalten wurde, ferner aus Gips und Quarz, die von Fuess in Berlin-Steglitz in einer Dicke von nur 10 μ bezogen worden waren. Leider gelang es der Firma nicht, diesen äußerst dünnen Plättchen eine spiegelglatte Oberfläche zu geben, sondern sie hatten, besonders das Gipsplättchen, eine etwas gekräuselte Oberfläche, wie unter dem Mikroskop deutlich zu erkennen war. Dies beeinträchtigte naturgemäß die Sicherheit meiner Versuche, da gerade bei diesen Kristallen, wenn wenigstens die optische Analogie soweit Gültigkeit hat, ein größerer Effekt zu erwarten ist, als bei Glimmer, dessen in die Spaltfläche fallenden Achsen sich optisch sehr wenig voneinander unterscheiden.

Der Quarz war parallel zur optischen Achse geschliffen. Das Gipsplättchen war ein Spaltplättchen, also war seine Fläche parallel der Ebene zweier Elastizitätsachsen. Die Plättchen durften wegen ihrer starken Bremswirkung nicht dicker sein.

Zur Aufnahme wurde die Nadel mit dem stumpfen Ende in eine größere Korkscheibe gesteckt und mit ihrer Hilfe senkrecht auf die Kristallplatte gestellt. Um eine Beschädigung der zerbrechlichen Kristallplättchen zu verhüten, war die Nadel von einem weiteren Glasröhrchen umgeben, das etwas über die Spitze hinausragte und am anderen Ende fest mit der Nadel verkittet war. Die Kristallplatte lag ihrerseits auf der photographischen Platte.

Glimmer wurde in größeren Stückchen ohne weiteres aufgelegt, die Quarz- und Gipsplättchen waren über 4 mm große

1) M. Reinganum, Phys. Zeitschr. 12. S. 1076. 1911.

2) W. Michl, Wien. Ber. IIa. 121. S. 1431. 1912.

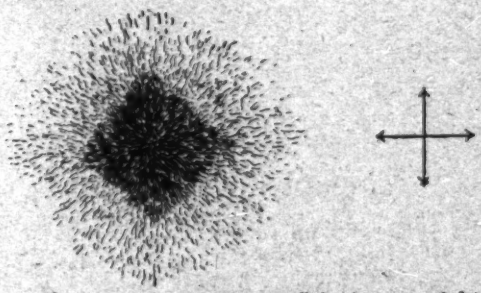
3) Fr. Mayer, Über die Zerstreuung der α-Strahlen. Freiburger Dissertation, s. auch Ann. d. Phys. 41. S. 931, 1913.

Öffnungen auf Glasplatten gekittet. Eine solche Größe der Plättchen genügte, da die Ausdehnung des Fleckes nur 1 bis 2 mm betrug. Die Apparatur wurde lichtdicht an einem erschütterungsfreiem Ort 5—14 Stunden stehen gelassen. Die Expositionszeiten waren durch die geringen Poloniummengen an der Nadelspitze bedingt.

Die Untersuchungen der Flecke wurden unter dem Mikroskop ausgeführt, meist mit direkter Beleuchtung, teilweise mit Dunkelfeldbeleuchtung.

Die Versuche mit Glimmerplättchen (Dicke unter 10 μ) ergaben keinen bemerkbaren Unterschied. Die Flecke sind symmetrisch und ihre Dichte nimmt gleichmäßig nach außen ab. Während der innerste, der Nadelspitze direkt gegenüberliegende Teil aus unregelmäßig und dicht gelegenen Punkten besteht, haben die mehr peripheren Teile strahlenförmiges Aussehen, entsprechend den radial verlaufenden Bahnen der α-Teilchen.

Die mit den Gips- und Quarzplättchen erhaltenen Flecken sind im allgemeinen kleiner, entsprechend der größeren Dicke der Plättchen. Sehr starke Abweichungen von der Kreisform sind jedenfalls nicht vorhanden.



Das Kreuz rechts bedeutet die Schwingungsrichtungen im Kristallplättchen.
Fig. 1.

Eine Aufnahme mit Gips, und zwar die am störungsfreisten entwickelte, weicht jedoch in ihrem inneren Teile deutlich von der Kreisform ab. Der innere Teil dieses Fleckes ist nämlich dichter und deutlich rautenförmig. Die Ecken der Raute weisen nach den Schwingungsrichtungen, so daß also die Reichweite in Richtung der beiden Achsen vergrößert erscheint. (Vgl. Fig. 1.)

Die rautenförmige Figur war größer, als daß sie durch Unregelmäßigkeiten der Nadelspitze verursacht sein konnte. Die Diagonalen sind 1,4 und 1,5, die Kanten 1,2 und 1,3 mm lang. Sie setzt sich jedoch nach außen in einen schwächeren Fleck fort, an dem man keine Abweichung von der Kreisform feststellen konnte.

Von Gips war dies die bestgelungene Aufnahme. Insofern möchte ich das Resultat als wahrscheinlich reell hinstellen. Eine Reihe von Aufnahmen mißlangen aus verschiedenen Gründen (Platte verschleiert, Bruch der sehr empfindlichen Kristallplättchen usw.).

Bei Quarz, mit dem allerdings keine sehr gute Aufnahme gelang, war nichts zu bemerken.

Abzählen der Zahl der Punktreihen an verschiedenen Stellen der Peripherie der Flecke und der Anzahl der Punkte in einer Reihe in einem bestimmten Abstand vom Mittelpunkt des Fleckes ergab keine Anhaltspunkte für besondere Bevorzugung bestimmter Richtungen, trotzdem bei diesen mühsamen Auswertungen der Platten sehr starke Vergrößerungen angewandt wurden.

b) Elektrometrische Methode.

Ich suchte ferner einen Einfluß der Orientierung von Kristallplatten auf die Reichweite durch eine elektrometrische Methode zu finden, entsprechend derjenigen, die sich früher zur Messung kleiner Reichweiteänderungen bewährt hatte.[1])

Die Vorversuche hierzu waren von den Herren J. Koenigsberger und M. Reinganum begonnen.

Da man nicht aus einem Kristall zwei sehr dünne Plättchen von verschiedener Orientierung, aber genügend genau gleicher Dicke schneiden kann, wurde folgendes Verfahren eingeschlagen.

Es wurde eine Kristallplatte parallel zur Ebene zweier Elastizitätsachsen verwandt, und diese in schräger Richtung von den α-Strahlen durchsetzt. Wird nun die Platte in ihrer eigenen Ebene gedreht, so ist klar, daß sich der Winkel, den die Strahlen mit den Elastizitätsachsen im Kristall bilden, verändern muß.

---

1) M. Reinganum, Veränderung der Reichweite von α-Strahlen durch elektrische Potentiale. Ann. d. Phys. 33, S. 134. 1910.

Die Bahn der α-Teilchen in der schräg durchsetzten Kristallplatte läßt sich nämlich geometrisch aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken, von denen die eine in die Normale der Platte fällt und gleich deren Dicke ist, während die andere in der Ebene der Platte liegt. Dreht man nun die Platte in ihrer eigenen Ebene, so ändern sich die Winkel, die die Elastizitätsachsen im Kristall mit dieser letzten Komponentenrichtung bilden. Einerseits muß es natürlich günstig sein, die Platte möglichst schräg gegen die Richtung der Strahlen zu stellen. Andererseits ist dem jedoch eine Grenze dadurch gesetzt, daß der Weg in der Platte kleiner als die Reichweite der α-Strahlen in dem betreffenden Material bleiben muß. Praktisch empfahl es sich, einen Winkel von 45° zwischen Plattennormale und Bahnrichtung der α-Teilchen nicht zu sehr zu überschreiten.

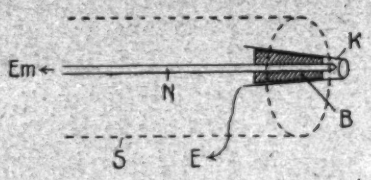
Die vorher erwähnte Methode, kleine Reichweitenänderungen zu messen, bestand darin, daß der an der Grenze der Reichweite im Gebiet des stärksten Abfalls der Ionisation erzeugte Ionisationstrom durch die zeitliche Entladung eines Elektrometers gemessen wurde, sodann nach Änderung der Reichweite (damals durch Anlegen elektrischer Potentiale an das Präparat) der Abstand des Präparates so geändert wurde, daß die Entladegeschwindigkeit wieder dieselbe wurde. Bei meinen jetzigen Untersuchungen wurden die Reichweiteänderungen, die durch Drehen der Platte entstanden, nicht durch Änderung des Präparatabstandes kompensiert, sondern ich beobachtete nur die Änderungen der Entladungsgeschwindigkeiten bei Drehung der Platte in ihrer Ebene.

Versuchsanordnung.

Das Elektrometer war das von Wulff angegebene. Die Entladezeiten zwischen bestimmten Teilstrichen wurden nur an einem der beiden Fäden abgelesen.

Die Ionisationskammer war in folgender Weise hergestellt. Durch einen etwas konischen Bernsteinpfropfen von einem mittleren Durchmesser von 4 mm und einer Länge von 15 mm war eine 12 cm lange und 2 mm dicke Stahlnadel so durchgesteckt, daß ihr eines Ende 4 mm über das spitzere Ende des Pfropfens herausragte. Das andere Ende war mit dem

Elektrometer verbunden. Die Nadel lag horizontal und war, soweit sie aus dem Elektrometer herausragte, statisch geschützt. Auf den Bernstein war ein kleiner Metallkonus aus Silberfolie übergestülpt, der um Bruchteile eines Millimeters über das etwas dünner gefeilte Ende der Nadel herausragte und dort einen freien Durchmesser von 1,8 mm hatte.



Em Elektrometer
N Stahlnadel
B Bernstein
K Ionisationskammer
E Erde
S Schutzhülle

Fig. 2.

Der äußere Metallkonus war geerdet, das Elektrometer samt der im Konus befindlichen Stahlnadel geladen. Die α-Strahlen traten parallel der Nadel in den kleinen Luftraum ein und riefen hier einen Ionisationsstrom hervor. Die α-Strahlenquelle war so weit entfernt, daß sich die Ionisationskammer ganz am Ende der Reichweite befand. Bei einem Teil der Versuche war die Ionisationskammer vorne noch durch eine sehr dünne, auf das Konusende geklebte Goldfolie verschlossen, doch erwies sich dieser Schutz als unnötig und wurde später wieder fortgelassen.

Die zwischen Ionisationskammer und α-Strahlenquelle befindliche Kristallplatte war im Zentrum eines bei mineralogischen Untersuchungen gebräuchlichen Teilkreisstatives befestigt und konnte damit, wie erforderlich, in ihrer eigenen Ebene um ablesbare Winkel gedreht werden. Ebenso konnte ihre Neigung gegen die Horizontale an einem zweiten Teilkreis verändert und abgelesen werden.

Die Strahlungsquelle bestand aus einem an der Stirnseite mit Polonium versehenen Kupferdraht von 1 mm Dicke. Dieser Draht war an der Säule eines Funkenmikrometers befestigt und konnte so um kleine genau meßbare Strecken horizontal verschoben werden.

Für feste Aufstellung aller Teile war Sorge getragen. Alle Vorrichtungen waren innerhalb eines vorne offenen Drahtkäfigs aufgestellt.

Gang der Versuche.

Besondere Sorgfalt mußte darauf gelegt werden, daß bei einer Drehung des Teilkreises die Kristallplatte nur in ihrer eigenen Ebene sich drehte. Mit anderen Worten, es muß die Platte der Ebene des Drehkreises genau parallel sein, sonst bleibt die von den α-Teilchen in der Platte durchsetzte Strecke nicht konstant, sondern geht bei einer Drehung um 360° durch ein Maximum und ein Minimum. Eine solche Störung könnte den gesuchten Effekt überdecken.

Die Justierung geschah mit Hilfe eines parallelen, scharfen Lichtbündels, das von der Platte nach der Decke reflektiert wurde. Die das Kristallplättchen tragende Glasplatte wurde mit Klebwachs so aufgekittet, daß der Lichtfleck bei einer Drehung des Kreises so unbeweglich blieb, als es der schon erwähnte Mangel absoluter Planheit der dünnen Plättchen erlaubte. Das Elektrometer wurde auf 65 Volt geladen und die Abfallszeiten zwischen den bestimmten Teilstrichen, die meistens einem Abfall von ca. 60 Volt auf 40 Volt entsprachen, gemessen. Befand sich das Präparat nahe bei der Ionisationskammer, so fand die Entladung in wenigen Sekunden statt. Zu den Messungen wurde eine Entfernung gewählt, die eine Abfallzeit zwischen 20—60 Sekunden erzeugte, also an der Grenze der Reichweite lag. Die Platte wurde meist von 30° zu 30° gedreht. Daß keine Störungen beim Drehen vorkamen, wurde dadurch kontrolliert, daß die Ausgangsstellung nachher wieder dieselbe Zeit ergab.

Resultate.

Messungen wurden ausgeführt mit drei Glimmerplättchen von verschiedener Dicke und dem vorher benutzten Gipsplättchen von der Dicke 10 μ.

Ich gebe in folgenden 2 Beobachtungsreihen als Beispiele. Die erste Horizontalreihe enthält die Stellungen der Platte, darunter stehen die in diesen Stellungen gemessenen Abfallszeiten. Die in einer Vertikalen stehenden Zeiten sind direkt hintereinander gemessen. Die letzte Reihe enthält die Mittelwerte der Messungen. α ist der Winkel der Platte gegen die Bahn der α-Strahlen.

Tabelle 1.

Glimmerplatte, $\alpha = 45°$.

	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t_1	33,1	34,4	32,5	37,1	34,0	34,0	36,5	35,0	37,0	31,0	34,0	37,0	32,5
t_2	32,5	35,0	35,0	33,0	38,0	35,0	34,2	33,0	36,0	33,0	35,0	33,0	32,0
t_3	31,9	35,0	33,6	36,0	39,0	36,5	33,8	36,0	35,0	—	—	33,0	—
Mittel	32,5	34,8	33,7	35,1	37,0	35,2	34,8	34,7	36,0	32,0	34,5	34,2	32,2

Tabelle 2.

Gipsplättchen, $\alpha = 45°$.

	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t_1	29,9	30,2	31,8	31,2	30,1	29,8	29,9	31,6	30,8	28,8	29,4	29,9	29,9
t_2	30,2	29,8	31,8	31,5	29,6	29,0	30,0	31,4	30,0	29,0	29,7	29,6	30,1
Mittel	30,0	30,0	31,8	31,3	29,8	29,2	30,0	31,5	30,4	28,7	29,5	29,7	30,0

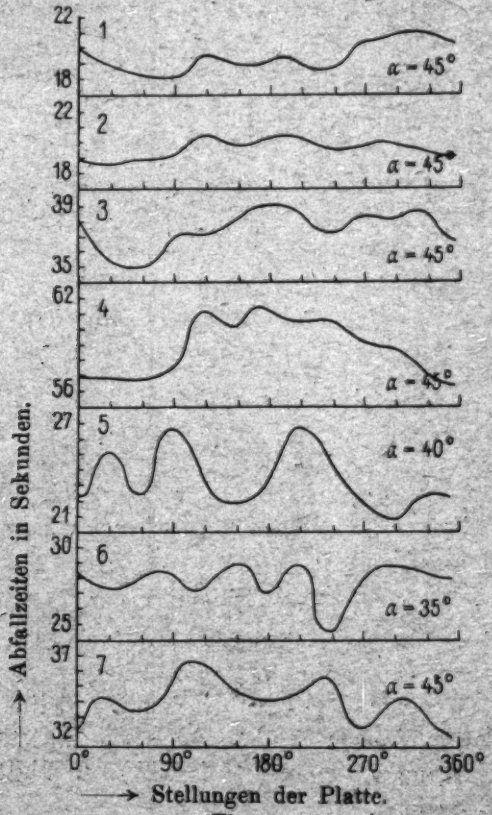


Fig. 3.

Die übrigen Versuchsresultate gebe ich in Kurven an. Ich lasse diejenigen weg, die bei einer Drehung um 360° eine besonders stark ausgeprägte, einfache Periode zeigen. Ein solches Verhalten ist, wie schon vorher erwähnt, durch ungenügende Parallelität der Kristallplatte mit dem Teilkreis oder durch sonstige Unsymmetrien bedingt.

Es beziehen sich die Kurven 1—7 auf Glimmer, 8—12 auf Gips.

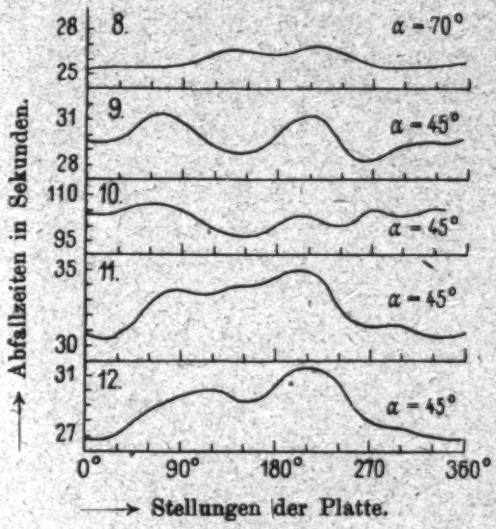


Fig. 4.

Bei allen Kurven zeigen sich außer einer manchmal hervortretenden einfachen Sinuskurve mehr oder weniger deutlich noch mehrere Maxima oder Minima. Daß diese Schwankungen außerhalb der Beobachtungsfehler liegen, zeigt der Umstand, daß die Kurven fast durchweg genau in dem Punkte enden, mit dem sie beginnen.

Die Abstände der Maxima und Minima betragen häufig bei Glimmer 90°, bei Gips 60° oder ein Vielfaches davon.

Die verschiedene absolute Lage der einzelnen Maxima und Minima in den einzelnen Kurven erklärt sich daraus, daß die Platte meistens neu justiert wurde, und dabei ihre Stellung zum Teilkreis verändert wurde.

Im Anschluß daran wurde an den gleichen Spaltplättchen die Änderung der Bremswirkung mit abnehmender Neigung der Plättchen gegen die Bahn der α-Strahlen untersucht. Auch hierbei können Einflüsse der Kristallstruktur zutage treten, da sich die Richtung, in der die Strahlen den Kristall durchsetzen, ändert. Es wurde die Luftstrecke gemessen, deren Bremswirkung der Änderung der Bremswirkung des Kristallplättchens äquivalent war. Dabei wurde so verfahren, daß bei verändertem Neigungswinkel α der Abstand des Präparates von der Ionisierungskammer so lange verändert wurde, bis wieder der gleiche Ionisationsstrom erhalten wurde.

Ich ging bei der nachstehend angeführten Versuchsreihe von einer Entfernung Präparat-Ionisationskammer von 7,3 mm aus, der bei einer Neigung des Glimmerplättchens von 40° ein Spannungsabfall von 60 auf 40 Volt innerhalb 25 Sek. entsprach. Bei einer Entfernungsänderung ist nun zu berücksichtigen, daß nur ein Teil der ursprünglichen Strahlen auf die Ionisationskammer auftrifft, der im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernung abnimmt. Ich muß demnach, um vergleichbare Werte zu erhalten, bei größerem Abstand des Präparates in der größeren Zeit

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

den gleichen Spannungsabfall erhalten. Ist nun nochmals eine Verschiebung λ nötig, so muß ich

(1) $$t_2' = t_2 \cdot \frac{(r_2 + \lambda)^2}{r_2^2}$$

nehmen.

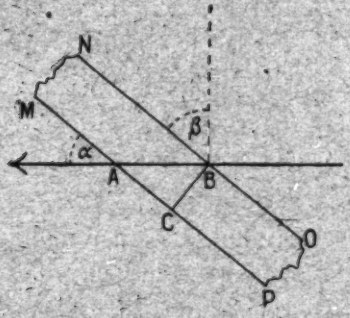


Fig. 5.

Weitere Korrekturen können vernachlässigt werden.

Im allgemeinen ist die Bremswirkung von der Länge der Strecke abhängig, die das α-Teilchen im Kristall zu durchlaufen hat. In Fig. 5 bedeutet *M N O P* einen Querschnitt durch das Plättchen, der Pfeil gibt die Richtung der α-Strahlen an.

Nenne ich die Dicke des Plättchens $BC = d$ und die von den Strahlen durchsetzte Strecke $AB = D$, so ist

$$D = \frac{d}{\cos\beta} = \frac{d}{\sin\alpha},$$

folglich

$$D - d = D(1 - \sin\alpha)$$

$$= \frac{d(1 - \sin\alpha)}{\sin\alpha}.$$

$D - d$ ist der für die Änderung der Bremswirkung in Betracht kommende Teil der Strecke D. Mit ihm ändert sich gleichzeitig die Strecke $r_{90} - r_\alpha$, wobei r_{90} den Abstand der Strahlenquelle bei senkrecht stehender, r_α den Abstand bei um α Grad gegen die Strahlenbahn geneigter Kristallplatte bezeichnet. Beide Strecken müssen, zeigen sich nicht infolge der Kristallstruktur Sonderheiten, in konstantem Verhältnis zueinander stehen.

$$\frac{D - d}{r_{90} - r_\alpha} = c$$

oder $D - d$ von oben eingesetzt:

$$\frac{d(1 - \sin\alpha)}{\sin\alpha\,(r_{90} - r_\alpha)} = c,$$

$$\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha\,(r_{90} - r_\alpha)} = \frac{c}{d} = c'.$$

Nachstehende Tabelle gibt eine Versuchsreihe mit dem Glimmerplättchen wieder. Die erste Horizontalreihe enthält die Neigungswinkel α, die zweite die nach Formel (1) berechneten und dann der betreffenden Messung zugrunde gelegten Zeiten, die dritte den Abstand des Präparates von der Ionisationskammer, bei dem in der Zeit t ein Spannungsabfall von 60 auf 40 Volt stattfand, in Millimetern (die Werte stellen Mittelwerte aus mehreren Beobachtungen dar) die vierte die einer Neigungsänderung von 10 zu 10° entsprechende Änderung der Bremswirkung, die letzte die Werte für c'.

Das Glimmerplättchen hatte bei senkrechtem Durchgang eine Bremswirkung gleich der einer Luftstrecke von 28 mm, der Abstand des Mittelpunktes des Plättchens von der Ionisationkammer blieb immer 4 mm.

Tabelle III.

α	40°	50°	60°	70°	80°	90°
t	25″	35″	65″	78″	86″	88″
r	7,3	9,45	12,5	14,05	14,86	15,00
$r_{\alpha_2} - r_{\alpha_1}$	2,15	3,05	1,55	0,81	0,14	
c'	0,07	0,06	0,06	0,07	0,11	

Die Konstante c' bleibt von derselben Größenordnung, die Änderung der Bremswirkung nimmt mit wachsendem Neigungswinkel ungefähr wie die reziproken Werte des Sinus ab, entsprechend der Formel. Eine Ausnahme macht der Wert zwischen $\alpha = 40°$ und 50°, die aber wahrscheinlich auf die schwierige Beobachtung bei der stark geneigten Platte zurückzuführen ist. Ein Einfluß der Kristallstruktur trat bei dieser Versuchsanordnung nicht hervor.

2. Einfluß auf die Streuung.

Durchsetzt ein durch eine runde Blende scharf begrenztes Bündel α-Strahlen eine streuende Materie, so wird ein senkrecht in ihren Weg gestellter Schirm nicht mehr in der Größe eines Fleckes getroffen, der dem geometrischen Bilde der Blende entspricht, sondern ein Teil der Strahlen geht über den Rand des Fleckes hinaus, da er gestreut, d. h. aus der ursprünglichen Bahn abgelenkt worden ist. Findet dabei in einer Richtung eine besonders starke Streuung statt, so macht sich dies an dem Fleck durch besondere Vergrößerung in dieser Richtung bemerkbar.

Ich ließ demnach ein ausgeblendetes Bündel α-Strahlen verschiedene Kristallplättchen senkrecht durchdringen und untersuchte die Streuungsbilder, die auf einer Sidotblende oder einer photographischen Platte entstanden. Es geschah dies einerseits durch Zählen der Szintillationen auf der Sidotblende, andererseits durch Ausmessen des Schwärzungsfleckes auf der photographischen Platte. Es wurden hierbei Kristallplättchen benutzt, die in gleicher Weise wie vorher erhalten waren.

Versuchsanordnung.

Eine 11 cm lange und 6 cm weite Glasglocke G war am einen Ende durch einen Glasstöpsel zu verschließen. Am an-

deren Ende war sie glatt abgeschliffen, so daß sie hier durch eine Glasplatte *Pl* luftdicht abgeschlossen werden konnte. Auf diese Platte war ein Messingrohr *R* von 4 cm Länge und 3 cm Weite aufgekittet, das am anderen Ende durch eine Messingplatte verschlossen war. In der Mitte der Messingplatte befand sich eine runde Öffnung von 1 cm Durchmesser, über der das Kristallplättchen befestigt wurde. Auf das Messingrohr konnte ein Deckel *D* aufgeschoben werden, der ebenfalls in der Mitte durchbohrt war. Auf diese Öffnung wurde die Blende geklebt. Die Innenseite der Glasplatte wurde mit Klebstoff bepinselt, auf den eine dünne Schicht Sidotblende gestreut wurde. Um einen gleichmäßigen, feinkörnigen Überzug zu erhalten, wurde sie durch ein Tuchbeutelchen aufgestäubt. Als Strahlenquelle wurde ein an der Stirnseite mit Polonium überzogener Kupferdraht *Po* von 1 mm Durchmesser benutzt, der an dem Glasstöpsel befestigt wurde. Fig. 6 gibt einen Längsschnitt durch den Apparat.

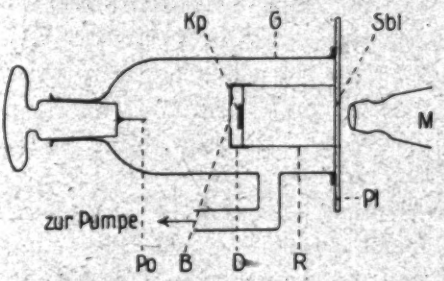


Fig. 6.

Die Entfernung des Präparates von der Blende betrug 3,5 cm, der Blende von dem Kristallplättchen *Kp* 0,5 cm und des Kristallplättchens von der Sidotblende 4 cm. Auf diese Weise wurde aus dem vom Präparat ausgehenden Strahlenkegel ein kleines Bündel ausgeblendet, das das Kristallplättchen durchsetzte und dann die Sidotblende traf. Um die Bremswirkung und Streuung der Luft zu beseitigen, mußte der Apparat luftleer gemacht werden. Zu diesem Zwecke war seitlich an der Glocke ein Fortsatz angebracht, der zur Gaedepumpe und einem Manometer nach Mc Leod führte. Der Apparat wurde wagerecht aufgestellt. Vor der Glasplatte befand sich ein Mikroskop mit etwa 50facher Vergrößerung, das mittels Schlitten-

führung um genau ablesbare Strecken senkrecht und wagerecht verschoben werden konnte, wodurch jeder Punkt der Platte ins Gesichtsfeld gebracht werden konnte. Um eine Streuung durch den Rand der Blende zu vermeiden, mußte diese aus Material von niederem Atomgewicht bestehen. Ich verwendete bei allen Versuchen Pergamentpapier, das mit einer runden Nadel durchstochen wurde. Es kam darauf an, daß die Öffnung möglichst gleichmäßig rund war. Ihre Form wurde unter dem Mikroskop nachgeprüft. Der Durchmesser betrug bei den verschiedenen Versuchen 0,7, 0,45 und 0,46 mm.

Gang der Versuche.

Alle Versuche mußten bei vollständiger Dunkelheit vorgenommen werden. Das Mikroskop wurde auf die Körnchen der Sidotblende eingestellt und so justiert, daß bei allen Verschiebungen die Einstellung scharf erhalten blieb. Um dem Auge in der Dunkelheit einen Anhaltspunkt zu geben, wurde der Rand des Gesichtsfeldes im Okular durch einen Ring von schwach leuchtender Balmainscher Leuchtfarbe bezeichnet. Die Ablesungen der Noniusstellungen des Schlittens, der Stoppuhr und die Aufzeichnungen geschahen im roten Lichte einer Taschenlampe, das die Empfindlichkeit des Auges für die Szintillationsblitze nicht beeinträchtigte.

Im Apparat wurde ein genügend hohes Vakuum (schon bei $^1/_{100}$ mm Druck ist die Streuung durch die Luftreste unmerklich geworden) hergestellt, dessen Konstanz von Zeit zu Zeit am Manometer kontrolliert wurde. Während der Dauer eines Versuches blieb die Pumpe immer in Tätigkeit.

Nachem sich das Auge im Dunkeln ausgeruht hatte, wurde mit den Beobachtungen begonnen. Es wurde mit der Stoppuhr die Zeit gemessen, in der eine bestimmte Anzahl Szintillationen im Gesichtsfelde erfolgten. Mit der ersten wurde die Uhr in Tätigkeit, mit der letzten gezählten außer Tätigkeit gesetzt. Solche Beobachtungen wurden so lange wiederholt, bis ein genügend sicherer Mittelwert festgestellt werden konnte.

Dann wurde das Mikroskop um eine bestimmte Strecke (meist 0,5—1 mm) verschoben und dort das Verfahren wiederholt.

Auf diese Weise erhielt ich ein Bild von der Verteilung der Szintillationen auf der ganzen Fläche. Die Mittelwerte

der Beobachtungsreihen für jeden Punkt wurden in einer Tabelle eingetragen, deren erste Horizontalreihe die Stellungen des wagerechten Nonius l und deren erste Vertikalreihe die Stellungen des senkrechten Nonius h, beide in Millimetern, enthält. In die zwischenliegenden Felder wurden die Werte für den betreffenden Ort eingetragen.

Resultate.

Brauchbare Beobachtungen konnten nur mit Glimmerplättchen erhalten werden, da nur diese genügend dünn gespaltet werden konnten. Ohne streuendes Kristallplättchen erhielt ich ein ziemlich scharf begrenztes, geometrisches Bild der Blende, das bei einem Blendendurchmesser von 0,7 mm ungefähr 3,6 mm Durchmesser hatte. Befindet sich ein Kristallplättchen hinter der Blende im Wege der α-Strahlen, so ist der Fleck größer, die Grenze weniger scharf. Zugleich weicht seine Gestalt bei fast allen Versuchen etwas von der Kreisform ab. Tabelle IV und V geben zwei Versuchsreihen mit Glimmerplättchen wieder, aus denen dies deutlich wird. Die Werte geben die Zahl der Sekunden an, in der jedesmal 10 Szintillationen erfolgten.

Tabelle IV.

Blendendurchmesser 0,45 mm.

l =	129,0	128,0	127,5	127,0	126,5	126,0	125,6	125,0	124,5	124,0
h = 31,0	—	—	—	—	—	1800	—	—	—	—
30,2	—	—	1500	—	—	—	—	—	—	—
30,0	—	—	—	—	—	—	—	1200	—	—
29,6	—	—	—	—	—	—	363	—	1200	—
29,0	—	1800	—	200	—	—	—	182	—	1800
28,5	—	—	—	—	79	—	—	—	—	—
28,0	1800	700	—	70	—	—	—	141	—	900
27,5	—	—	—	—	53	—	—	—	—	—
27,0	1400	700	—	331	—	158	—	325	—	—
26,5	—	—	630	—	263	—	—	—	—	1800
26,0	—	1200	—	—	—	1800	—	—	—	—

Tabelle V.

Blendendurchmesser 0,46 mm.

l =	130	129	128	127	126	125
h = 33	—	—	—	725	—	—
32	—	700	200	196	450	—
31	—	287	62	27	101	> 900
30	>1000	95	28	20	60	625
29	—	270	62	34	80	>1000
28	—	800	248	870	550	—

Trägt man die Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen X-Achse dem wagerechten und dessen Y-Achse dem vertikalen Nonius entspricht, und verbindet die gleichen Werte miteinander, so erhält man die Kurven gleicher Häufigkeit, die uns ein Bild von der Gestalt des Fleckes und von der Verteilung der Streuung geben. Fig. 7 und 8 zeigen in vergrößertem Maßstab solche Kurven, die aus den Werten der Tabellen IV und V hervorgegangen sind. Das Kreuz rechts

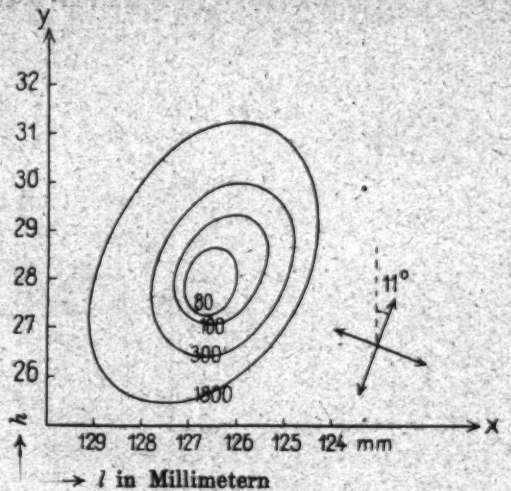


Fig. 7 (Tab. IV).

daneben bedeutet die Lage der Elastizitätsachsen in dem Kristallplättchen, die nach dem betreffenden Versuch festgestellt wurden. Bei Fig. 7 bildete die eine mit der Vertikalen einen Winkel von 11°, bei Fig. 8 einen Winkel von 40°.

In Fig. 7 sind die Kurven für die Punkte mit 80, 100, 300 und 1800 Sek., in Fig. 8 die für die Punkte mit 60, 100 und 200 Sek. eingezeichnet.

Die Blenden erwiesen sich auch bei der Kontrolle nach den Versuchen als gleichmäßig rund. Wie aus den Kurven hervorgeht, ist der Szintillationsfleck nach einer Richtung, die jedesmal einer der beiden Achsen im Kristall parallel ist, stärker verlängert. Es spricht dies für eine vorzugsweise Streuung der α-Strahlen in Richtung einer Elastizitätsachse.

Schließlich wurden an die Stelle der Sidotblende photomechanische Platten, wie sie auch bei den eingangs beschrie-

benen Versuchen benutzt wurden, gebracht. Nach mehrstündiger Exposition wurden sie wie oben entwickelt, und der Fleck mit dem Mikroskop untersucht und ausgemessen. Ohne Kristallplatte gab es wieder einen kleinen ziemlich scharfbegrenzten Fleck von der Größe des geometrischen Blendenbildes. Einige Aufnahmen mit Glimmerplättchen zeigten Strichelung, die nach einer Richtung besonders ausgesprochen war. Eine Drehung des Kristalls änderte diese Richtung nicht, dagegen eine Drehung des Poloniumpräparates. Vermutlich war also die Lage von

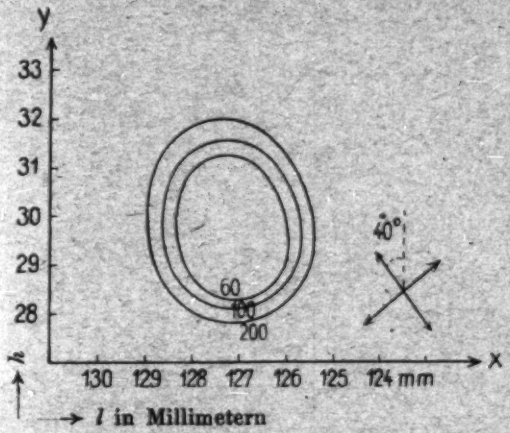


Fig. 8 (Tab. V).

Präparat und Blenden zueinander die Ursache. Der Rand des Fleckes ist sehr unscharf, die Gestalt daher schwer zu bestimmen, wenigstens ist keine besondere Verlängerung in irgend einer Richtung zu erkennen. Aufnahmen mit Gipsplättchen gaben nur ganz schwache Flecke, die nicht zu verwenden waren, und andere Plättchen aus Quarz, Topas und anderen Kristallen konnten nicht dünn genug hergestellt werden, um eine solche Anzahl α-Strahlen durchzulassen, daß überhaupt eine Schwärzung der photographischen Platte erreicht wurde.

3. Zusammenfassung.

Es wurde der Einfluß der Kristallstruktur von Glimmer und Gips auf die Reichweite und die Streuung von α-Strahlen untersucht. Die Ergebnisse der photographischen und vor allem der elektrometrischen Methode weisen auf einen Einfluß

auf die Reichweite in dem Sinne hin, daß die α-Strahlen in Richtung der Elastizitätsachsen den geringsten Widerstand finden.

Die Streuungsversuche ergeben, daß auch für die Streuung mit großer Wahrscheinlichkeit Vorzugsrichtungen existieren.

Daß der Einfluß der Kristallstruktur nur sehr schwach hervortritt, liegt wohl u. a. daran, daß die α-Teilchen bei ihrer verhältnismäßig großen Masse und Geschwindigkeit zum Teil im Kristall Zerstörungen ausüben.

Aus den Resultaten kann man entnehmen, daß die α-Teilchen, die parallel mit einer Molekülschicht einen Kristall durchsetzen, den geringsten Widerstand finden, und daß bei der Streuung die Teilchen die größte lebendige Kraft (also auch Reichweite) nach Verlassen des Kristalls haben, deren Bahn nach der Ablenkung aus der ursprünglichen Richtung parallel mit den Schichten der Kristallmoleküle läuft, da dann kein weiterer Energieverlust durch neue Zusammenstöße stattfindet.

Es war meine Absicht, die Versuche noch fortzusetzen. Durch die Einberufung zum Heeresdienst während des Krieges und meine, nach Absolvierung des Staatsexamens, jetzt erfolgte Verwendung an einer höheren Schule ist mir das leider unmöglich gemacht worden.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, in dankbarer Erinnerung meines allzu früh verstorbenen Lehrers, Hrn. Prof. Dr. Max Reinganum, zu gedenken. In liebenswürdigster Weise förderte er die Arbeit jederzeit durch Rat und Tat. Es war ihm nicht vergönnt, ihre Vollendung zu erleben. Bei Ausbruch des Krieges eilte er zu den Waffen und fiel im September 1914 auf dem Schlachtfelde in Lothringen.

Hrn. Geheimrat Himstedt bin ich für Überlassung von Apparaten des Instituts, der Freiburger Wissenschaftlichen Gesellschaft für ihre Bereitstellung von Mitteln zu Dank verpflichtet.

Physikalisches Institut zu Freiburg i. Br. und
Offenbach a. M., im Juni 1919.

(Eingegangen 25. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

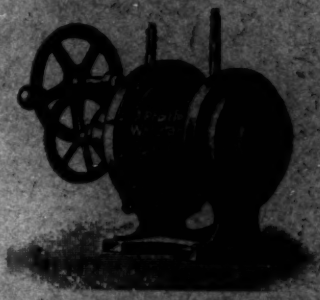
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P.



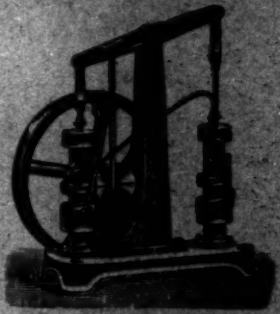
System Gaede, D. R. P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen. D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen. D. R. P.



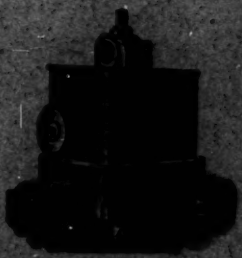
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

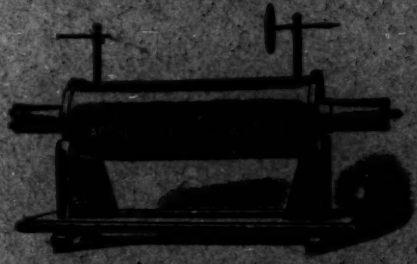
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

		Seite
1.	J. E. Lilienfeld. Zur Hochvakuumentladung	221
2.	Teófilo Ionardi. Die Dampfspannung des festen Broms. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans.)	264
3.	G. Bakker. Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes, insbesondere von Kohlensäure	278
4.	F. v. Hauer. Bewegung und Ladung kleiner Teilchen im ionisierten elektrischen Feld	303

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1920. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Zur Hochvakuumentladung;* *von J. E. Lilienfeld.*

Inhaltsübersicht: I. Der Anlaß. — II. Allgemeines über die Untersuchungsmethode. — III. Lineare Verteilung des Gefälles längs der Achse. — IV. Temperaturmessung an der Anode. — V. Rohr mit zwei Anoden im nämlichen zylindrischen Teil. — VI. Die Charakteristiken. — VII. Der Grenzwert des Gefälles. — VIII. Charakteristiken eines Hochvakuumventils. — IX. Isolatoren und Hochvakuumentladung. — X. Zusammenfassung. — XI. Tabellen.

I. Der Anlaß.

Geschichtliches.

§ 1. Die Entladungserscheinungen im höchsten erreichbaren Vakuum sind zum ersten Male von mir unter Benutzung von Glühkathoden hergestellt und untersucht worden. Meine ersten Arbeiten datieren vom Jahre 1907. Daran anschließend folgt eine Reihe von Untersuchungen, über die in zusammenfassender Form in den Annalen der Physik im Jahre 1910 (1) und 1914 (2) berichtet wurde. Ein ähnlicher Bericht über die nach dem Jahre 1914 veröffentlichten Untersuchungen liegt noch nicht vor. Sofern diese Untersuchungen in das Gebiet der Röntgenstrahlenerzeugung spielen, werden sie demnächst im „Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik" zusammengefaßt erscheinen.

Die Erscheinung, welche den Anlaß bot, mich mit dem Gebiete der Hochvakuumentladung zu befassen, war die Tatsache, daß die zur Durchleitung einer gewissen Stromstärke erforderliche Klemmenspannung mit fortschreitender Gasverdünnung ansteigt, wenn erst einmal eine bestimmte Gasdichte unterschritten ist. Schon in meinen ersten Arbeiten[1]) führte ich die Zunahme des Spannungsabfalles auf die Ab-

1) Es erscheint erforderlich zu betonen, daß ich *von allem Anfang an diese Auffassung* vertreten habe in Anbetracht einer Anzahl späterer vom Jahre 1913 an veröffentlichter Arbeiten anderer Forscher, in denen diese Deutung der Beobachtungen als etwas überraschend Neues dargestellt wird.

wesenheit hinreichender Ionenbildung in den Gasresten und auf das infolgedessen stattfindende Auftreten einer von den Elektronen herrührenden *Raumladung* zurück. Dieser mein Standpunkt befand sich im Gegensatz zu einer kurz darauf von Soddy (3) vertretenen Auffassung, derzufolge die gedachte Spannungszunahme daher rühren sollte, daß die Glühkathode im höchsten Vakuum ihre Wirksamkeit verliert. Nachdem meine Entgegnung (4) auf die Soddysche Arbeit veröffentlicht war, gelang es mir, nachzuweisen, daß bei weiter fortgesetzter Gasverdünnung die gesamten Entladungsvorgänge letzten Endes *vom Gasdrucke unabhängig* werden. Damit war die Erkenntnis gegeben, auf welcher sich die Hochvakuumtechnik (Röntgenröhren, Ventilröhren usw.) in den darauf folgenden Jahren aufbaute. Ich persönlich zog die Konsequenz für die Röntgentechnik bereits im Herbst 1911 (5).

Das quadratische und dreihalbe Gesetz.

§ 2. Gleichzeitig mit der Beobachtung, daß bei Unterschreitung einer bestimmten Gasdichte die Klemmenspannung an der Röhre zu wachsen beginnt und schließlich vom Gasdrucke unabhängig wird, stellte ich fest, daß die *Entladungscharakteristik* im Hochvakuum einen Anstieg des Gefälles mit der Stromzunahme aufweist. In meinen daran anschließenden Arbeiten wurde dargetan, daß zwischen dem Strom und einer Potenz des Gefälles in der Regel eine lineare Abhängigkeit besteht. Für den Exponenten dieser Potenz wurden von mir verschiedene Werte beobachtet; als interessante Fälle erörterte ich ganz besonders in ihrer Beziehung zur Raumladung den Wert 2 sowie den Wert 3/2. Hauptsächlich gefesselt wurde meine Aufmerksamkeit durch das erstgenannte quadratische Gesetz; denn die Versuche, insbesondere Messungen des Potentialgefälles längs der Entladungsachse erwiesen, daß in dem Gültigkeitsbereiche dieses Gesetzes eine Raumladung nicht besteht. Es ist einleuchtend, daß vom grundsätzlich naturwissenschaftlichen Standpunkte die Tatsache, daß die Raumladung ohne irgendwie erhebliche Ionisation der Gasreste zu verschwinden imstande ist, sehr viel wichtiger erscheinen mußte, als die Untersuchung desjenigen Gebietes, in welchem die von vornherein zu erwartende, keinesfalls überraschende, von den Elektronen verursachte Raumladung vorhanden ist.

Die Arbeitsteilung.

§ 3. Im Gegensatz zu der meinerseits unternommenen Durchforschung des raumladungs*losen* Entladungsgebildes befaßten sich seit dem Jahre 1913 zahlreiche andere Forscher mit denjenigen Erscheinungen, bei denen das Bestehen einer Raumladung zu beobachten ist. Es trat eine Arbeitsteilung in dem Sinne ein, daß außer in meinen Arbeiten das raumladungslose Gebilde von keiner anderen Seite einer Untersuchung unterworfen wurde. Die Folge davon ist, daß zurzeit von einer Anzahl Fachgenossen, hauptsächlich aber in der Industrie und in der Patentliteratur die Meinung vertreten wird, es sei die Gültigkeit des Dreihalbegesetzes geradezu das notwendige, aber auch das hinreichende Kriterium für das Bestehen eines Hochvakuums.

Erster Einwand: Ungenügendes Vakuum.

§ 4. Die Forscher, welche diese Meinung vertreten, pflegen zweierlei Argumente meinen Arbeiten entgegen zu setzen. Das *erste* dieser Argumente wurde von Langmuir in seiner ursprünglichen Publikation (6) gebracht, sonderbarerweise aber nicht in seiner späteren deutschen (7) Veröffentlichung wiedergegeben [vgl. auch meine Erwiderungen (8, 9)]. Langmuir meint, meinen Untersuchungen hätte überhaupt kein genügend hohes Vakuum zugrunde gelegen, da es mir sonst mit keiner technisch herstellbaren Spannung hätte gelingen können, in den engen, mit mehreren Knicken versehenen Entladungsröhren eine Entladung zu erzeugen. Dieses Argument kann nicht anders widerlegt werden, als indem man irgendeine der von mir beschriebenen Röhren oder eine der Formgebung nach gleichwertige Modifikation derselben beliebig lange an den besten heute bekannten Hochvakuumpumpen, gegebenenfalls unter Kühlung der Glaswände in flüssiger Luft [1]), zu betreiben versucht. Auf diesem und nur auf diesem Wege kann sich jedermann mit Leichtigkeit überzeugen, daß der Langmuirsche Einwand gegenstandslos ist und daß Spannungen von der Größenordnung von einigen wenigen Kilovolt vollauf genügen, um die von mir beschriebene, mit einer weiteren Abnahme der Gasdichte sich nicht mehr ändernde Charakteristik aufzunehmen.

1) Diese Kühlung wurde zum Zwecke des Herabminderns der Gasdichte im Hochvakuum von mir zuerst noch vor 1910 angewandt (1).

Zweiter Einwand: Unzuverlässigkeit der Sondenmessung.

§ 5. Die *zweite* der mir entgegengebrachten Einwendungen ist — soviel ich heute sehen kann — die bei weitem häufigere. Wenn sie auch in der Literatur nur bedingterweise ausgesprochen sich vorfindet, so habe ich persönlichen Äußerungen entnommen, daß sie doch einen gewissen Kreis von Anhängern hat. Es ist dies die Ansicht, daß meine Meßresultate durch die Benutzung der Sondenmeßmethode getrübt sind. Von Rechts wegen liegt freilich die Sache so, daß die Berechtigung der Sondenmessung in einem Entladungsgebilde, welches einen linearen Potentialverlauf aufweist, über jeden Zweifel erhaben sein müßte, besonders da das Vorhandensein einer hochwertigen Isolation der Sonden von mir stets besonders betont wurde.

Gegenstand vorliegender Arbeit.

§ 6. Ich habe mich nichtsdestoweniger entschlossen, meine Untersuchungen nach Möglichkeit ohne Benutzung einer Sondenmessung zu wiederholen. Nicht etwa, weil ich mir eine größere Genauigkeit davon versprach — tatsächlich ist eine jede andere Messung bedeutend ungenauer als gerade die Sondenmessung — sondern um der gegen diese Methode nun einmal bestehenden Voreingenommenheit zu begegnen.

II. Allgemeines über die Untersuchungsmethode.

Beschränkung der Untersuchung auf zylindrische Röhren.

§ 7. Wenn man sich für die Bestimmung des Potentialgefälles nicht einer Sondenanordnung bedienen will, so liegt der Gedanke am nächsten, es zu versuchen, mit der Messung der *gesamten* Spannung auszukommen, indem man einfach an die Klemmen der Entladungsröhre ein passendes Voltmeter anschließt. Bekanntlich sind aber die Erscheinungen längs der Entladungsbahn nicht so einheitlicher Natur, daß eine solche Messung ohne weiteres die gewünschten Aufschlüsse zu bringen geeignet wäre.

Zunächst ist es bekannt, daß im allgemeinen an den Elektroden andere Vorgänge stattzufinden pflegen als in der eigentlichen Entladungsbahn. Diese Vorgänge machen sich dadurch bemerkbar, daß sie einen besonderen Anoden- bzw. Kathodenfall verursachen. Wird z. B. eine Glühkathode benutzt, dann können je nach ihrer Beschaffenheit, ihrer

Temperatur, aber auch infolge der Eigenart, in welcher Elektronen an ihr freigemacht werden, Komplikationen auftreten. Es ist in der Tat einfacher, den Einfluß der Elektroden mit Hilfe der Sondenmessung zu eliminieren, als — einen besonders günstigen Fall vorausgesetzt — nachzuweisen zu versuchen, daß kein erheblicher Fehler begangen wird, wenn das Gefälle in der näheren und weiteren Umgebung der Elektroden mitgemessen wird.

Die Hauptursache aber, weshalb ich meine bisherigen Arbeiten nicht auf die Messung des gesamten Spannungsabfalls in der Röhre aufgebaut habe, ist die folgende. Schon der bloße Anblick einer Hochvakuumentladung lehrt, daß in weiten Röhrenteilen und bei geringen Stromdichten andere Vorgänge sich abspielen als in engen Röhrenteilen und bei großen Stromdichten. Das wird von der Messung bestätigt. Im ersten Falle hat man es mit Gebilden zu tun, welche einen größeren oder geringeren Betrag an Raumladung aufweisen und häufig (wenn auch nicht immer) dem Dreihalbegesetz folgen. Im zweiten Falle hat man es mit Raumladungsfreiheit und mit dem quadratischen Gesetz zu tun.

Besonders verwickelt wird das Bild durch den sich mit der Röhrenform von Fall zu Fall ändernden Einfluß der den weiten Röhrenteil mit dem engen zylindrischen verbindenden Verjüngung. Der Erfahrung gemäß pflegen sich die Glaswände dieser Verjüngung negativ aufzuladen und nach Art einer eigenen Kathode[1]) einen Kathodenstrahl zu bilden, ähnlich wie man ihn bei der gewöhnlichen Gasentladung als „Striktions"-Kathodenstrahl zu beobachten Gelegenheit hat. Die geordnete Bewegung eines solchen Striktionskathodenstrahles pflanzt sich längs der Achse des zylindrischen Röhrenteiles fort bis zu einer Tiefe, welche durch die Fähigkeit des hier bestehenden raumladungslosen Gebildes, langsame Kathodenstrahlen zu zerstreuen (10) begrenzt ist. Diese Eindringungstiefe beträgt — je nach der Form der Verjüngung — den gelegentlich vorliegender Untersuchungen gewonnenen Erfahrungen zufolge für einen zylindrischen Querschnitt von etwa 20 mm Durchmesser reichlich 5 cm bis zu

1) Über die Größe des hier stattfindenden, von der Form der Einengung weitgehend abhängigen Spannungsabfalles wolle man Abschnitt VII, § 29, vergleichen.

10 cm von dem Anfange des zylindrischen Teiles an gemessen. Außer dem Striktionsstrahl kommen im erweiterten Röhrenteil noch andere Umstände hinzu, von denen einige bereits angedeutet wurden und welche die Sachlage noch verwickelter gestalten.

Die Sondenmessung und Möglichkeiten sie durch Klemmspannungsmessung zu ersetzen.

§ 8. All das sind neue Gründe, welche sich zu dem im Abschnitt I genannten hinzugesellen und mich veranlaßt haben, meine weiteren Untersuchungen auf das Gebiet von Entladungen bei *gleicher Stromdichte*, also in *zylindrischen Röhren* zuzuspitzen. Nach der vorausgegangenen Auseinandersetzung wird es auch erneut verständlich erscheinen, weshalb ich stets darauf hinwies, daß die Messungen in einer praktisch unendlichen Entfernung von den Elektroden innerhalb der zylindrischen Bahn auszuführen sind, und weshalb ich dementsprechend den kurzen, nur 30 mm langen Sondenmeßbereich in der Mitte eines zylindrischen Rohres anzuordnen pflegte, welches bis zu 30 cm lang war und 10—11 mm lichte Weite besaß. Es ist schließlich klar, daß, wenn ohne Sondenmessung, einfach unter Zugrundelegung der Bestimmung der Klemmenspannung gearbeitet werden soll, der Beitrag, den der an den Elektroden und bis zur Verjüngung stattfindende Spannungsabfall zur Gesamtspannung liefert, irgendwie ausgeschaltet werden muß.

Am einfachsten würde — falls der Abfall an den Elektroden vernachlässigt werden könnte — eine Röhre mit einer von Kathode zu Anode gleichbleibenden lichten Weite es ermöglichen, mit einer einzigen Klemmspannungsmessung auszukommen. Solche Röhren können aber aus rein technischen Gründen kaum hergestellt werden, besonders aber dann nicht, wenn eine Glühkathode angewandt werden soll. Denn die Glühkathode kann nicht den vollen Querschnitt des Rohres ausfüllen. Sie besteht in der Regel aus Drahtwindungen und muß in einer kugelförmigen Erweiterung untergebracht werden, so daß die Röhren die charakteristische, aus den Figg. 1, 2 und 3 ersichtliche Form erhalten.

Ein zweiter naheliegender Gedanke ist der, den zylindrischen Röhrenteil außerordentlich lang und nicht allzu

weit zu gestalten, so daß auf ihn ein bei weitem überwiegender Teil des gesamten Spannungsabfalls entfällt. Wäre man in der Lage, die Länge dieses Teiles und somit den gesamten Spannungsabfall an den Rohrklemmen auf jedes erforderliche Maß zu bringen, dann könnte tatsächlich der Einfluß der Vorgänge an den Elektroden und in der Verjüngung beliebig herabgesetzt werden. In der Praxis besteht eine solche Möglichkeit aber nicht, und zwar allein schon deshalb nicht, weil die im Leipziger Institut verfügbare, stehende Gleichspannung unserer Hochspannungsdynamos nicht viel mehr als 10000 Volt beträgt, wobei noch ein erheblicher Teil in einem Vorschaltwiderstand zum Zwecke der Stabilisierung der Vorgänge verbraucht wird. Andererseits ist die glastechnische Herstellung und die Handhabung, besonders aber die Entgasung sehr langer Röhren nicht einfach. Auch begegnet das Zünden der Entladung in sehr engen und sehr langen Röhren Schwierigkeiten.

Aus allen diesen Gründen ist zurzeit die obere Grenze der Länge bei allerhöchstens 1 m erreicht für Röhren von ungefähr 20 mm lichter Weite. Die längste, im folgenden beschriebene, zylindrische Entladungsbahn betrug aber 63 cm. Bei dieser Entladungsbahn findet für die Stromstärke von 10 M.A. ein gesamter Spannungsabfall von etwa 6500 Volt statt. Davon entfallen auf den weiten Teil von der Glühlampe bis 25 mm jenseits der Einengung etwa 2600 Volt, also rund 40 Proz. der Gesamtspannung. Man sieht aus diesen Angaben, daß es unmöglich sein dürfte, durch Verlängerung des Rohres den störenden Spannungsabfall unterhalb einer erträglichen Fehlergrenze herabzudrücken. Angesichts dessen ist es sehr beachtenswert, daß bereits bei den hier benutzten Längen und Querschnitten die an den Rohrklemmen aufgenommene Charakteristik sich um so mehr dem quadratischen Gesetze nähert, je länger und enger das Rohr ist. So betrug der Exponent bei dem genannten 63 cm langen Rohre bereits 2∞, wie aus Diagramm Fig. 6 ersichtlich.

Aber selbst wenn die Benutzung hinreichend langer Röhren sich praktisch ermöglichen ließe, würde man nicht alle Fragen mit ihrer Hilfe beantworten können. So würde die für den Nachweis der Raumladungsfreiheit unentbehrliche Feststellung der Verteilung des Gefälles längs der Entladungsachse an einer solchen Röhre nicht ausgeführt werden können.

Die Subtraktionsmethoden — Voraussetzungen ihrer Anwendbarkeit und ihre Mängel.

§ 9. Aus all diesen Gründen ist es unumgänglich nötig, entweder die klassische Methode der längs der Achse verschiebbaren Elektroden zu benutzen, also eine Röhre von der in der Fig. 1 (S. 231) dargestellten und beschriebenen Form. Oder aber Röhren mit mehreren Anoden. Entweder solche mit unbeweglichen Anoden und mehreren, voneinander verschiedenen zylindrischen Entladungsbahnen nach Fig. 2 (S. 237) oder solche mit einer einzigen zylindrischen Entladungsbahn und mindestens zwei Anoden, von denen die eine während der Messung je nach Bedarf in die Entladungsbahn hineingebracht und benutzt oder aus ihr entfernt und beiseite geschafft werden kann (vgl. Fig. 3, S. 240).

Die Anordnungen nach Fig. 1, 2 und 3 seien zusammenfassend „Subtraktionsmethoden" genannt. Und zwar deshalb, weil die Charakteristik des zylindrischen Entladungsteiles durch Subtraktion der Spannungen zweier Meßreihen gewonnen wird, von denen die eine mit der Anode in der Nahlage, die andere mit der Anode in der Fernlage gemacht wird. Durch die Subtraktion heben sich die Vorgänge an den Elektroden heraus, freilich unter verschiedenen Voraussetzungen, die durchaus nicht in selbstverständlicher Weise erfüllt zu sein brauchen.

Erstens müssen die beiden, bei verschiedenen Lagen der Anode zeitlich nacheinander vorgenommenen Meßreihen sich auf den nämlichen Zustand beziehen. Das ist der größte Nachteil der Subtraktionsmethoden gegenüber der Sondenmessung, die in einer einzigen Meßreihe die Charakteristik wiedergibt. Das Wort „Zustand" ist dabei im weitesten Sinne zu verstehen. Es bezieht sich auf den Abfall an den Elektroden, die Aufladung der Rohrwand in dem sich verjüngenden Teile, auf den Gasdruck, und für den Fall, daß verschiedene Entladungsäste koexistieren, auch darauf, daß in beiden Fällen auf dem nämlichen Aste der Charakteristik gemessen wird.

Zweitens ist für den Fall, daß Meßreihen an verschieden langen Rohransätzen des nämlichen Rohres, wie in Fig. 2, miteinander verglichen werden, unumgängliche Voraussetzung,

daß die Formgebung sämtlicher Verjüngungsstellen genau die gleiche sei, und auch ihre Oberflächenbeschaffenheit die gleiche (§ 29), damit die unter „Erstens" genannten Bedingungen erfüllt werden können.

Drittens muß aber die Anode bereits in der Nahlage so weit von der Einschnürung entfernt sein, daß die wenig übersichtlichen Vorgänge in den erweiterten Röhrenteilen keinerlei Störungen der eigentlichen, zylindrischen Meßbahn mitteilen können.

Es ist einleuchtend, daß, wenn irgendeine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, — was sehr wohl eintreten kann — durch die Subtraktion der in beiden Anodenlagen gemessenen Spannungen keinesfalls der Einfluß der Elektroden herausgehoben wird, so daß der Spannungsabfall im zylindrischen Teile als Differenz übrigbleibt, sondern es geht dann aus der Rechnung etwas physikalisch Undefiniertes hervor.

Einer der größten Mängel der Subtraktionsmethoden ist aber, daß durch ihre Anwendung die Fehlergrenzen nicht nur absolut, sondern erst recht prozentuell erweitert werden. Deshalb ist es erwünscht, den Spannungsabfall in der Nahlage möglichst gering, den in der Fernlage möglichst groß zu halten. Es ist daher verständlich, daß ich bestrebt war die Nahlage der Anode nicht weiter als unbedingt erforderlich in den zylindrischen Teil hereinzurücken.

Die Erwägungen dieses Paragraphen lassen es jedenfalls wiederholt klar hervortreten, wie sehr eine Sondenmessung allen anderen Methoden überlegen ist, so daß für genaue Bestimmungen nichts anderes als eine Sondenanordnung in Frage kommen kann.

Gemeinsame Fehler der benutzten Röhrenexemplare.

§ 10. Eine richtige Vorstellung von der Ausdehnung des Bereiches der bereits in großen Zügen besprochenen, vom erweiterten Teile in die zylindrische Meßbahn hineingreifenden Unregelmäßigkeiten habe ich erst im Laufe der vorliegenden Messungen gewonnen. Am einwandfreiesten in dieser Hinsicht war die Anordnung gemäß Fig. 2, wenn auch hier die naheliegende Anode mit ihrer Entfernung von 5 cm gegenüber der Erweiterung noch nicht weit genug in den zylin-

drischen Teil zurückgezogen war. Ich schätze den erforderlichen Mindestabstand bei der lichten Weite von 18—20 mm auf 8—10 cm.

Hingegen ist die Röhre mit der verschiebbaren Anode nach Fig. 1 aus dem gleichen Grunde zwar genügend, um die Linearität des Potentialgefälles längs der Achse innerhalb erträglicher Fehlergrenzen nachzuweisen; für die Bestimmung der Entladungscharakteristik im zylindrischen Teile ist das zurzeit vorliegende Röhrenexemplar aber wenig brauchbar. Zu dem letzteren Zwecke müßte das Rohr sehr viel länger gemacht werden, was jedoch aus den weiter unten auseinandergesetzten technischen Gründen nicht — wenigstens nicht ohne große Kosten — ausführbar ist.

Auch das vorhandene Exemplar der Röhre nach Fig. 8 besitzt eine viel zu nahe an der Erweiterung sitzende Anode. Die an der Röhre angestellten Messungen sind hauptsächlich deshalb interessant, weil bereits die einfache Messung der Klemmenspannung mit großer Annäherung das quadratische Gesetz ergab. Eine Bestimmung der Charakteristik durch Subtraktion der Spannungen ist jedoch an Hand der vorliegenden Versuchsreihen noch nicht angängig.

Da sich aber bereits aus den gegenwärtig vorliegenden Messungen vollkommen sichergestellte Folgerungen allgemeiner Tragweite — Linearität des Gefälles längs der Achse, Unabhängigkeit der Anodentemperatur von der Länge der zylindrischen Bahn — ergeben, berichte ich hierüber im folgenden. Gleichzeitig wird die Herstellung ergänzender Meßreihen angestrebt. So sind Arbeiten, um die Röhren nach Figg. 2 u. 8 durch tieferes Einrücken der Nahlage der Anode in den zylindrischen Teil von dem Einfluß der Vorgänge im weiten Röhrenteil zu befreien, im Gange. Ich hoffe, in einer zweiten Mitteilung demnächst darüber berichten zu können.

III. Die lineare Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse.

Wichtigkeit des Nachweises.

§ 11. An dieser Stelle interessiert in allererster Linie der Nachweis, daß in den zylindrischen Teilen der Entladungsbahn selbst im höchsten Vakuum das Gefälle längs der Achse linear verteilt ist. Denn ein solcher Nachweis genügt, um

die Zulässigkeit der Sondenmessung aufs Neue einwandfrei zu beweisen und somit meinen früheren Arbeiten eine neue Stütze zu geben. Außerdem ist der lineare Verlauf die Hauptgrundlage, aus der auf die naturwissenschaftlich wichtigste Folgerung meiner Untersuchungen, nämlich auf die Raumladungsfreiheit, geschlossen wird.

Die Röhre.

§ 12. Für die Messung des Potentialverlaufes wurde die klassische Methode einer verschiebbaren Anode benutzt. Die Anordnung ist in Fig. 1 dargestellt. Die Anode *A* ist mit

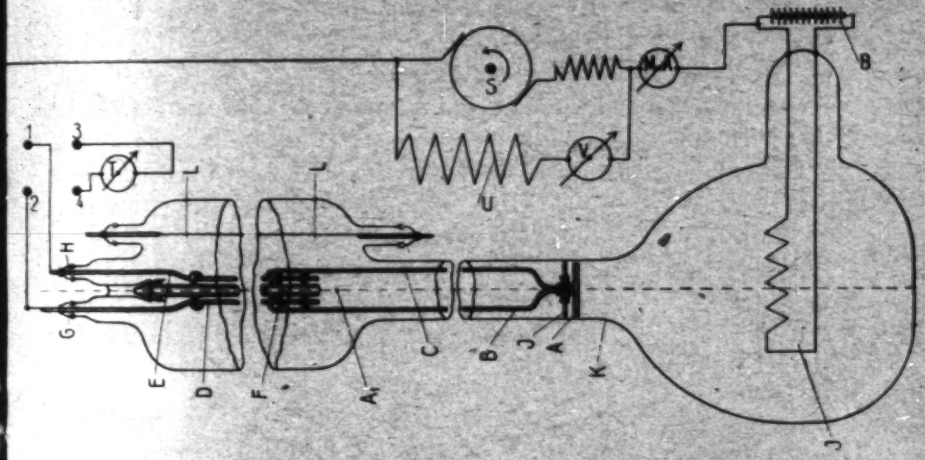


Fig 1.

zwei parallel verlaufenden Drähten *B* und *C* fest verbunden. Diese Drähte gleiten längs einem aus ebensolchen Drähten *D* und *E* bestehenden Schlitten, welcher an einem Quarzstabe *F* befestigt ist. Die Drähte *D* und *E* sind an den Stellen *G* und *H* mit Hilfe der üblichen Platinkontakte nach außen geführt, so daß sie leitend an die Meßanordnung angeschlossen werden können. Hinter der Anode *A*, welche mit einem Spielraum von 1 mm in dem zylindrischen Teile des Entladungsrohres angeordnet ist, befindet sich ein Quarzteller *J*, welcher die ganze lichte Weite des Rohres ausfüllt und zu einer genau zentrischen Führung der Anode *A* dient. Die lichte Weite des zylindrischen Rohrteiles beträgt etwa 23 mm, seine Gesamtlänge 230 mm. Die Messungen werden in drei Stellungen

der Anode A ausgeführt. Diejenige Stellung von A, welche der schematisch angedeuteten Glühlampe H am nächsten liegt, ist um 25—30 mm[1]) gegen die Erweiterung K in das zylindrische Rohr zurückgezogen. Eine zweite, am weitesten von H entfernte Stellung von A ist von der genannten vordersten Stellung von A um 157 mm entfernt. Schließlich wird eine dritte Lage der Anode tunlich genau in der Mitte zwischen ihrer vorderen und hinteren Lage eingestellt, also in einem Abstand von je 77—78 mm von den erstgenannten Lagen. Die Verschiebung der Anode erfolgt einfach durch Schütteln der Röhre.

Lediglich zur Evakuierung dient der Tantaldraht L, von welchem aus die Drähte B, C, D und E mit Elektronen beworfen und so zum Glühen gebracht werden. Das Pumpen der Röhre geschieht deshalb in vertikaler Lage, so daß die ebenfalls aus Tantal bestehende Glühlampe J oben, das mit G und H bezeichnete Ende unten sich befindet. Die Anode liegt also beim Pumpen in der mit A_1 bezeichneten Stellung und wird durch eine von der Glühlampe J aus eingeleitete Entladung bis nahe an den Schmelzpunkt des Kupfers, aus welchem sie besteht, erhitzt. So gelingt es, zum Teile von J, zum Teile von L aus das gesamte in der Röhre enthaltene Metall während des Pumpprozesses auf eine hohe Temperatur zu erhitzen.

Die Betriebs- und Meßanordnung.

§ 13. Die elektrische Anordnung ist ebenfalls aus der Zeichnung ersichtlich. Die Glühlampe J wird von der Akkumulatorenbatterie B geheizt. Die Entladung wird von zwei hintereinander geschalteten Gleichstromhochspannungsdynamos S der Siemens-Schuckert-Werke aufrechterhalten, welche insgesamt bis zu 10000 Volt liefern. Der Strom wird durch Änderung der Erregung geregelt, er geht über einen bis zu 0,5 Megohm betragenden variablen Vorschaltwiderstand T und über das Milliamperemeter MA (ein in Spitzen gelagertes Zeigerinstrument von Siemens & Halske) durch die Röhre. Die Spannungsmessung erfolgt ebenfalls mit Hilfe eines Galvanometers V. Es ist dies ein Millivoltmeter mit aufgehängtem

1) Diese Entfernung ist sehr wahrscheinlich viel zu gering, vgl. Abschnitt II, § 10.

System von Siemens & Halske, wie es für thermoelektrische Messungen benutzt zu werden pflegt. Dieses Instrument wird in Reihe mit einem Hochspannungswiderstand U benutzt, der bis zu 200 Megohm beträgt und aus Widerstandselementen besteht, welche ich an einer anderen Stelle demnächst zu beschreiben gedenke.

Die Messung. — Beschränkung ihres Bereiches.

§ 14. Vor der Ausführung der Messung wurde das Rohr durch einen mehrstündigen Betrieb auf eine befriedigende Konstanz gebracht; die Messung selbst wurde so gemacht, daß in jeder Stellung der Anode die Meßreihe solange hin- und zurück wiederholt wurde, bis eine Übereinstimmung vorlag. Aus der wiedergegebenen Tabelle 1a, S. 258, ist ersichtlich, daß das in einem befriedigenden Maße erreicht werden konnte. Die Tabelle enthält die einzelnen Ablesungen in derjenigen Reihenfolge, in welcher sie tatsächlich angestellt waren. Ich fing mit der hinteren Stellung der Anode A an, nahm daraufhin der Reihe nach die vordere und mittlere Stellung vor und kehrte dann wieder zu der hinteren Stellung zurück. Auch das wurde so lange wiederholt, bis die erste Beobachtungsreihe befriedigend mit der letzten übereinstimmte. Die vier in der Tabelle wiedergegebenen Meßreihen konnten, nachdem das Rohr sich eingelaufen hatte, glatt ohne Fehlmessung etwa im Laufe einer Stunde erledigt werden.

Die Strombelastung der Röhre, welche in der ersten Kolonne Tabelle 1b auf Milliamperes umgerechnet ist, ist sowohl nach den großen wie auch nach den geringen Stromstärken zu begrenzt. Nach den großen Stromstärken zu infolge der durch die Erhitzung verursachten Gasabgabe, welche sich dahin äußert, daß das Gefälle abzunehmen beginnt. Ein Beispiel dafür sieht man in der zweiten Reihe; nachdem eine Stromstärke von 21,6 M.-A. durch das Rohr gegangen war, stellt sich für 18,0 M.-A. nicht mehr die sonstige konstante Ablesung 102, sondern nur der Wert 100 ein.

Nach den geringen Stromstärken zu ist aber die Messung begrenzt infolge des Auftretens von labilen Kurvenästen, wie ich sie schon vor Jahren beschrieben habe. Und zwar tritt im vorliegenden Falle die Labilität am ehesten — bereits bei einer Stromstärke von 10,8 M.-A. — bei der vorderen Anodenlage auf.

Das Meßergebnis.

§ 15. Zwischen den beiden genannten — sämtlichen in vorliegender Arbeit beschriebenen Versuchen gemeinsamen — Grenzen findet sich aber die lineare Verteilung des Gefälles längs der Achse so genau bestätigt, wie das bei dieser verhältnismäßig ungenauen Anordnung überhaupt erwartet werden kann. Tab. 2 enthält in der ersten Kolonne die Stromstärken, in der zweiten Kolonne die für die mittlere Anodenlage berechnete Spannung. Dabei ist die Berechnung so ausgeführt, daß die Spannung der vorderen Anodenstellung jedesmal von derjenigen der hinteren Anodenstellung abgezogen, dann halbiert und zu der Spannung der vorderen Anodenstellung addiert ist. Die dritte Kolonne enthält die tatsächlich beobachtete Spannung in der mittleren Stellung. Die Übereinstimmung zwischen den beiden letztgenannten Kolonnen ist befriedigend.

Ist die Anordnung verbesserungsfähig?

§ 16. Der Anwendung verschiebbarer Anoden im Hochvakuum sind leider infolge mehrerer Umstände ziemlich enge Grenzen gezogen. Zur Erzielung größerer Genauigkeit wäre vor allem die Vergrößerung der äußersten Anodenabstände erforderlich. Das begegnet aber erheblichen Schwierigkeiten, da dann die Röhre nicht nur glasbläserisch schwer herstellbar, sondern auch unhandlich werden würde. Bereits bei der von mir verwirklichten Länge läßt es sich nicht vermeiden, daß die Anode sich gelegentlich festklemmt und ihre Fortbewegung die größte Anforderung an die Geduld stellt.

Die Messung mit der verschiebbaren Anode ist selbstverständlich den in Abschnitt II, § 9, erörterten, sämtlichen Subtraktionsmethoden gemeinsamen Fehlern ausgesetzt. Eine besondere, nur der verschiebbaren Anode eigene Fehlerquelle ist aber die, daß bei dem zur Verschiebung der Anode erforderlichen Schütteln und Klopfen der Röhre unvermeidliche Staubteilchen in die Entladungsbahn geraten und eine zwar geringe, aber doch die Messung störende Gasabgabe verursachen. Aus allen diesen Gründen reichen die hier wiedergegebenen Meßreihen zwar hin, um den linearen Spannungsverlauf innerhalb erträglicher Fehlergrenzen nachzuweisen; für weitergehende Ansprüche an Genauigkeit dürfte man ohne die Anwendung von Sonden kaum auskommen.

IV. Temperaturmessung an der Anode.

Das Problem.

§ 17. Die Frage nach der Temperatur der Anode, besonders der Vergleich derjenigen Temperaturen, welche einer bestimmten gegebenen Strombelastung des Rohres, aber verschiedenen Stellungen der verschiebbaren Anode entsprechen, ist von einem grundsätzlichen Interesse. Ist nämlich einmal — beispielsweise an Hand der vorausgegangenen Messungen — erwiesen, daß das Gefälle linear längs der Entladungsachse verteilt ist, und hat man dann daraus sowie aus den früher von mir publizierten Messungen den Schluß gezogen (1, 2), daß in dem Entladungsgebilde eine Raumladung nicht besteht, so ist der weitere Schluß unvermeidlich, daß man es hier mit einer Elektrizitätsleitung zu tun hat wie sie in einem jeden raumladungsfreien dissoziierten Medium oder noch besser — angesichts der Abwesenheit einer elektrolytischen Abscheidung an den Elektroden — im Metall vorliegt. Ich habe schon im Jahre 1914 darauf hingewiesen (1), daß die gesamte, hier sehr erhebliche, in einem Querschnitt frei werdende Energie in Form von Wärme an die Gefäßwand im nämlichen Querschnitte abgegeben wird ähnlich wie die Joulesche in einem stromdurchflossenen Drahte erzeugte Wärme sich an der Drahtoberfläche der umgebenden Luft mitteilt. Schon die oberflächliche Betrachtung einer möglichst langen Entladungsröhre (es sind solche bis zu 1 m Länge hergestellt worden) lehrt in der Tat, daß eine durchaus gleichmäßige Erwärmung der Glaswand auf der ganzen Länge des Rohres auftritt. Die in dem Entladungsgebilde bestehende Bewegung ist also als eine durchaus ungeordnete aufzufassen, der sich die den Elektrizitätstransport besorgende Bewegung überlagert. Schneidet man einen beliebigen Teil der Entladungsbahn aus, indem man zwei beliebige Schnitte quer zur Röhrenachse legt, so wird dem herausgegriffenen Volumen an dem einen Querschnitte der gleiche Energiebetrag zugeführt, der an dem anderen Querschnitte abgeführt wird. Mit anderen Worten: es ist — ungeachtet des zwischen den genannten Querschnitten bestehenden recht erheblichen Gefälles — die durch den einen Querschnitt dem Volumen zugehende Energie der *geordneten* stromtransportierenden Bewegung gleich der am anderen Querschnitte in der gleichen

Form abgegebenen Energie. Diese Überlegung zeigt, daß die Erhitzung der Anode bei gleicher Strombelastung des Rohres vollständig unabhängig sein muß von der Länge der Entladungsbahn, und von der gesamten an der Röhre anliegenden Spannung, also beispielsweise von der Stellung, welche von einer verschiebbaren Anode in einer beliebig langen zylindrischen Bahn eingenommen wird.

Der experimentelle Nachweis, daß diese Schlußfolgerung zutrifft, würde aber auch umgekehrt einen hinreichenden Beweis für die Richtigkeit der Voraussetzungen bieten, aus welchem die Schlußfolgerung abgeleitet wurde. Also u. a. einen indirekten Beweis für den linearen Verlauf des Potentialgefälles, für die Raumladungsfreiheit, für die ungeordnete Bewegung im Entladungsgebilde und eine metallähnliche Leitung.

Die Anordnung.

§ 18. Das in Fig. 1 (S. 231) abgebildete Rohr enthält eine — im vorausgegangenen Abschnitt noch nicht erörterte — Anordnung zur Messung der Anodentemperatur. Der eine der beiden 2 mm starken zur Anode führenden Drähte B besteht ebenso wie derjenige Draht, auf welchem B gleitet, nämlich D, aus Konstantan, die entsprechenden Drähte C und E sind aus Kupfer. Die mit den Zahlen 1—6 bezeichnete Wippe ermöglicht es, die Anode entweder mit der Hochspannungsquelle S oder mit einem Voltmeter T von der für thermoelektrische Messungen üblichen Art zu verbinden, so daß jeden Augenblick die Entladung unterbrochen und die jeweils erreichte Anodentemperatur abgelesen werden kann.

Am Rohre der Fig. 1 konnte ein solcher Nachweis nicht erbracht werden. Es stellte sich nämlich heraus, daß die Wärmeleitung längs der Drähte B, C, D, E von der Anode A nach außen viel größer ist, wenn die Anode sich in einer größeren Entfernung von der Lampe befindet, als wenn sie näher daran liegt. Das war verursacht durch den in der erstgenannten Stellung bedeutend besser wärmeleitenden Kontakt zwischen den längs des Schlittens gleitenden Drähten und dem Schlitten selbst. So konnte beobachtet werden, daß die Abklingungszeit, welche zwischen zwei gegebenen Temperaturen verlief, in der hinteren Anodenlage zwei- bis dreimal kürzer war, als bei der vorderen Anodenlage. Demgemäß war auch die bei einer gewissen Stromstärke eintretende Erwärmung der Anode

in der der Lampe näheren Lage, also bei einer kürzeren Entladungsbahn, ganz erheblich größer als bei einer längeren Entladungsbahn. Nebenbei sei bemerkt, daß die Wärmestrahlung der Glühlampe auf die Anode zu vernachlässigen war, da die Glühlampe ebenso wie in Fig. 2 gezeichnet ausgeführt und so gestellt war, daß die Anode vom breiten Kupferrahmen der Lampe vollständig abgeschattet wurde.

Nachdem es sich erwiesen hatte, daß eine verschiebbare Anode für die Temperaturmessung nicht geeignet ist, wurde eine andere Versuchsanordnung zu diesem Zwecke ausgeführt. Die Röhre ist in der Fig. 2 dargestellt, während die elektrische

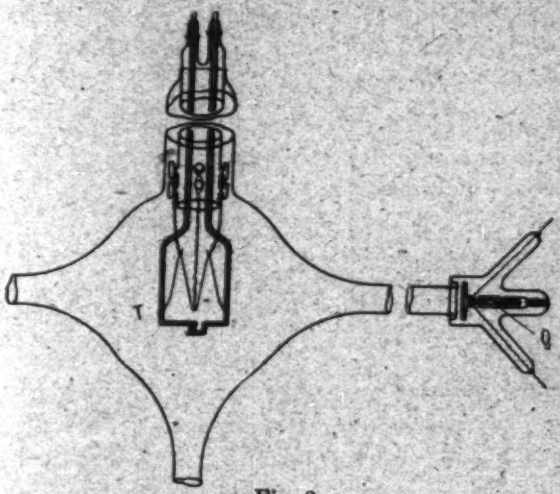


Fig. 2.

Anordnung genau dieselbe wie in Fig. 1 blieb. Die Röhre besteht aus einer Glaskugel, in deren Mitte die aus der Figur ohne weiteres ersichtliche Tantallampe T angeordnet ist. Die Glaskugel besitzt außerdem drei Verjüngungen, die mit größter Sorgfalt schlank verlaufend und so ausgeführt sind, daß ihre Gestalt möglichst gleich ist. An diese Verjüngungen sind drei zylindrische Glasröhren von gleicher Weite (18 mm) angeschlossen. Diese Röhren besitzen verschiedene Längen und tragen an ihren entgegengesetzten Enden je eine Anode. Die drei Anoden haben absolut gleiche Form. Ihre Stiele stecken in Quarzzwischenstücken Q, damit die Befestigungsstellen im Glas beim Ausglühen der Platten nicht gefährdet

werden. An den Anodenplatten sind in der aus der Figur ohne weiteres ersichtlichen Weise die für die Temperaturmessung bestimmten Kupfer- und Konstantandrähte befestigt.

Am kürzesten Ansatz ist die Anodenplatte um 50 mm von der Kugelerweiterung entfernt, so daß also der zylindrische Teil des Rohres zwischen Platte und Kugelkörper die genannte Länge hat. Am zweiten Ansatz beträgt diese Länge 255 mm. Am dritten, längsten Teil aber 530 mm.

Es war ursprünglich geplant, mit Hilfe der drei verschiedenen Längen die Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse auch mit dieser Methode nachzuprüfen. Doch konnte wegen einer bei der Herstellung des Rohres untergelaufenen Versehens der längste Röhrenteil nicht in Betrieb genommen werden. Ich hoffe, in einer zweiten Publikation über derartige Messungen berichten zu können. Vor der Hand wurde nur an den zwei ersten kürzeren Röhren gemessen. Tab. 3a enthält die an diesen zwei Teilen vorgenommenen Ablesungen, während Tab. 3b die umgerechneten Werte sowie die mit Hilfe der Subtraktion der Spannungen bestimmte Charakteristik des zylindrischen Teiles bringt. Über die Zulässigkeit der Subtraktion in diesem Spezialfalle vergleiche man Abschnitt VI.

Die Meßergebnisse.

§ 19. Die Messungen der Temperatur der beiden Platten wurden bei drei verschiedenen Milliamperebelastungen des Rohres vorgenommen; nachstehende Tabelle A enthält die Ergebnisse. In der ersten Kolonne ist die Stromstärke in Milliamperes, in der zweiten die gesamte Voltzahl, in der dritten die nach erreichtem stationären Temperaturzustand am Millivoltmeter gemessenen Millivolts des Thermoelementes angegeben.

Tabelle A.

Milliampere	Kürzeres Rohr		Längeres Rohr	
	Volt	Millivolt	Volt	Millivolt
10,0	2070	20,0	3960	18,6
13,4	2500	23,6	4620	22,0
15,0	2600	25,4	4970	23,8

Zur Orientierung über die Temperaturen selbst diene die Angabe, daß

18_0	Millivolt	300° C
19_4	„	400 „
25_3	„	500 „
31_6	„	600 „

entsprechen.

Aus der Tabelle ist zu entnehmen, daß die Erwärmung bei gleichen Milliamperezahlen mit Rücksicht auf die Fehlerquellen in beiden Fällen sehr nahe gleich genannt werden kann. Da das lange Rohr beinahe den doppelten Energiebetrag bei der Entladung verbraucht wie das kurze Rohr, so unterliegt es gar keinem Zweifel, daß das Plus an Energie im langen Rohre einfach in Form ungeordneter Bewegung an die Glaswand abgegeben wird.

Die vorhandene Abweichung der bei gleichen Strombelastungen beobachteten Temperaturen liegt insofern im umgekehrten Sinne, als die Anode im kürzeren, weniger Energie verbrauchenden Rohre sich etwas mehr erhitzt als in dem längeren, mehr Energie verbrauchenden. Das kann zum Teil an der Abschnitt II, § 10 erörterten, noch immer nicht genügend in den zylindrischen Teil zurückgezogenen Stellung der Anode liegen, wodurch sie dem Striktionskathodenstrahl oder der Wärmeübertragung seitens der besonders hoch erhitzten Glaswand der Verjüngung ausgesetzt ist. Zum Teil kann die geringe Differenz aber auch von einer kleinen, unvermeidlichen individuellen Abweichung in der Anordnung beider Anoden herrühren. Daß ein solcher Unterschied vorhanden war, ist aus der Bestimmung der Abklingungszeiten zu ersehen. Während die Zeit, welche erforderlich war, um einen Rückgang der Spannung des Thermoelementes von 23,6 auf 19,6 Millivolt zu verursachen, beim längeren Rohre 45 Sekunden betrug, dauerte die Abklingung zwischen den nämlichen Temperaturgrenzen beim kürzeren Rohre 49 Sekunden. Dieser kleine Unterschied ist jedenfalls für einen Teil der in der Tabelle A enthaltenen Abweichungen verantwortlich.

V. Rohr mit zwei Anoden im nämlichen zylindrischen Teil.

Die Anordnung.

§ 20. Diese Möglichkeit, die Subtraktionsmethode zu verwirklichen, ist in Fig. 8 dargestellt. Das Rohr besteht,

wie immer, aus einem weiten, kugelförmigen, die Tantallampe T enthaltenden Teile K und einem zylindrischen Teile Z, der in diesem Falle 22 mm weit ist und an seinem Ende die ein für allemal festgemachte, plattenförmige Nickelanode A enthält, die so befestigt ist, daß sie beim Entgasen auf helle Rotglut erhitzt werden kann.

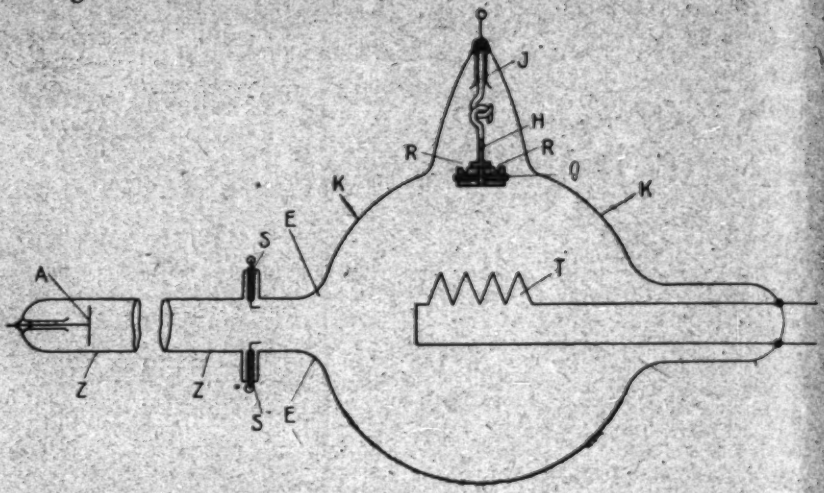


Fig. 3.

Das Eigenartige an diesem Rohre ist, daß unweit der Stelle, an welcher die Kugel in den zylindrischen Teil übergeht, in dem mit SS bezeichneten Querschnitt durch passendes Bewegen des Rohres eine lose Hilfsanode je nach Bedarf angeordnet oder entfernt werden kann. Diese Hilfsanode H ist während des Pumpprozesses an einem für diesen Zweck besonders vorgesehenen Haken I so aufgehängt, daß sie in die Lampenkugel hineinragt, also bei der Entladung mit Elektronen beworfen und so ausgeglüht werden kann. Nachdem die Röhre von der Pumpe abgeschmolzen ist, wird die lose Anode durch Neigen der Röhre vom Haken abgehängt und kann nun nach Belieben entweder, wenn die feste Anode A benutzt wird, irgendwo in der Lampenkugel liegen bleiben. Oder aber sie kann durch passendes Bewegen der Röhre so in ihren zylindrischen Teil Z hineingesenkt werden, daß die aus dünnem Platindraht bestehenden 15 mm von der Erweiterung zur Kugel angebrachten Häkchen S in die kreisförmige

Rille *R* der Hilfsanode hineingreifen. Diese Rille und der überstehende Rand der Quarzplatte *Q* gewährleisten eine gut zentrierte Stellung der Hilfsanode im Rohre *Z*. Die Entfernung der beiden Anoden beträgt dabei 595 mm.

Vorzüge und Mängel der Anordnung.

§ 21. Diese Art, die Subtraktionsmethode zu verwirklichen, teilt mit der Methode der verschiebbaren Anode nach Fig. 1 den Vorteil, daß nur eine einzige, allen Strombahnen gemeinsame Verjüngung vorhanden ist (§ 29), besitzt aber nicht manche ihrer Nachteile. Denn man ist hier durch keinerlei technische Schwierigkeiten darin beschränkt, dem zylindrischen Rohrteil eine beliebige Länge zu geben. Auch leidet man in diesem Falle nicht unter den Stäubchen, die bei der umständlichen Anordnung der Fig. 1 besonders dann in die Entladungsbahn geraten, wenn die Anode sich festklemmt und das Rohr geschüttelt werden muß, um sie fortzubewegen. Freilich gestattet es diese Methode nicht, die Messung innerhalb eines einzigen zylindrischen Teiles in drei verschiedenen Anodenstellungen auszuführen und somit die Verteilung des Gefälles zu messen. Für diesen Zweck müßte die Methode noch weiter ausgebaut werden, oder aber man müßte sie durch Messungen an zwei verschiedenen Ansätzen ähnlich der Fig. 2, S. 237, ergänzen.

Als Fehlerquelle der Anordnung nach Fig. 3 ist hingegen der Umstand hervorzuheben, daß das aus drei Platindrähten bestehende Gerüst *S S* in der Strombahn liegt und möglicherweise als Einengung oder durch seine Aufladung dahin wirkt, daß der Spannungsabfall sich erhöht. Irgendwelche Anzeichen in Form von Fluoreszenz oder Erhitzung, daß an dieser Stelle tatsächlich ein bedeutender Abfall stattfindet, fehlen aber.

Die Meßergebnisse.

§ 22. An dem ersten gegenwärtig vorliegenden Exemplar der Röhre nach Fig. 3 war die Subtraktionsmethode nicht anwendbar, weil die Einengung *E* zu eckig verläuft. Ferner, weil die vordere, durch die Platinhäkchen *S* gegebene Lage der Hilfsanode — wie in Abschnitt II erörtert — zu nahe an der Einengung liegt. Dessen ungeachtet sind die mit diesem Rohr vorgenommenen Messungen von Interesse. Denn die einfache Klemmspannungsmessung an der festen Anode in der Fern-

lage, wie sie in Tab. 4 wiedergegeben ist, liefert bei dem zurzeit benutzten Rohrexemplar das quadratische Gesetz. Es werden hier die an beiden Anoden gewonnenen Meßreihen mitgeteilt; sie sollen demnächst durch Beobachtungen an einer verbesserten Form des Rohres ergänzt werden.

VI. Die Charakteristiken.

Darstellungsweise der Diagramme.

§ 23. In den Diagrammen der Figg. 4, 5, 6 und 8 sind die an den verschiedenen vorbeschriebenen Röhren beobachteten Funktionen so dargestellt, daß auf der Abszissenachse die Logarithmen der abgelesenen (nicht der in Milliampere umgerechneten!) Stromstärke, auf der Ordinatenachse die Logarithmen der Spannung aufgetragen sind. Die Werte auf der Abszissenachse sind für alle Kurven des nämlichen Diagramms dieselben. Hingegen sind die Kurven um willkürliche Beträge parallel zur Ordinatenachse verschoben. Es kommt hier ausschließlich auf die Kurvenform und nicht auf die Lage der Kurve im Koordinatensystem an; die gewählte Anordnung war erforderlich, um zueinandergehörende Kurven in einer gemeinsamen Figur so unterbringen zu können, daß ihr Vergleich auf den ersten Blick möglich ist.

Das Gesetz.

§ 24. Die Logarithmierung der beiden Variablen wurde in der Voraussetzung ausgeführt, daß — gemäß meinen älteren Erfahrungen — die Stromstärke im allgemeinen eine lineare Funktion einer Potenz der Spannung ist

$$i = a \cdot v^n + b ,$$

wobei b bei einigermaßen bedeutenden Werten der Variablen vernachlässigt werden kann. Manchmal besitzt die Charakteristik verschiedene Zweige, die mit einem scharfen Knick ineinander übergehen, so daß einem jeden der Zweige ein anderer Wert des n entspricht.

Aus verschiedenen, bereits erwähnten Gründen ist der mit Hilfe der Subtraktionsmethode sich erforschen lassende Bereich erheblich beschränkter als der der Sondenmessung zugängliche. Es ist aber bemerkenswert, daß, soweit der enge Meßbereich es zu beurteilen gestattet, die Kurven tatsächlich sich der angegebenen Gesetzmäßigkeit fügen. Der

Exponent n jeder einzelnen Kurve ist auf zwei Dezimalen genau neben der Kurvennummer direkt über jedem einzelnen Linienzuge angegeben.

Aus meinen gesamten Erfahrungen folgt, daß dieser Exponent sich um so mehr dem Wert 2 nähert, je sorgfältiger das Vakuum hergestellt wird. Ferner, je einwandfreier die Röhrenform ist. Das heißt, für direkt gemessene, nicht durch Subtraktion korrigierte Charakteristiken wird der Wert 2 mit einer um so größeren Annäherung erreicht, einen je größeren Teil der Gesamtspannung die zylindrische Entladungsbahn aufnimmt, also — gleichen Querschnitt vorausgesetzt — je länger der zylindrische Röhrenteil ist. Unter Anwendung der Subtraktionsmethode aber ist eine um so größere Annäherung an den Wert 2 zu erwarten, je tiefer die Nahlage der Anode in dem zylindrischen Teile angeordnet ist und selbstverständlich wieder je länger dieser zylindrische Teil ist.

Diskussion der Diagramme.
Rohr Fig. 1.

§ 25. In der Fig. 4 sind die Charakteristiken des Rohres mit verschiebbarer Anode nach Fig. 1 dargestellt. Die Kurve I

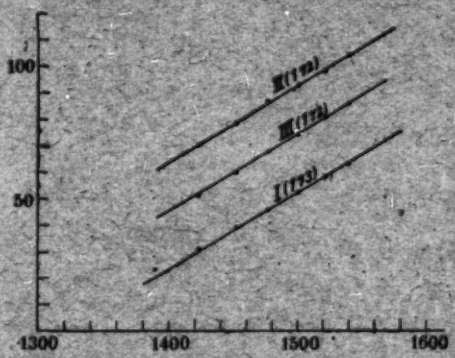


Fig. 4.

entspricht der Nahlage, II der Fernlage, III der mittleren Lage der Anode. III und II verlaufen durchweg geradlinig, während bei I entsprechend der unmittelbaren Nachbarschaft der Einengung die Punkte geringerer Stromstärken von der Geraden abweichen. Der Exponent n ist in allen drei Fällen $1_{72}-1_{78}$. Wegen der verhältnismäßig geringen Länge des Rohres dürfte eine größere, Ausführung der Subtraktion ermöglichende Genauigkeit nicht gefordert werden.

Rohr Fig. 2.

Fig. 5 bringt die Charakteristiken des Rohres mit mehreren zylindrischen Ansätzen nach Fig. 2. Es entspricht hier Kurve I der weiter entfernten, Kurve II der näher gelegenen Anode. An diesem Rohre habe ich die Subtraktion ausgeführt. Die naheliegende Anode steckt ziemlich weit im zylindrischen Teile und insoweit erscheint die Subtraktion berechtigt. Freilich weiß man nicht, ob die einzelnen Verjüngungsstellen nicht doch — ungeachtet tunlich gleicher Formgebung — Unter-

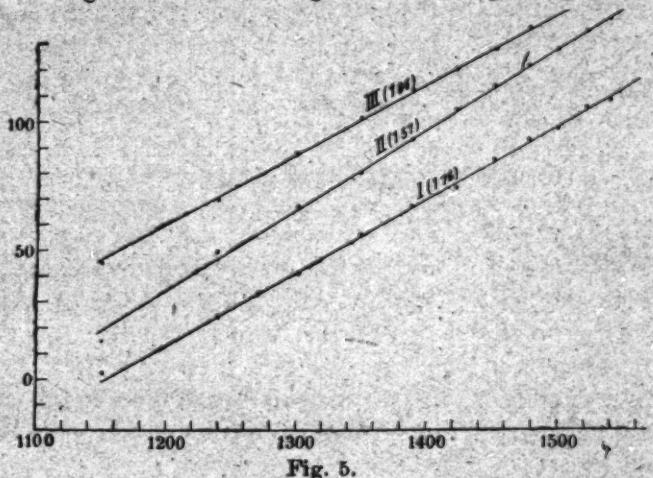


Fig. 5.

schiede im Spannungsabfall bedingen, welche die Subtraktion unzulässig machen (vgl. hierüber Abschnitt VII, § 29). Läßt man das zunächst dahingestellt sein, so sieht man, daß die durch die Subtraktionsmethode gewonnene, mit III bezeichnete Charakteristik des zylindrischen Teiles mit ihrem Exponenten von 1,86 sich erheblich mehr der zu erwartenden quadratischen Funktion nähert, als die Kurven der Fig. 4. Es sei hier wiederholt darauf hingewiesen, daß dieses Rohr schon unter Berücksichtigung neuerer Erfahrungen gebaut wurde und besonders die Verjüngung eine möglichst schlank verlaufende Form in der in Fig. 2 angedeuteten Weise erhalten hat. Das prägt sich hauptsächlich in einem verhältnismäßig geringen Spannungsabfall bei der Nahlage (vgl. § 29) aus.

Rohr Fig. 3.

In Fig. 6 ist die Charakteristik des Rohres mit einer festen und einer frei bewegten Anode nach Fig. 3 wiedergegeben.

I gibt die Charakteristik der vollen Rohrlänge, welche in diesem Falle *genau eine quadratische Funktion* ist. Die Nahlage der Anode ist bei diesem Modell, wie bereits hervorgehoben, zu wenig in den zylindrischen Röhrenteil zurückgezogen; außerdem ist die Form der Einengung eine sehr

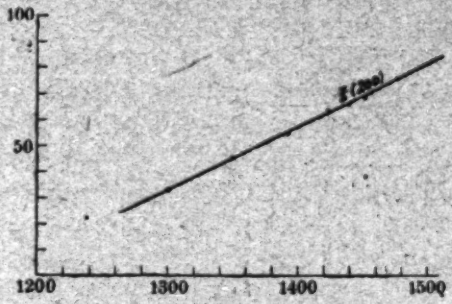


Fig. 6.

eckige. Diese beiden Umstände verhindern die Gewinnung glatt reproduzierbarer Messungen bei der Nahlage der Anode, während im Gegenteil in der Fernlage befriedigende Übereinstimmungen erzielt werden. In der Tab. 4 sind die Grenzen angegeben, zwischen denen die Meßreihen der Spannung sich zu bewegen pflegen. Von den Aufzeichnungen einer logarithmischen Charakteristik für die Nahlage ist naturgemäß abgesehen worden, folglich auch von der Anwendung der Subtraktionsmethode zwecks Gewinnung der Charakteristik des zylindrischen Teiles. Ich bin aber der Meinung, daß — geeignete Ausführung vorausgesetzt — diese Konstruktion eine besonders vorteilhafte Anwendung der Subtraktionsmethode ermöglichen wird.

VII. Der Grenzwert des Gefälles.

Vergleichende Zusammenstellung der Zahlen.

§ 26. Ich habe im Jahre 1910 (1) sowie 1914 (2) ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zusammengestellt, aus welchem hervorging, daß die für die Aufrechterhaltung einer bestimmten Strom*dichte* erforderliche Spannung von der Gestalt und Weite der Röhren unabhängig ist und sich mit fortschreitender Luftleere einem Grenzwerte zustrebt, welcher in dem mit technisch zugänglichen Mitteln herstellbaren Hochvakuum bereits mit großer Annäherung erreicht ist. Aus den damals angegebenen

Zahlen läßt sich das Gefälle berechnen, welches in dem gedachten Grenzfalle für eine bestimmte Stromstärke in den hier beschriebenen Röhren stattzufinden hätte. Es wurde seinerzeit gefunden, daß für 10 M.-A. in einem Rohre, dessen lichte Weite etwa 10,5 mm war, zwischen zwei um 80 mm voneinander entfernten Sonden ein Spannungsabfall von 405 Volt bestand. Beachtet man die lineare Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse und die von mir 1910 angegebene und experimentell bestätigte Beziehung[1]), daß bei gleicher Stromstärke das Gefälle umgekehrt proportional der lichten Weite ist, so ergibt sich zunächst, daß bei einer Stromstärke von 10 M.-A. das Gefälle in einem Rohre von 10 mm lichter Weite auf die Länge von 10 mm 405 Volt beträgt. Die Rechnung liefert ferner für die in vorliegender Arbeit benutzten lichten Weiten die in der dritten Kolonne der folgenden Tabelle B angeführten Werte des Spannungsabfalles für je 10 mm Rohrlänge. Die vierte und fünfte Kolonne enthält die entsprechenden, tatsächlich beobachteten Werte des Gefälles, wobei unter „*alt*" die zur Zeit der Fertigstellung vorliegender Veröffentlichung beobachteten Werte, unter „*neu*" die an verbesserten Röhrenformen in der Zeitspanne zwischen der Abfassung der Publikation und ihrer Korrektur gefundenen Zahlen aufgeführt sind.

Tabelle B.

Röhrtype	Lichte Weite mm	$\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ berechnet	$\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ beobachtet alt	neu
Fig. 2	18	78	94	—
„ 3	22—23	64—60	69—70	55,5
„ 1	28	60	51,5	—

Bemerkungen zu der Tabelle B.

§ 27. Es ist vor allem zu beachten, daß die Bestimmung der lichten Weite langer, von freier Hand gezogener Glasröhren von vornherein einem Fehler von etwa 5 Proz. — in ungünstigen Fällen mehr — unterworfen ist. Ferner, daß die früheren

1) Diese Beziehung ist eine einfache Folgerung aus der Tatsache, daß die Charakteristik lediglich durch die Stromdichte bestimmt ist und der anderen Tatsache, daß die Stromstärke dem Quadrat der Spannung proportional ist (§ 24).

Messungen, aus welchen die in der zweiten Kolonne angegebenen Werte berechnet wurden, vermutlich bei einem höheren Vakuum als die Messungen dieser Arbeit ausgeführt waren. Während ich gegenwärtig an von der Pumpe abgetrennten, in Luft frei aufgehängten Röhren arbeitete, sind die Werte der früheren Publikationen in Verbindung mit Luftpumpe und mit in flüssiger Luft beziehungsweise flüssigem oder festem Wasserstoff tauchendem Absorptionskohlegefäß gemacht worden, vielfach, indem die Wände der Entladungsbahn ebenfalls in flüssiger Luft gekühlt waren. Demgemäß wäre zu erwarten gewesen, daß die Spannungswerte vorliegender Arbeit bedeutend geringer ausfallen würden als diejenigen der früheren Untersuchungen. Wenn das zum Teil nicht zutrifft, so liegt es wohl an den bereits erwähnten Mängeln der ersten hier benutzten Röhrenexemplare.

Es ist beispielsweise in dem Rohr nach Fig. 2 eine Fehlerquelle darin enthalten, daß die zu den verschiedenen Anoden führenden Verjüngungsstellen nicht in genau der gleichen Form geblasen werden können und auch darin, daß man keine Gewähr dafür hat, daß die Aufladung der Glasoberfläche an jeder Verjüngungsstelle sich in der gleichen Weise ausbildet.

Ferner ist am Rohre Fig. 3 beim alten Exemplar die Anode in der Nahlage dicht an der sehr ungünstig geformten, weil steil verlaufenden Verjüngungsstelle angebracht gewesen (vgl. §§ 20 und 22), was den in § 10 erörterten Mangel bedingt. In der Tat ist an einem neuen Rohrexemplar dieser Type, bei welchem die Nahlage der Anode erheblich weiter (um 10 cm) von der diesmal sehr allmählich verlaufenden Erweiterung der Kugel entfernt war und die Entfernung der beiden Anoden 60 cm betrug, der unter „neu" wiedergegebene Wert beobachtet worden. Die an diesem neuen Rohr gefundenen Beobachtungsreihen selbst sind der bei der Korrektur nachgefügten Tab. 6 zu entnehmen. Man sieht, daß an dieser Röhrentype tatsächlich — wie erwartet — niedrigere Gefälle gemessen wurden. Diese Röhrentype verkörpert wohl die beste Art und Weise, die Subtraktionsmethode zu verwirklichen.

Vergleich der Werte der Tabelle B.

§ 28. Obwohl von einer Übereinstimmung der beobachteten Werte mit den berechneten im eigentlichen Sinne des Wortes nicht gesprochen werden kann, so ist doch bemerkenswert, daß alle beobachteten Werte in naher Umgebung um die be-

rechneten herumliegen. Vergegenwärtigt man sich ferner, daß die Versuchsbedingungen — besonders diejenigen der Herstellung des Vakuums — die im vorigen Paragraphen angeführten Unterschiede aufwiesen, daß die Meßmethoden grundverschieden waren und daß man einen Teil der in vorliegender Arbeit beobachteten Werte als durch nebensächliche Umstände (§ 10) zu hoch gegriffen bezeichnen kann, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die Subtraktionsmethoden in ihrem weiteren Ausbau das Vorhandensein des mit der Sondenmessung im Jahre 1910 und 1914 ermittelten Grenzwertes und auch die quadratische Charakteristik mit einer größeren als der bei diesen ersten Versuchen erreichten Genauigkeit zu bestätigen imstande sein werden. Die kurz vor der Korrektur vorgenommene, unter „neu" angeführte Messung sowie Tab. 6 lassen diese Vermutung gerechtfertigt erscheinen. Es wird also voraussichtlich auch mit Hilfe der Subtraktionsmethoden möglich sein, die durch den Grenzwert des Gefälles gegebene Naturkonstante als vorhanden nachzuweisen und wenigstens in erster Annäherung zu bestimmen. Insofern ist es wünschenswert, daß diese Methoden weiter ausgebaut werden, wenn ich auch nach wie vor der Ansicht bin, daß die genaue und vollständig befriedigende Bestimmung des Grenzwertes des Gefälles nicht anders als mit Hilfe der Sondenmessung in der in meinen früheren Publikationen beschriebenen Weise ausgeführt werden kann.

Spannungsabfall an Verjüngungen verschiedener Form.

§ 29. Besonders für die Beurteilung, inwiefern die Ausführung der Subtraktionsmethode an einem Rohr gemäß Fig. 3 zulässig ist, aber auch, um sich ein Urteil über die Subtraktionsmethoden überhaupt zu bilden, ist es von Interesse, auf den an Verjüngungen verschiedener Form auftretenden, von Fall zu Fall recht verschiedenen Spannungsabfall näher einzugehen.

Im allgemeinen ist der Spannungsabfall um so größer, je steiler die Übergangsstelle geformt ist. Diese Formgebung war in ausgeprägtestem Maße bei dem Rohre nach Fig. 8 in seiner ersten Ausführung verwirklicht; hier war der Spannungsabfall bis zur Nahlage der Anode bei 10 M.-A. 2970—3100 Volt. Im Gegensatze dazu war bei dem Rohre nach Fig. 2 die Gestalt der Verjüngung eine besonders günstige schlanke. Entsprechend betrug der Abfall bei 10 M.-A. nur 1980 Volt, trotz-

dem bei diesem Rohre die lichte Weite von 18 mm geringer war als diejenige des Rohres nach Fig. 3 (22—23 mm) und ferner trotzdem im Rohre nach Fig. 2 die Anode in der Nahlage erheblich weiter von der Verjüngungsstelle entfernt war (50 mm) als im Rohre nach Fig. 3 (25 mm). Der Einfluß der Formgebung ist eben sehr viel größer als derjenige der anderen, immerhin schon recht nennenswerten Abweichungen. Schließlich ist beim Rohr nach Fig. 1, das seiner Gestalt nach die Mitte zwischen den beiden vorgenannten Röhren hält, der Abfall bis zur Nahlage der Anode bei 10 M.-A. 1920 Volt, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß die lichte Weite größer und die Entfernung der Anode in der Nahlage bedeutend geringer war als bei dem Rohre nach Fig. 2.

VIII. Charakteristiken einer Hochvakuum-Ventilröhre.

Die Fragestellung.

§ 30. Im Gegensatz zu meinen, die Erkenntnis der Vorgänge in unendlicher Entfernung von der Anode innerhalb der zylindrischen Bahn anstrebenden Versuchen führen zahlreiche Arbeiten anderer Forscher Messungen zwischen Glühdraht und einer nahe ihm gegenüber gelegenen Anode aus. Es ist von Interesse, darauf einzugehen, wie die Frage der Charakteristik und der Konstanz bei solchen Anordnungen liegt, denn erst ein derartiger Einblick macht es möglich, sich ein Urteil über die hier mitgeteilten Resultate zu bilden.

Gegenwärtig scheint von vielen Seiten die Physik der Hochvakuumladung kurz und bündig dahin verstanden zu werden, daß das Dreihalbegesetz ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Vorhandensein höchsten Entlüftungsgrades sei. Und zwar gemäß den ersten Arbeiten von Langmuir unabhängig von jeder besonderen Röhren- und Elektrodenform.

Demgegenüber ist zunächst einmal — ohne auf die theoretische Berechtigung der Langmuirschen Behauptung einzugehen — an Hand der vorliegenden Literatur folgendes zu betonen. Nur in den ersten Langmuirschen Veröffentlichungen (6) sind Messungen zu finden, die an einer anderen Anordnung angestellt worden sind als an dem aus theoretischen Gründen klassischen Falle, bei welchem die Anode ein Zylinder ist, in dessen Achse der Glühdraht ausgespannt ist. Während

nun aber in diesem klassischen Falle tatsächlich auch meiner Erfahrung nach das Dreihalbegesetz sich meistens bestätigt findet, und zwar bereits bei Entlüftungsgraden, die noch bei weitem nicht dem höchsten erreichbaren Vakuum entsprechen, hat Langmuir bei einer wesentlich von der klassischen abweichenden Anordnung ein Ergebnis erhalten, welches *nicht* als Bestätigung des Dreihalbegesetzes angesprochen werden kann. Langmuir führt seine abweichende Beobachtung auf den zufälligen Mangel an genügendem Vakuum zurück. Er und seine Mitarbeiter haben aber seit jener Zeit meines Wissens andere Ergebnisse als die mit der konaxialen Anordnung erlangten nicht veröffentlicht.

Nun liegen aber die Dinge meiner Erfahrung nach so, daß, wenn man die Elektronen von der Glühkathode aus nicht entweder divergieren oder parallel verlaufen läßt, das Dreihalbegesetz durchaus nicht immer erfüllt ist. Es erscheint mir deshalb sicher unzulässig, einen jeden Mißerfolg das Dreihalbegesetz bei anderen als bei den Langmuirschen Anordnungen bestätigt zu finden, einfach damit abzutun, daß sekundäre Umstände (z. B. ungenügendes Vakuum) daran schuld seien.

Im folgenden werden Messungen mitgeteilt, aus denen sich klar ergibt, daß das Dreihalbegesetz und extremes Hochvakuum keinesfalls unbedingt miteinander verkettet sind. Es gelingt in ein und derselben Anordnung, das Dreihalbegesetz zu beobachten bei einem nicht sehr weit vorgeschrittenen Vakuum, dann aber nach Erreichung des höchsten Entlüftungsgrades eine davon recht abweichende Charakteristik. Während das quadratische Gesetz mit einer um so größeren Annäherung erfüllt ist, je höher das Vakuum, trifft das für das Dreihalbegesetz durchaus nicht bei jeder beliebigen Anordnung zu.

Die Röhre.

§ 31. Die Messungen, die ich zum Nachweis dieses Sachverhaltes hier anführen will, sind an einem Rohre gemäß Fig. 7 vorgenommen.[1]) Es ist dies ein Ventilrohr, wie es für die Verriegelung höchster Spannungen von mir in mehreren

1) Die Messungen wurden nicht besonders für den Zweck der vorliegenden Publikation ausgeführt, sondern sie geben Beobachtungen wieder, die ich im Laufe der Zeit für mehr technische Studienzwecke

Exemplaren hergestellt wurde. Der ursprüngliche Anwendungszweck des Rohres war, die Glühlampentemperatur auf einen derartigen Wert einzustellen, daß unabhängig von der Spannung stets ein vorgegebener Sättigungsstrom durch die Röhre floß. Dementsprechend mußten die Anoden in der aus der Figur ohne weiteres verständlichen Weise mit dicken, wärmeableitenden Kupferstäben und Radiatoren ausgestattet werden, um die beträchtlichen freiwerdenden Wärmemengen abführen

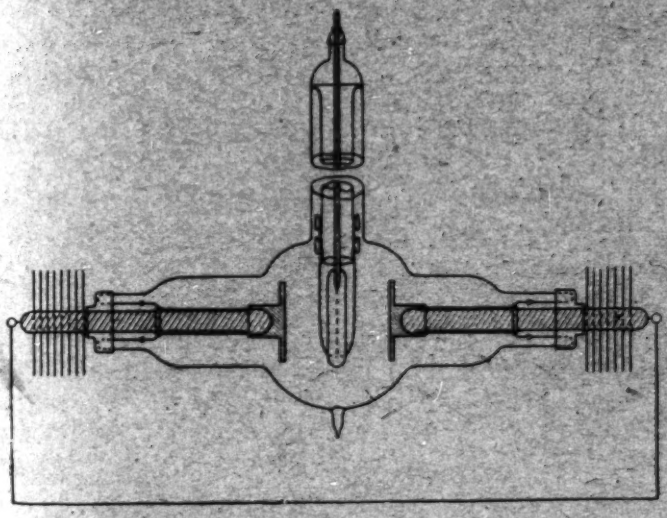


Fig. 7.

zu können. Die Anodenplatten haben einen Durchmesser von 50 mm. Die Glühdrahtwindungen liegen in der Symmetrieebene zwischen den Anoden, damit der Draht von einer statischen Beeinflussung nicht zerrissen werden kann. Deshalb ist die Glühlampe in Fig. 7 nur im Profil zu sehen. ihre Ausführung ist aber genau dieselbe wie die aus der Aufsicht Fig. 2 ersichtliche. Der Glühlampenhals ist entsprechend den hohen, zu verriegelnden Spannungen 400 mm lang. Das Rohr arbeitet vollständig befriedigend und verriegelt effektive Wechselspannungen von 80—100 Kilovolt auf die Dauer vollständig. Es ist 1500 Stunden in Betrieb gewesen, ohne daß die geringste

ausgeführt habe. Daraus erklärt sich, daß nicht immer in denselben Stromstärkegebieten gearbeitet wurde, sondern daß die Meßgebiete nur zum Teil ineinandergreifen. Für die Beurteilung der Gesetze ist das aber ohne jeden Belang.

Änderung (Zerstäubung!) aufgetreten wäre. Daraus ist zu ersehen, daß das Vakuum als ein sehr hohes bezeichnet werden kann.

Die Charakteristiken.

§ 32. Bei den Versuchen wurde der Glühdraht so hoch geheizt, daß der Sättigungsstrom weit über 100 Milliampere lag. Die mit dem Rohr an stehender Gleichspannung aufgenommenen Charakteristiken sind aus den Tabellen 5a und 5b zu ersehen. Sie sind in der nämlichen Weise wie die in Abschnitt VI behandelten Charakteristiken logarithmiert in Fig. 8

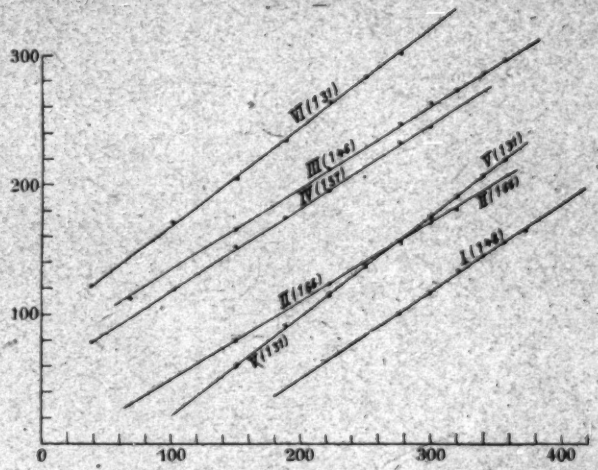


Fig. 8.

wiedergegeben. Diagramm I ist nach der ersten Evakuierung der Röhre aufgenommen, nach welcher die Röhre bereits vollständig befriedigend als Ventil arbeitete, also vom Gesichtspunkte des Kriteriums der Undurchlässigkeit des Vakuums für die Hochspannung als hochevakuiert bezeichnet werden konnte. Man sieht, daß das Dreihalbegesetz mit großer Annäherung ($n = 1{,}48$) erfüllt ist. Die absoluten Werte der Spannungen sind aber, wie aus der Tabelle entnommen werden kann, im Vergleich mit den späteren Messungen, niedrig.

Das nämliche Rohr wurde nun zum zweiten Male evakuiert, da erfahrungsgemäß nach einer wiederholten Evakuierung ein höheres Vakuum sich einzustellen pflegt. Alle übrigen Diagramme sind mit der Röhre in diesem Zustande aufgenommen. Zuerst das Diagramm II, welches ungeachtet des bedeutend besseren Vakuums mit seinem Exponenten $n = 1{,}66$ weit

mehr vom quadratischen Gesetz abweicht, als das Diagramm I. Das im Vergleich mit I höhere Vakuum ist hauptsächlich daran zu erkennen, daß bei II die der nämlichen Stromstärke entsprechenden Spannungen ungefähr das Doppelte betragen.

Diagramm III enthält die mehrere Wochen später aufgenommene Charakteristik bei höheren Stromwerten, der Exponent $n = 1{,}46$.

Mehrere Tage später wurde das Diagramm IV aufgenommen. Die absoluten Werte der Spannung sind merklich größer als im Diagramm III, wenn auch der Unterschied bedeutend geringer ist als zwischen I und III. Demnach ist das Vakuum auf keinen Fall schlechter geworden, sondern wahrscheinlich besser. Der Exponent n ist in diesem Falle aber 1,57, weicht also vom Dreihalbegesetze bedeutend mehr ab als der von dem sicher bei viel schlechterem Vakuum aufgenommenen Diagramm I und auch mehr als der des Diagramms III, obwohl auch bei letzterem das Vakuum eher schlechter als besser war.

Auffallenderweise war die unter IV gegebene Charakteristik nicht die einzige, welche beobachtet werden konnte. Es stellte sich ebenso häufig in Zeitabständen von wenigen Sekunden beim Aus- und Einschalten des Rohres eine andere Charakteristik ein, die durch die Grade V mit dem Exponenten 1,31 wiedergegeben ist. War eine der beiden Charakteristiken aber einmal eingestellt, dann konnten in beiden Fällen gleich gut übereinstimmende Meßreihen erzielt werden. Ich nehme mit großer Wahrscheinlichkeit an, daß der Unterschied der beiden Charakteristiken dadurch bedingt war, daß es bei dem Rohr Fig. 7 der Entladung freigestellt ist, verschiedene Bahnen zu wählen. Vermutlich liegt die Sache so, daß bei der einen der Charakteristiken die Entladung ziemlich direkt von der Glühlampe nach den Anoden übergeht und gar nicht oder verhältnismäßig wenig die Glaswände berührt. Bei der anderen Charakteristik nimmt die Entladung aber einen größeren Querschnitt ein, so daß sie ausgiebig die Glaswände bespült. Je nachdem, wie die Aufladung der Glaswand zufällig stattfindet, wird die eine oder die andere Charakteristik von der Entladung befolgt. Gestützt wird diese Auffassung durch einen durch die Gerade VI dargestellten Versuch, bei welchem die eine Anodenplatte entweder vollständig ohne Zuleitung gelassen oder mit der Glüh-

lampe verbunden wurde, so daß nur eine Platte als Anode wirksam war. Bei einer solchen Arbeitsweise ist es unvermeidlich, daß die Entladung ausgiebig mit der Glaswand in Berührung kommt. Es stellt sich hier tatsächlich für den Exponenten genau der nämliche Wert ein wie bei V, nämlich 1,31.

Allgemeine Folgerung.

§ 33. Daraus ergibt sich in absolut einwandfreier Weise, daß im nämlichen, wenn auch extrem hohen Vakuum je nach der Beschaffenheit der Entladungsbahn ganz verschiedene Gesetzmäßigkeiten bestehen können. Man erkennt auch hieraus, wie berechtigt das in meinen Arbeiten verfolgte Bestreben ist, nur in „unendlicher Entfernung von den Elektroden" und nur in einer definierten zylindrischen Bahn zu beobachten. Es ist in der Tat nicht möglich, den Gegenstand der Untersuchung anders als in dieser Weise eindeutig zu definieren.

Bedenkt man ferner, daß das Dreihalbegesetz mit größter Annäherung im Falle I, also bei verhältnismäßig schlechtestem Vakuum erfüllt war, so sieht man ein: *Das Dreihalbegesetz ist keineswegs ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Bestehen höchster Entlüftungsgrade.* Es gibt eine ganze Anzahl von Werten für den Exponenten der Spannung, die sich in Wirklichkeit zum mindesten nicht weniger häufig als das Dreihalbegesetz einzustellen pflegen. Nur ein besonderer Fall, in welchem meine Erfahrungen aber nicht weit genug reichen, könnte hiervon ausgenommen sein. Nämlich die Langmuirsche konaxiale Anordnung, als deren Spezialausführung vielleicht der Versuch von Germershausen (11) angesehen werden kann, bei welchem die Elektronenbahnen parallel verlaufen. Für derartige Anordnungen geht meine Kenntnis nur so weit, daß ich mit Bestimmtheit angeben kann, daß hier das Dreihalbegesetz schon bei verhältnismäßig hohem Gasdrucke in großer Annäherung besteht.

IX. Isolatoren und Hochvakuumentladung.[1])

Bekannte Beobachtungen.

§ 34. Dem Verhalten von Isolatoren unter dem Aufprall von Elektronen im Hochvakuum ist bisher wenig Beachtung

1) Es ist für alle geschilderten Beobachtungen unerläßliche Bedingung, daß die Entladungsbahn von Isolatoren umgeben sei, Metallbelege — beispielsweise solche, die sich durch Zerstäubungen zu bilden pflegen — bringen außerordentliche Fehlerquellen mit sich und stören die Beobachtungen aufs empfindlichste.

geschenkt worden. Tatsächlich kann in jedem, noch so hoch evakuierten Glühkathodenrohr, wenn es die geometrische Anordnung nur irgendwie zuläßt, die Glaswand durch Elektronenaufprall nicht nur zur intensiven grünen Fluoreszenz erregt, sondern auch bis auf Schmelztemperatur erhitzt werden. Die nämliche Glaswand fluoresziert rot (1), nach Ermüdung blauviolett, wenn sie mit dem raumladungslosen Entladungsgebilde in Berührung gebracht wird. Es tritt auch dabei eine intensive Erhitzung des Glases ein. Das Hochvakuum verhindert es also keinesfalls, daß der Isolator die ihm zugeführte Ladung irgendwie abgibt, ganz ohne daß eine Ionisation sich bei dem Ausgleich der Ladungen beteiligen würde. Ich habe seit Anfang 1914 des öfteren (12, 13, 14) auf diesen Umstand hingewiesen und darauf aufmerksam gemacht, daß eine Aufladung der Glaswand keinesfalls an der Abwesenheit der grünen Fluoreszenz gegenüber dem Brennfleck der Hochvakuum-Röntgenröhren verantwortlich gemacht werden kann, wie das wiederholt von Coolidge und seinen Mitarbeitern mit einer gewissen Selbstverständlichkeit behauptet wird.[1])

Ein neuer Versuch.

§ 35. Ein hübscher Versuch, der es beweist, daß selbst der beste, hitzebeständige Isolator, nämlich Quarz, sich nicht annähernd auf ein Potential aufladen läßt, welches den weiteren Aufprall der Elektronen verhindern würde, ist in Fig. 9 dargestellt. Es ist dies nichts anderes als eine Röntgenröhre meiner Konstruktion, bei welcher an Stelle der Antikathode eine auf langem Quarzstiel isoliert befestigte Quarzplatte an-

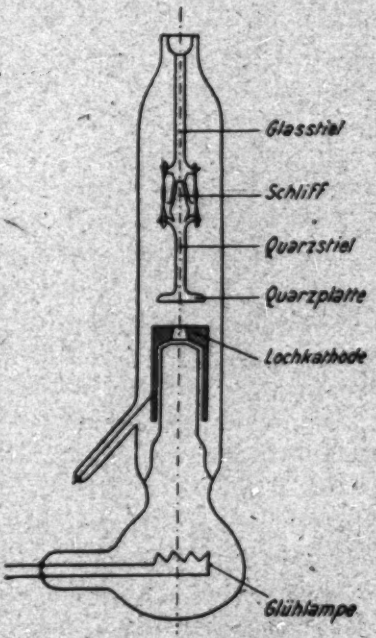


Fig. 9.

1) Auf diesem Wege ist von mir Anfang 1914 zum ersten Male auf das Vorhandensein einer Doppelschicht im Brennfleck von Röntgenröhren geschlossen worden.

geordnet ist. Es ist selbst im höchsten herstellbaren Vakuum möglich, diese Quarzplatte auf jede beliebige Temperatur zu erhitzen, wenn zwischen Glühlampe G und Lochkathode K eine Entladung eingeleitet wird. Dem bestehenden Sprachgebrauch nach würde man die Erscheinung so beschreiben, daß in der Öffnung der Lochkathode ein Striktionskathodenstrahl entsteht, welcher auf den Quarz aufprallt. Daß aber die Quarzplatte sich nicht im ersten Moment der Entladung auflädt und dann die nachfolgenden Elektronen abstößt, das ist eine Tatsache, die nur durch die Annahme einer positiven, die negative Aufladung ausgleichenden Ladung erklärt werden kann.

Die Beziehung zum Hauptthema.

§ 36. Jedenfalls verdienen die in der vorliegenden Arbeit behandelten Erscheinungen im zylindrischen Teile von Glasröhren auch von dem Gesichtspunkte des Verhaltens der Isolatoren im Hochvakuum aus behandelt zu werden. Tatsächlich bringt der Versuch mit der Quarzplatte den Beobachter auf den Gedankengang (§ 4), demzufolge Langmuir meinen Versuchen ein hinreichendes Vakuum absprechen wollte. Und es sind sicherlich nicht die Gasreste dafür verantwortlich, wenn die von mir verwendeten engen Glasröhren sich selbst im Bade flüssiger Luft, bei deren Temperatur sie besonders gut isolieren, nicht aufladen und einen ferneren Entladungsdurchgang nicht versperren, wenn ferner in der Hochvakuumröntgenröhre eine Aufladung der Glaskugel und in dem Versuch mit der Quarzplatte eine Aufladung der letzteren nicht stattfindet.

X. Zusammenfassung.

A. Es wird für die Untersuchung der Hochvakuumentladung in zylindrischen Entladungsbahnen an Stelle der früher von mir benutzten Sondenmessung die Subtraktionsmethode in drei verschiedenen konstruktiven Ausführungen an von der Pumpe abgeschmolzenen Röhren angewandt. Nach gegenwärtigem Stande der Ergebnisse kann das Gesetz der linearen Verteilung des Potentialgefälles längs der Entladungsachse als durch die Subtraktionsmethode neu erwiesen angesehen werden.

B. Die neuen Versuche ergeben eine erhebliche Annäherung an das quadratische Gesetz, obwohl die Apparate für die Aufnahme ganz genauer Charakteristiken nach der Subtraktions-

methode noch verbessert werden müssen. Bei einer der Versuchsröhren liefert aber bereits *die direkt an den Röhrenklemmen vorgenommene Messung der Spannung das quadratische Gesetz.*

C. Durch Temperaturmessungen an den Anoden wird das Vorhandensein einer absolut ungeordneten Bewegung und einer Elektrizitätsleitung nach Art der metallischen innerhalb des Entladungsgebildes erneut nachgewiesen. Außerdem folgt aus diesen Messungen in unabhängiger Weise ein Rückschluß auf die Raumladungsfreiheit und somit auf die lineare Verteilung des Potentialgefälles im Entladungsgebilde.[1])

D. Durch Versuche an einem besonderen Hochvakuumventil wird erwiesen, daß dem Dreihalbegesetz nur eine beschränkte Gültigkeit zukommt und es keinesfalls im allgemeinen Falle ein notwendiges, um so weniger ein hinreichendes Kriterium für das Bestehen höchster Vakua ist. Es werden Versuche mitgeteilt, bei denen in einem verhältnismäßig schlechten Vakuum das Dreihalbegesetz gilt, bei einer vollkommeneren Entlüftung des nämlichen Rohres aber sich eine erhebliche Abweichung von ihm einstellt.

F. Um die Tatsache, daß durch enge, lange Rohre selbst im höchsten Vakuum mit Spannungen von der Größenordnung von nur 1000 Volt erhebliche Stromstärken durchgeschickt werden können, verständlich zu machen, wird auf anderweitige Erfahrungen und einen neuen, besonderen Versuch hingewiesen, denen zufolge selbst die besten Isolatoren (Quarz, in flüssiger Luft gekühltes Glas) unter dem Anprall der Elektronen im Hochvakuum sich nicht annähernd auf das der Elektronengeschwindigkeit entsprechende Potential aufladen.

G. Die Versuche verdienen es, an den Erfahrungen gemäß umkonstruierten Röhren hauptsächlich in der Richtung fortgesetzt zu werden, ob mit Hilfe der Subtraktionsmethoden das quadratische Gesetz mit voller Genauigkeit zuverlässig reproduzierbar gezeigt werden kann. Besonders aber, ob in von der Pumpe abgeschmolzenen freihängenden Röhren ein

1) Diese Tatsachen habe ich in meinen früheren Arbeiten mit den Worten zusammengefaßt, daß selbst im höchsten Vakuum ein Entladungsgebilde bestehen kann, das alle Merkmale der bei höherer Gasdichte bekannten positiven Lichtsäule trägt.

genügendes Vakuum verwirklicht werden kann, um dieses Gesetz sowie den in meinen früheren Arbeiten mit Hilfe von Sondenmessungen ermittelten Grenzwert des Gefälles mit noch größerer Annäherung wiederzufinden.

XI. Tabellen.

In den folgenden Tabellen werden die Versuchsergebnisse des öfteren doppelt wiedergegeben, wobei die zusammengehörenden Reihen mit der gleichen Zahl, aber entsprechend mit dem Buchstaben a oder b bezeichnet sind. Die mit a bezeichneten Reihen enthalten die Ablesungen genau in derselben Reihenfolge, in welcher sie gewonnen wurden, damit man Einblick habe in die jedesmal erzielte Übereinstimmung. Die Reihen unter b geben aber die in Milliamperes und Volts umgerechneten Ablesungen in der Reihenfolge der wachsenden Zahlen.

Abgewichen von diesem System wurde nur in wenigen Fällen, so im Falle von Tab. 4a und 4b, welche die Werte enthält, zwischen denen die hier wenig konstanten Beobachtungsreihen zu schwanken pflegten.

Tabelle 1a.

Rohr mit verschiebbarer Anode.

Hint. Stellung Anfangsmssung		Vordere Stellung		Mittlere Stellung		Hintere Stellung Schlußmessung	
i	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*
100	149	100	102	60	93	60	110,5
60	110	60	78	70	101,5	70	120,5
70	121	70	84	80	109,5	80	130,5
80	130	80	90	90	118	90	140,5
90	140	90	96,5	100	125,5	100	149,5
100	149	100	102	60	93,5	60	110,5
60	110	60	78	70	101	70	120,5
70	120	70	84	80	109	80	130,8
80	130	80	90	90	118	90	140,5
90	140	90	96	100	125,5	100	149,5
100	149	100	102	110	133	110	158
110	157	110	108,5	120	140	120	166,5
120	165,5	120	113,5	100	125	20	86
100	147	100	100	20	80	30	96
		20	73	30	88,5	40	102
		30	82,5	40	91	50	100
		40	65	50	103	60	110
		50	83	60	93	70	121
		60	93,5	70	102	100	149,5
		70	84	100	126		
		100	102				

Tabelle 1b.

Milliampere	Vordere Stellung Volt	Mittlere Stellung Volt	Hintere Stellung Volt
10,8	2070	2460	2920
12,3	2250	2680	3210
14,4	2370	2900	3450
16,2	2550	3150	3700
18,0	2700	3320	3950
19,8	2870	3520	4160
21,6	3000	3710	4370

Diese Tabelle enthält die Umrechnung der unter 1a verzeichneten Werte außer denjenigen, welche der Stromablesung 50 sowie kleineren Stromstärken entsprechen, weil bei diesen geringeren Stromstärken andere labile, hier nicht interessierende Kurvenäste bestehen.

Tabelle 2.

Rohr mit verschiebbarer Anode,
Nachweis der linearen Verteilung des Potentialgefälles
aus der Tabelle 1a.

i	$B - A$ v	$A + \frac{B-A}{2}$ (= C berechnet) v	C (beobachtet) v
100	47	125,3	125
60	32,5	94,0	93
70	36,5	102,2	101,5
80	40,5	110,3	109,5
90	44	118,7	118
110	48,5	157,3	158
120	53	166,5	166,5

Die *erste* Kolonne enthält die Stromablesung; die *zweite* die Differenz $B - A$ der der betreffenden Stromstärke entsprechenden Spannungsablesungen in der hinteren und vorderen Lage; die *dritte* die Spannung in der vorderen Lage, vermehrt um die Hälfte der gedachten Differenz, also $A + \frac{B-A}{2}$, die *vierte* schließlich die Spannung C, welche in der mittleren Lage der Anode beobachtet wurde.

Tabelle 3a.

Rohr mit verschiedenen Anodenansätzen gemäß Fig. 2.

Kürzerer Ansatz		Längerer Ansatz	
i	v	i	v
30	30	80	105
40	35	90	113
50	40	100	118
60	45	110	124
70	49,5	80	105
80	54	70	97
90	58	60	88,5
100	62	50	80
110	66	40	70
120	69	30	60
80	54	20	49
30	30	80	105
40	35	100	118
50	40	20	49
60	45	30	60
70	49,5	40	70
80	54	50	80
30	30	60	90
20	25	70	97,5
80	54	80	105,5
		90	113
		100	118
		110	127
		120	130
		80	105
		90	112,5
		80	105

Tabelle 3b.

Umrechnung von 3a.

Milliampere	Kürzerer Ansatz Volt	Längerer Ansatz Volt	Differenz Volt
3,3	1060	2150	1090
5,0	1320	2640	1320
6,7	1540	3080	1540
8,3	1760	3510	1750
10,0	1980	3910	1930
11,7	2180	4270	2090
13,4	2380	4640	2260
15,0	2550	4960	2410
16,7	2720	5200	
18,4	2900	5590	
20,0	3040	5710	

Die Differenzen der drei letzten Zahlen sind infolge der jedenfalls durch die große Stromstärke verursachten großen Erhitzung nicht mehr gut brauchbar.

Tabelle 4a.

Rohr mit zwei Anoden gemäß Fig. 3.

Gesamtlänge mit fester Anode		Entfernbare Anode (in Nahlage)	
i	v	i	v
70	112	30	labil
80	119	40	40—43
90	126,5	60	43—45
70	112	70	47—49
60	104	80	48—51
50	95	90	51—53
40	85		
30	77,5		
50	96		
60	104		
70	113		
80	119		
90	127		
80	119		
40	85,5		
80	119		
70	112		
60	104		
50	96		
40	86		
80	119		
90	127		
80	119,5		

Tabelle 4b.

(Entspricht Tab. 4a umgerechnet.)

Milliampere	Gesamtlänge mit fester Anode Volt	Entfernbare Anode in Nahlage Volt	Differenzen Volt
5,0	5350	labil	—
6,7	5900	2790—2820	3080—3110
8,3	6600	2790—2970	3630—3810
10,0	7190	2970—3100	4090—4220
11,7	7800	3270—3380	4420—4530
13,3	8150	3350—3520	4630—4800
15,0	8750	3520—3680	5070—5230

Tabelle 5a.

Die Beobachtungsreihen dieser Tabelle sind übereinstimmend mit den Kurven des Diagramms Fig. 8 numeriert.

I		II		III		IV		V		VI	
i	v	i	v	i	v	i	v	i	v	i	v
90	64	90	130	130	155	60	89	80	47	80	92
100	68	50	91	110	139	50	80	60	38	70	83
		70	111	90	123	40	69	70	42,5	60	74
110	73	90	129	70	105	80	107	80	47	30	43,5
		110	144	50	85	90	115	90	51	40	55
120	77	130	159	130	155	70	98	100	56	50	65
130	81	30	67	120	148	60	89	110	60	60	74
140	84	50	90	100	132	90	115	120	64,5	70	83
80	labil	110	145	60	95	70	98	130	68	80	92
100	68	100	137	70	105	40	69	110	60	30	44
80	labil					90	115	100	55,5	40	55
140	84					100	122	60	38	50	64,5
130	80					90	115	70	42,5	60	74
120	76					70	98	80	47	70	84
110	72					40	69	90	51	80	92
100	67					30	57	110	60	90	101
90	63					20	45	100	55,5	80	92
						60	89	120	64,5	50	64
						80	107	130	68	30	44
						90	115	60	38	20	33
						100	121	50	33		
						Nach		41	29		
						längerer		60	38		
						Belastung		120	64,5		
						mit 100:					
						90	130				

Tabelle 5b.

(Umrechnung von 5a.)

I		II		III		IV		V		VI	
M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.
15,0	845	8,3	1200	20,9	1740	11,3	1420	28,3	1040	17,0	1380
16,7	898	11,7	1460	26,0	1950	17,0	1790	34,0	1200	22,7	1730
18,4	963	15,0	1700	29,2	2150	22,7	2170	39,7	1340	28,3	2040
20,1	1020	16,7	1810	37,5	2520	28,3	2520	45,3	1480	34,0	2330
21,7	1070	18,4	1900	41,7	2710	34,0	2800	51,0	1610	39,7	2650
23,4	1110			45,9	2850	39,7	3090	56,7	1750	45,3	2900
				50,0	3060	45,3	3370	62,3	1890	51,0	3180
				54,2	3180	51,0	3630	68,0	2040		
						56,7	3850	73,7	2140		

Tabelle 6.

(Bei den Korrekturen nachgetragen, vgl. § 26 und 27.)

Rohr mit zwei Anoden gemäß Fig. 3, verbesserte Ausführung.

Milliampere	Gesamtlänge mit fester Anode Volt	Entfernbare Anode in Nahlage Volt	Differenzen Volt
5,00	4820	3000	1820
6,67	4640	2030	2610
8,35	5220	2260	2960
10,00	5740	2410	3330
11,70	6250	2590	3660
13,38	6750	2790	3960
15,00	7250	3000	4250
16,70	7710	3200	4510
18,40	8150	3370	4780
20,00	8620	3550	5070
21,70	8980	3700	5280

Literaturverzeichnis.

1. J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **32.** S. 673–738. 1910.
2. J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **43.** S. 24—46. 1914.
3. F. Soddy, Phys. Zeitschr. **9.** S. 1. 1908.
4. Lilienfeld, ebenda, **9.** S. 193. 1908.
5. Lilienfeld u. Rosenthal, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. 18. 4. S. 256—261. 1912; vgl. auch D.R.P. 256534 (1911).
6. Langmuir, Physic. Review (2) **2.** S. 450. 1913.
7. Langmuir, Phys. Zeitschr. **15.** S. 348. 1914.
8. Lilienfeld, Physic. Review **3.** S. 364—365. 1914.
9. Lilienfeld, Phys. Zeitschr. **15.** S. 744—746. 1914.
10. Lilienfeld, Ber. d. math.-phys. Klasse d. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, **64.** S. 420ff. 1912.
11. Germershausen, Ann. d. Phys. **51.** S. 705ff., 847ff. 1916.
12. Lilienfeld, Sächs. Ges. d. Wiss. **66.** S. 76—79. Leipzig, Febr. 1914.
13. Lilienfeld, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **23.** S. 383 1915.
14. Lilienfeld, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. **69.** S. 45—56. Leipzig 1917.

(Eingegangen 11. August 1919.)

2. *Die Dampfspannung des festen Broms*[1]; *von Teófilo Isnardi.*

(Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans.)

§ 1. Im Laufe einer Untersuchung über die Dissoziation des Broms bekam ich den Verdacht, daß die von Ramsay und Young gemessenen Werte der Dampfspannung des festen Broms nicht richtig seien, sondern daß die wahren Werte größer sein müßten.

Deshalb beschloß ich, in einer besonderen Arbeit diese Frage zu studieren.

Über die Dampfspannung des Broms bestehen, soviel ich weiß, drei experimentelle Arbeiten.

Roozeboom[2]) hat 1884 die Dampfspannung des flüssigen Broms zwischen 0° und 60°, d. h. also bis zum Siedepunkt gemessen. Die von ihm gefundenen Werte finden sich in der weiter unten gezeichneten Kurve (Fig. 3); sie wurde 1886 von Ramsay und Young[3]) genauer bestimmt, deren Angaben bis heute als richtig gelten.

Aus ihren Beobachtungen, die sich nur bis auf einige Grade unter den Schmelzpunkt des Broms erstrecken, hat Tsuruta[4]) thermodynamisch die Temperatur des Tripelpunktes (−7,1°) und die Sublimationswärme berechnet. Die nach seinen Daten (d. h. also nach den Beobachtungen von Ramsay und Young) ermittelte Dampfspannungskurve ist auch in unsere Fig. 3 aufgenommen und bis −21° verlängert worden unter der Annahme, daß sie einer Beziehung der Form

$$\log p = \frac{a}{T} b \log T + c \tag{1}$$

1) Vgl. auch Contribución al estudio de las ciencias. Univ. Nacional de La Plata, 1. S. 419. 1916.

2) C. W. B. Roozeboom, Rec. Trat. Chim. Pays Bas, 3. S. 29, 59, 73, 84. 1884.

3) W. Ramsay u. S. Young, Journ. Chem. Soc. 49. S. 453. 1886. Die Beschreibung der Methode befindet sich ibid. 47. S. 48. 1885.

4) K. Tsuruta, Phys. Zeitschr. 1. S. 417. 1900.

genügt, die sich aus der Clausiusschen Gleichung unter der Voraussetzung konstanter spezifischer Wärmen ableitet.

Die neueste experimentelle Arbeit über die Dampfspannung des Broms stammt von Cl. und M. Cuthbertson[1]); sie gingen bei ihren Beobachtungen bis $-80{,}0^0$ hinunter.

Ihre Methode war eine optische. Mittels des Jaminschen Differentialrefraktometers wurde der Brechungsexponent n des Dampfes bestimmt und die Dichte d nach der Formel

$$\frac{n-1}{d} = \text{const}$$

berechnet. Sie bestimmten die Konstante dieser Beziehung, indem sie die Dampfspannung für den Schmelzpunkt des Broms ($p = 44{,}5$ mm Hg) gemäß den Messungen von Ramsay und Young als richtig annahmen. Sie haben in Wahrheit also nur relative Messungen gemacht. Diese sind, wie wir sehen werden, sehr gut, fallen aber alle zu klein aus, weil der Dampfdruck bei der Schmelztemperatur von Ramsay und Young zu niedrig gemessen worden ist.

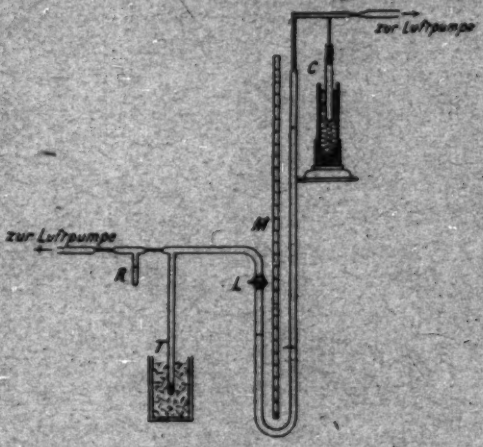


Fig. 1.

Die Werte dieser Beobachtungen finden sich auch in unserer Fig. 3 eingezeichnet und zeigen, daß dieselben in dem Intervalle, in welchem Ramsay und Young gemessen haben, größer sind als die Zahlen dieser Forscher.

Wegen der erwähnten Abweichungen schien es mir von Interesse, die Dampfspannung des Broms von Neuem zu messen, und zwar tat ich das nach zwei verschiedenen Methoden.

§ 2. *Erste Methode.* Der eine Schenkel eines Ölmanometers *M* (Fig. 1) befand sich in Verbindung mit dem Glasrohr *T*, welches mit Brom der Firma Poulenc beschickt war.

1) Cl. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. (A) 85. S. 306. 1911.

Von dort gelangt man zu dem mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllten Gefäß *R*, das zur Absorption von Wasserdampf diente, und weiter zur Luftpumpe. Zwischen dem Manometer *M* und dem Rohre *T* war ein gut schließender Hahn *L* eingeschaltet.

Der andere Manometerschenkel von über 1 m Höhe war in Verbindung mit einem Rohre *C* aus schwer schmelzbarem Glase, in dem sich Kokusnußkohle befand; dieses Rohr konnte zur Absorption der letzten Luftreste mittels flüssiger Luft abgekühlt werden.

Bei der Konstruktion des Manometers wurde die im Öl befindliche Luft durch vorsichtiges Erwärmen unter gleichzeitigem Pumpen entfernt. Die letzten Reste wurden von der Kohle absorbiert.

Zur Messung wurde das mit Brom beschickte Rohr in eine Kältemischung getaucht und im Gleichgewichtszustand das Manometer mittels des Maßstabes *M* abgelesen.

Vorher war der ganze Apparat evakuiert worden, während das Rohr *T* sich in flüssiger Luft befand.

Während der ganzen Dauer der Messungen blieb das Rohr mit Kokusnußkohle in flüssiger Luft.

Nach jeder Messung überzeugte ich mich durch Kondensation des Broms mit flüssiger Luft, daß sich im Apparat keine Luft befand.

Nachträglich wurde das spezifische Gewicht des Öls durch Wägung mit dem Pyknometer bestimmt, und zwar wurden aus beiden Manometerschenkeln Proben entnommen, weil auf der linken Seite das Öl ein wenig Brom absorbiert hatte; jedoch gaben beide Bestimmungen merklich dasselbe Resultat.

Die benutzten eutektischen Kältemischungen waren die folgenden: 1. Eis und NaCl, 2. Eis und NH_4Cl, 3. Eis und KCl, 4. Eis und Wasser; sie wurden in wärmeisoliertem Gefäß angesetzt und zwar in so großer Menge, daß die Temperatur eine Stunde lang konstant blieb.

Die Temperaturen dieser Mischungen wurden mit einem von der physikalisch-technischen Reichsanstalt geeichten Platinwiderstandsthermometer gemessen, welches vorher bei 0° und 100° kontrolliert worden war.

Man erhielt so die Temperaturen:

1. Eis und NaCl $-21{,}1^0$
2. Eis und NH_4Cl $-15{,}5^0$
3. Eis und KCl $-10{,}9^0$
4. Eis und H_2O $0{,}0^0$

Die Temperaturen der Mischungen 2. und 3. weichen ein wenig von den Angaben in den Tabellen von Landolt-Börnstein ($-15{,}8^0$ bzw. $-11{,}1^0$) ab.

Zweite Methode. Die zweite, mir von Hrn. Prof. Gans vorgeschlagene Meßmethode war die folgende. Ein Ballon B (Fig. 2) von mehr als 1 Liter Inhalt befand sich unter Zwischenschaltung eines mit $CaCl_2$ gefüllten Trockenrohres S in Verbindung mit dem Rohre T, welches 1—2 g Brom enthielt. Auf der anderen Seite kommunizierte der Ballon mit einem kleinen Kondensationsrohr C von 3—4 cm³ Inhalt und mit der Pumpe.

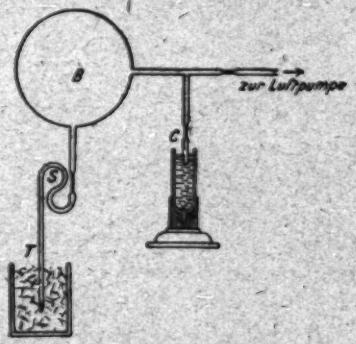


Fig. 2.

Zuerst wurde der Apparat vollkommen evakuiert, während das Rohr T mit dem Brom sich in flüssiger Luft befand, und dann die Verbindung mit der Pumpe an der Lampe zugeschmolzen. Darauf tauchte man das Rohr T in eine der oben erwähnten Kältemischungen und wartete eine Stunde.

Nach Ablauf dieser Zeit wurde die Verbindung zwischen dem Ballon und dem Trockenrohr zugeschmolzen und die Temperatur der Umgebung gemessen.

Dann kondensierte man mittels flüssiger Luft alles Brom im Kondensationsrohr C und schmolz dieses ab.

Die Brommenge in C bestimmte man schließlich durch Wägung, das Volumen des Ballons durch Auswägen mit Wasser.

Kennt man die Masse des Broms sowie sein Molekulargewicht, also auch die Anzahl Mole n, die im Volumen V des Ballons bei der absoluten Temperatur T der Umgebung enthalten waren, so berechnet man den Druck (die Dampfspannung) nach dem Gasgesetz $pV = n\,R\,T$ mit $R = 0{,}08207$.[1]) Dazu

1) W. Nernst, Theor. Chemie, 7. Aufl. S. 42.

ist man berechtigt nach den Untersuchungen von Perman und Atkinson[1]), welche die Dichte des Broms bis 300° C normal fanden.

Das Atomgewicht wurde zu 79,92 angenommen.[2])

§ 8. *Resultate.* Die Ergebnisse der Messungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1.

Temp.	Dampfspannung in mm Hg		Angenommener Wert in mm Hg
	1. Meth.	2. Meth.	
− 21,1°	18,06	15,867	
		15,682	15,76[3])
		15,716	
− 15,5	24,93	24,97	24,95
− 10,9	35,49	35,29	35,37[4])
0	65,82	65,84	65,83

Die ersten drei Werte sind Dampfspannungen des festen Broms. Aus ihnen berechnen sich die Konstanten der Formel (1)

$$\log p = \frac{a}{T} + b \log T + c \tag{1}$$

zu

$$a = -7109{,}142;\ b = -43{,}3319^{5});\ c = 183{,}46929,$$

wenn man p in *mm* Hg annimmt und log den Logarithmus zur Basis 10 bedeutet.

1) Perman u. Atkinson, Proc. Roy. Soc. **48**. S. 45; **66**. S. 10. 1900.

2) Abegg, Handb. d. anorg. Chemie, 4, 2. S. 215.

3) Der nach der ersten Methode erhaltene Wert war sicherlich falsch und wurde deshalb beim Mittel nicht berücksichtigt.

4) Der angenommene Wert wurde näher an der nach der zweiten Methode erhaltenen Zahl gewählt.

5) Der Koeffizient b müßte eigentlich gleich der Differenz der Molekularwärmen des festen und dampfförmigen Broms, dividiert durch die Gaskonstante $R = 1{,}985$ cal sein. Der gefundene Wert weicht sehr vom theoretischen ab, aber das hat nur äußerst geringen Einfluß auf die Kurvenform, weil der Term mit b nur eine kleine Korrektion bedeutet (Änderung der Sublimationswärme mit der Temperatur). Nimmt man $b = 0$ an, und berechnet man a und c so, daß sie den Beobachtungen bei − 21,1° und bei − 10,9° genügen, so wäre der für $t = -15{,}5°$ berechnete p-Wert nur um 0,1 mm kleiner als der gemessene, und der für $t = -41{,}3°$ wäre nur um 0,05 mm größer als der, welcher sich mit den im Text angegebenen Konstanten a, b, c ergibt.

Formel (1) ist auch mit den obigen Konstanten in die Fig 3 eingezeichnet, und zwar sind die beobachteten Punkte durch ein Kreuz markiert. Wie man sieht, stimmt die bis $-41{,}3^0$ extrapolierte Kurve in ihrem extrapolierten Teil gut mit den Beobachtungen von Cuthbertson, aber nicht mit der Ramsay-Youngschen Kurve überein.

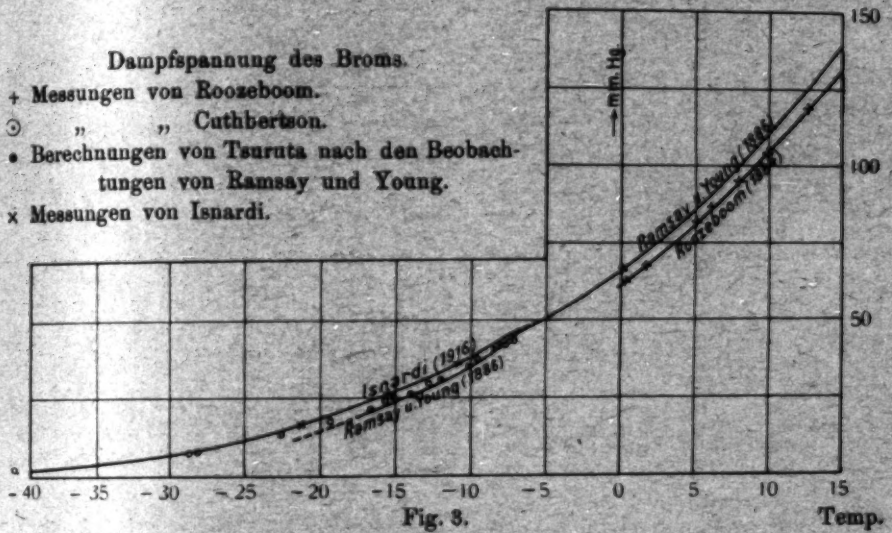


Fig. 3.

Tsuruta berechnete nach den Ramsay-Youngschen Werten die Dampfspannung des Broms bei 0^0 und fand $p = 66{,}4$ mm, während der von mir gemessene Wert um 1 Proz. niedriger ist.

Mittels der oben angegebenen Konstanten a, b, c haben wir folgende Tabelle der Dampfspannung des festen Broms berechnet (vgl. auch Fig. 3).

Tabelle 2.

t in ° C.	p in mm Hg		t in ° C.	p in mm Hg	
	Isnardi	Ramsay u. Young		Isnardi	Ramsay u. Young
− 7,32	46,2	—	− 15,5	24,95	—
− 8,0	43,5	42,0	− 16.0	23,8	20,8
− 10,0	37,5	35,5	− 18,0	20,4	—
− 10,9	35,37	—	− 20,0	17,4	—
− 12,0	32,6	29,8	− 21,1	15,75	12,9 (extrapol.)
− 14,0	28,0	24,8	− 25,0	11.2	—

§ 4. *Der Tripelpunkt.* Tsuruta berechnete mittels der Ramsay-Youngschen Werte die Schmelztemperatur, d. h. die Temperatur des Tripelpunktes zu $-7{,}1^0$. Für diese Temperatur ist nach der von ihm gezeichneten Kurve die Dampfspannung

$$t = -7{,}1^0;\ p = 45{,}5\ \text{mm}.$$

Ramsay und Young[1]) haben für den Schmelzpunkt $p = 44{,}5$ mm gefunden.

Die direkt gemessenen Werte der Schmelztemperatur des Broms sind aber im allgemeinen etwas niedriger gefunden worden, als der Wert von Tsuruta. So fand Regnault[2]) $-7{,}32^0$; Philipp[3]), van der Plaats[4]) und Terwogt[5]) $-7{,}3^0$. (Schon vorher hatte Pierre Zahlen zwischen $-7{,}5^0$ und -8^0 gefunden.)

Wir können also als Temperatur des Tripelpunktes den Wert

$$t = -7{,}3^0$$

annehmen und mit ihm aus unserer Formel die ihm entsprechende Dampfspannung berechnen. So finden wir

$$p = 46{,}4\ \text{mm Hg},$$

ein Wert, der um etwas mehr als 1,5 Proz. von dem von Tsuruta berechneten abweicht.

Unsere Formel gibt für $t = -7{,}3^0$ den Wert

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{-7{,}3^0} = 3{,}202\ \text{mm Hg}, \tag{2}$$

während Tsuruta 3,7 mm findet.

Für andere Temperaturen gilt

$$\frac{dp}{dT} = p\left(\frac{b}{T} - \frac{a}{0{,}43425\,T^2}\right), \tag{3}$$

wo a und b die oben angegebenen Konstanten bedeuten.

---

1) Ramsay u. Young, Journ. Chem. Soc. **49**. S. 453. 1886.

2) Regnault, Ann. de Chim. et de Phys. **22**, S. 268. 1849; vgl. auch Abegg, Handbuch der anorganischen Chemie **4**, 2. S. 222.

3) J. Philipp, Ber. Deutsch. chem. Ges. **12**. S. 1424. 1879.

4) J. D. van der Plaats, Rec. Trav. Chim. Pays Bas. **5**. S. 34. 1888; vgl. auch Abegg, a. a. O.

5) P. C. E. Meerum Terwogt, Z. anorg. Chem. **47**. S. 203. 1905.

§ 5. *Sublimationswärme.* Mittels des Wertes (2) kann man die Sublimationswärme eines Mols nach der Formel[1])

$$S = 1{,}985\, T^2 \frac{1}{p} \frac{dp}{dT}$$

berechnen. Dividiert man dann durch das Molekulargewicht ($2 \cdot 79{,}9 = 159{,}8$), so erhält man die Sublimationswärme eines Gramms.

Für den Tripelpunkt $t = -7{,}3^0$ ergibt sich so

(4) $$s = 60{,}7 \text{ cal.}$$

Diesen Wert kann man mit der Summe der Verdampfungs- und Schmelzwärme für dieselbe Temperatur vergleichen.

Regnault[2]) fand für die Schmelzwärme des Broms

$$l = 16{,}185 \text{ cal.}$$

Die Verdampfungswärme r läßt sich auch aus seinen Messungen ableiten. Er fand für die Wärme, die nötig ist, um 1 g Flüssigkeit von 0^0 bis zur Siedetemperatur zu erwärmen und dann zu verdampfen, 50,95 cal.

Mittels des Wertes für die spezifische Wärme des flüssigen Broms (0,108 cal zwischen $-6{,}3^0$ und $+58^0$ nach Regnault) und der spezifischen Wärme des Dampfes bei konstantem Druck ($c_p = 0{,}0555$; vgl. Abegg, a. a. O., S. 236) findet man

$$r = 46{,}8 \text{ cal},$$

so daß

$$s = l + r = 63{,}0 \text{ cal.}$$

Dieser auf sehr indirektem Wege bestimmte Wert weicht nicht stark von dem in (4) berechneten ab.

Die von Tsuruta aus den Ramsay-Youngschen Zahlen berechnete Dampfspannungskurve würde $s = 73{,}1$ cal geben, d. h. einen Wert, der von dem experimentell bestimmten über viermal so viel abweicht, wie der aus unserer Kurve berechnete.

§ 6. *Zusammenfassung.* 1. Die Dampfspannung des festen Broms wurde gemessen, und es ergaben sich merklich höhere Werte als die von Ramsay und Young bestimmten.

2. Die Extrapolation der Kurve bis $-41{,}8^0$ stimmt in dem extrapolierten Teile innerhalb der Meßgenauigkeit mit den optisch ermittelten Werten von Cuthbertson überein.

1) W. Nernst, Theoretische Chemie. S. 61.

2) Regnault, a. a. O.

3. Aus der gemessenen Dampfspannungskurve lassen sich die Koordinaten des Tripelpunktes und die Sublimationswärme berechnen; die Resultate stimmen befriedigend mit den experimentellen Werten überein.

4. Es wurde für verschiedene Temperaturen die Dampfspannung des festen Broms berechnet (vgl. § 8, Tab. 2).

5. Der von uns für 0° gemessene Dampfdruck liegt dem von Ramsay und Young bestimmten sehr nahe, so daß die Annahme berechtigt ist, daß die von diesen Forschern für flüssiges Brom ermittelten Werte richtig sind.

La Plata, 25. August 1916, Instituto de Fisica.

(Eingegangen 23. September 1919.)

3. *Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes, insbesondere von Kohlensäure; von G. Bakker.*

§ 1.

In meiner Arbeit vom 5. Nov. 1917 fand ich mit Hilfe der klassischen Theorie des stetigen Agens für die Dicke der Kapillarschicht in Berührung mit ihrem gesättigten Dampf die folgende Formel (wenigstens für niedrige Temperaturen):

$$\zeta = \gamma \frac{H}{a(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \cdot \quad (1)$$ [1]

Hierin ist γ eine Zahl zwischen 15 und 17. H bedeutet die Oberflächenspannung, a ist der Koeffizient in dem Ausdruck der Kohäsion oder des sogenannten Molekulardruckes, ζ ist die Dicke der Kapillarschicht und ϱ_1, ϱ_2 stellen die Densitäten der Flüssigkeit bzw. des Dampfes dar. Mit Hilfe dieser Formel findet man für die Dicke ζ der Kapillarschicht in der Nähe des Schmelzpunktes $\zeta = 1{,}5$ bis 2 Millimikron. Ist $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht, so gehört zu diesem Wert von ζ ein Wert von $\mathfrak{N} = 3$ bis 4.

Die *rein thermodynamisch* abgeleitete Relation:

$$\varepsilon - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \left(H - T\frac{dH}{dt}\right) S + \left(v - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) \frac{r_i}{u} \quad (2)$$ [2],

wo ε die Energie der Kapillarschicht, ε_1 und ε_2 die Energien der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, S die Oberfläche und v das spez. Volumen der Kapillarschicht darstellen (alles pro Einheit der Maße), während v_1 und v_2 die spez. Volumina der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, $u = v_2 - v_1$ und r_i die innere Verdampfungswärme bedeuten, gab nun weiter im Anschluß des Wertes $\mathfrak{N} = 3$ bis 4, gefunden für Temperaturen in der Nähe

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 254. 1918. Vgl. Ztschr. f. phys. Chemie 86. S. 145. 1913.

2) Ebenda S. 258.

des Schmelzpunktes, daß die Zahl $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten in der Kapillarschicht mit zunehmender Temperatur nur sehr langsam wächst. Bei Temperaturen von $0{,}7\,T_k$ bis $0{,}8\,T_k$ wird diese Zahl von der Ordnung 5 bis 6. Nur in der Nähe der kritischen Temperatur berechneten wir für die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht größere Werte; für $T = 0{,}97\,T_k$ bis $T = 0{,}99\,T_k$ haben wir nämlich 12 bis 15 erhalten. *Allein in der unmittelbaren Nähe* der kritischen Temperatur fanden wir beträchtlich größere Werte. Bei Äther z. B. kann für $T = 0{,}997\,T_k$ die Zahl $\mathfrak{N}$ zwischen 27 und 92 liegen und für Kohlensäure bei $T = 0{,}999\,T_k$ liegt der Wert von $\mathfrak{N}$ zwischen 300 und 1800.

In der besagten Arbeit gab ich eine zweite Methode, die sich auf die folgende Eigenschaft *des Druckes in der Längsrichtung* der Kapillarschicht gründet.

Wenn für eine *homogene* Phase ε die Energie, η die Entropie, T die absolute Temperatur, v das spez. Volumen und p den Druck darstellen, so nennt man bekanntlich den Ausdruck:

$$\varepsilon - T\eta + pv$$

das thermodynamische Potential dieser Phase. Wir setzen:

$$\varepsilon - T\eta + pv = \mu.$$

In Fig. 1 ist ein Teil der Isotherme dargestellt. Geben die Punkte H und K durch ihre Lage den Zustand (Druck und spez. Volumen) einer flüssigen bzw. einer dampfförmigen Phase für einen Körper bei einer bestimmten Temperatur an und sind diese Phasen miteinander im Gleichgewicht, so ist für diese Phasen der Wert des thermodynamischen Potentials gleich groß. Nennen wir die Werte dieses Potentials in den Punkten H und K bzw. μ_f und μ_{df}, so ist also: $\mu_f = \mu_{df}$.

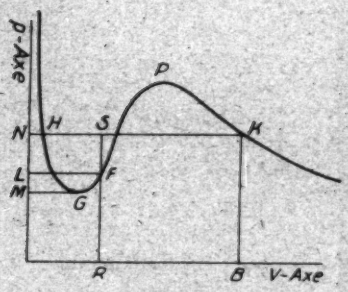


Fig. 1.

Es gibt nun aber noch einen dritten Punkt F auf dem labilen Teil der Isotherme, wo wieder das thermodynamische Potential denselben Wert hat wie H und K, und wofür man also hat:

Fläche $NHGMN$ = Fläche $LFGML$.

Die beiden *homogenen* Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes (Punkte H und K) berühren einander nicht unmittelbar, sind aber getrennt durch eine äußerst dünne Übergangsschicht, die Kapillarschicht. Die Größe des Druckes in dieser Kapillarschicht in einer Richtung *parallel ihrer Oberfläche*, und die wir durch p_T [1]) darstellen wollen, *kann nun angegeben werden durch die Ordinate des Punktes F*, also durch RF.[2]) Der Druck in der Kapillarschicht *senkrecht* zu ihrer Oberfläche ist dagegen dem Dampfdruck p_N [3]) gleich und wird also angegeben durch die Ordinate von H oder K. Da nun weiter die Oberflächenspannung H als die Abweichung von dem Gesetz von Pascal betrachtet werden kann [4]), so erhält man für H:

$$H = (p_N - p_T)\zeta, \tag{3}$$

wo ζ die Dicke der Kapillarschicht darstellt. Man kann auch wie folgt reden.[5]) Bedeutet p_T den mittleren Druck in der Richtung *parallel der Oberfläche* der Kapillarschicht, und ist ζ ihre Dicke, so ist die Zunahme der freien Energie bei der Vergrößerung der Oberfläche *um eine Einheit* gegeben durch den Ausdruck:

$$-p_T\zeta.$$ [6])

Bei der Bildung der Kapillarschicht aus den homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) ohne Volumänderung ist aber andererseits eine Quantität freie Energie:

$$-p_N\zeta$$

verloren gegangen. Es findet also im ganzen eine Zunahme der freien Energie statt, die gegeben ist durch den Ausdruck:

$$(p_N - p_T)\zeta.$$

Stellen wir deshalb die Kapillarenergie (numerisch = Oberflächenspannung) durch H dar, so ist also:

$$H = (p_N - p_T)\zeta.$$

---

1) Da p_T selbstverständlich ein Mittelwert ist, schrieb ich in vorhergehenden Arbeiten p_T.

2) G. Bakker, Ztschr. f. physik. Chemie 48. S. 36. 1904 und Ann. d. Phys. 20. S. 52. 1906.

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. S. 40. 1906 und Ztschr. f. physik. Chemie 33. S. 483. 1900.

4) Ebenda, S. 41 bzw. S. 483.

5) Statt der Betrachtungen a. a. O.

6) Pro Einheit der Oberfläche ist nämlich ζ numerisch das Volumen.

Die Dicke der Kapillarschicht wird deshalb gegeben durch (Fig. 1):

$$(4) \qquad \zeta = \frac{H}{p_N - p_T} = \frac{H}{KB - FR} = \frac{H}{FS}$$

Auf diese Weise kann man mit Hilfe der Zustandsgleichung die Dicke der Kapillarschicht berechnen. Für Kohlensäure findet man mit Hilfe der Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes[1]):

$t =$	0	10	20	25
$\zeta =$	1,6 $\mu\mu$	1,5 $\mu\mu$	2,5 $\mu\mu$	7,06 $\mu\mu$.

Da Kamerlingh Onnes die Gleichung für 25° nicht unmittelbar gibt und die Berechnung der Virialkoeffizienten sehr mühsam ist, habe ich für die Berechnung von ζ bei 25° die Gleichung von Sarran benutzt. Für die Oberflächenspannung benutzte ich die Daten von Verschaffelt.

Eine dritte Methode war rein thermodynamisch, also ganz ohne Hilfe des klassischen Agens und stützte sich allein auf die thermodynamische Relation (2) oben. Auf diese Weise fand ich wieder, daß die Dicke ζ der Kapillarschicht für Temperaturen unterhalb $\vartheta = 0{,}9$ (reduzierte Temperatur) von der Ordnung 1,5 $\mu\mu$ ist. Allein in der Nähe der kritischen Temperatur wird die Dicke größer. So berechnete ich z. B. für Kohlensäure:

Tabelle 1.

$t =$	− 25°	− 10°	0°	10°	20°	28°	30°	31,12°
$\frac{T}{T_k} =$	0,815	0,864	0,897	0,920	0,963	0,989	0,995	0,999
$\mathfrak{R}$ zwischen	3,2	3,4	3,6	4,9	7,07	13,5	27	348
	3,8	3,9	4	5,3	7,4	13,77	27,2	348
ζ zwischen	1,07	1,107	1,23	1,63	2,39	4,6	10,8	176 $\mu\mu$
	1,97	1,91	2,03	2,64	3,83	7,13	16,52	211 $\mu\mu$

Indessen ist bei dieser Methode zur Vereinfachung eine Vernachlässigung begangen, die wir unten betrachten wollen; die obigen Zahlen für die Dicke der Kapillarschicht und für die Zahl ihrer Molekelschichten sind dadurch ein wenig zu klein.[2]) Wir wollen darum trotz der Mühseligkeit der Methode

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 293.

2) Wenn wir also in der Tabelle für ζ bei − 25° einen Wert finden zwischen 1,07 und 1,97 $\mu\mu$, so müssen wir uns diese beiden Zahlen ein wenig größer denken.

die Berechnung aufs neue durchführen, aber nun ohne Vernachlässigung.

Wie schon oben bemerkt, habe ich die Gleichung (2) rein thermodynamisch abgeleitet. *In dieser Relation wird also keine einzige Annahme über das Wesen der Kapillarschicht gemacht.* Sie hat weiter ebensogut Geltung für eine gekrümmte wie für eine ebene Kapillarschicht. Immer stellen ε, S und v die Energie, Oberfläche bzw. das Volumen der Kapillarschicht *pro Einheit der Maße* dar; ε_1 und ε_2 sind die Energien der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, r_t ist die innere Verdampfungswärme und $u = v_2 - v_1$ ist die Differenz der spez. Volumina von Dampf und Flüssigkeit, während H die Oberflächenspannung darstellt. Hierbei denken wir uns die Flüssigkeit in Berührung mit ihrem gesättigtem Dampf, oder genauer ausgedrückt: wir denken uns die Flüssigkeit und Dampf getrennt durch die Kapillarschicht. Wir konstruierten nun in der Kapillarschicht eine Fläche konstanter Dichte; eine Fläche also, die durch Punkte geht, wo die mittlere Dichte denselben Wert hat. Weiter wurde diese Fläche so gelegt, daß, wenn die Kapillarschicht weggenommen würde und die homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) bis zu der besagten Fläche fortgesetzt würden, die Gesamtmaße der Materie sich nicht änderte. Ich habe die hier definierte Fläche Teilfläche genannt. Wir können das zum Ausdruck bringen, indem wir sagen: Die Kapillarschicht hat sich aus den homogenen Phasen von Flüssigkeit und Dampf ohne Änderung der Gesamtmaße und das Gesamtvolumen der Materie gebildet. Ist die Kapillarschicht eben bzw. kugelförmig, so ist die Teilfläche ebenso eben bzw. kugelförmig. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf eine *ebene* Kapillarschicht beschränken. Durch zwei Ebenen in der homogenen Phase (Flüssigkeit und Dampf) parallel der Teilfläche haben wir endlich die Kapillarschicht begrenzt.

Die Relation (2) hat nun immer Geltung; wir legen aber selbstverständlich die Grenzflächen derart, daß keine Molekeln, die sich durch ihre Lage von denen der homogenen Phasen unterscheiden, vernachlässigt werden. Wählen wir die Grenzflächen der Kapillarschicht auf gleiche Abstände von der Teilfläche, so wird die mittlere Dichte der Kapillarschicht die halbe Summe der Dichte von Flüssigkeit und Dampf. Ist ϱ diese mittlere

Dichte und stellen ϱ_1 und ϱ_2 die Dichten von Flüssigkeit bzw Dampf dar, so wird also:

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2},$$

und für das spez. Volumen erhalten wir:

$$v = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Wir betrachten also die Sache, als ob die Kapillarschicht geformt wird aus zwei gleich dicken Molekelschichten der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, so daß diese Schichten gerade die Kapillarschicht ausfüllen können.[1]) Wir nennen die Materie dieser Schichten die Materie, durch welche die Kapillarschicht gebildet ist. Stellt ζ die Dicke der Kapillarschicht dar, so ist selbstverständlich $v = \zeta S$ [2]) oder:

$$\zeta = \frac{v}{S} = \frac{2}{(\varrho_1 + \varrho_2) S},$$

und die Relation (2) erhält die Form:

$$(5) \qquad \frac{2\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{\varrho_1 + \varrho_2} \cdot \frac{1}{\zeta} = \varepsilon - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} r_i.$$

In dieser Relation sind H (Oberflächenspannung) ϱ_1, ϱ_2 und r_i durch das Experiment zu finden. Kennen wir aber die Zustandsgleichung des betrachteten Körpers, so können wir weiter ε_1 und ε_2 *berechnen*. Wäre z. B. die Zustandsgleichung von der allgemeinen Form:

$$(I) \qquad p = T f(v) - \frac{\psi(t)}{(v + \beta)^2}$$

mit β = Konstante, so wird:

$$(II) \qquad \varepsilon_1 = \psi(t) - \frac{A}{v_1 + \beta} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \psi(t) - \frac{A}{v_2 + \beta},$$

wobei nun $\psi(t)$ und A Temperaturfunktionen sind. Es bleibt also noch übrig die Bestimmung von ε.

Die Differentiation von (2) gibt:

$$d\varepsilon - T d\eta + p_T dv = H\left\{dS - \frac{S dv}{v} - \frac{1}{R}\left(dw - \frac{w dv}{v}\right)\right\}$$ [3])

1) Diese Auffassung bleibt möglich, selbst wenn die Kapillarschicht aus einer einzelnen Doppelschicht besteht.

2) S = Oberfläche der Kapillarschicht pro Einheit der Maße. Vgl. oben!

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 48. S. 778. 1915.

wo p_T den mittleren Druck in der Kapillarschicht parallel ihrer Oberfläche darstellt, während R der Radius der Kapillarschicht ist.[1]) Weiter ist

$$w = \frac{2 v_1 v_2}{v_2 - v_1} - v \frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1}.$$

Für die *ebene* Kapillarschicht ist aber $R = \infty$ und $\zeta S = v$; deshalb in diesem Falle:

$$T d\eta = d\varepsilon + p_T dv - H v \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\zeta}\right\} dt. \tag{6}$$

Für den Druck p_T in der Längsrichtung der Kapillarschicht haben wir oben schon bemerkt, daß er durch die Ordinate RF des Punktes F in der Fig. 1 dargestellt werden kann. Wenn die Zustandsgleichung für einen bestimmten Körper theoretisch vollkommen streng abgeleitet wäre, so könnten wir für solch einen Körper die verschiedenen thermodynamischen Größen, wie Energie, Entropie, thermodynamisches Potential usw., berechnen. So finden wir z. B. unter Annahme der Zustandsgleichung (I), wovon die van der Waalssche Gleichung und die von Clausius und Sarrau besondere Fälle sind, für die Energie den Ausdruck (II) oben:

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v + \beta} \qquad \begin{cases} A = \text{Temperaturfunktion}, \\ \beta = \text{Konstante}. \end{cases}$$

Substituieren wir nun in diesem Ausdruck für v einen Wert zwischen den Abszissen von G und P in Fig. 1, so wollen wir, obgleich die Phasen zwischen G und P labil sind, dennoch von ε sprechen als von der Energie dieser Phasen. Jedem Punkt des labilen Teiles der theoretischen Isotherme ist also in diesem Sinne ein Wert von ε, η usw. zugeordnet. Markieren wir insbesondere die Größen für den Punkt F[2]) durch den Index 3, so hat man die bekannte Relation:

$$d\mu_3 = -\eta_3 dt + v_3 dp_3, \tag{7}$$

wo μ_3 das thermodynamische Potential für den Punkt F bedeutet.

Ist μ das thermodynamische Potential für die Kapillarschicht, so findet man mit Hilfe von (6):

$$d\mu = -\eta dt + v dp_T + H v \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right) dt; \tag{8}$$

1) R stellt den Radius der Teilfläche dar und ist in meinen Arbeiten über die kugelschalenförmige Kapillarschicht scharf definiert.

2) Auf *jeder* Isotherme unterhalb der kritischen Temperatur denken wir uns den Punkt F angegeben. Fig. 1 zeigt also nur eine.

denn:

$$\mu = \varepsilon - T\eta + p_T v.$$

Nun ist $\mu = \mu_3$ [1]; deshalb:

$$(9) \qquad (\eta_3 - \eta)\,dt = v_3\,dp_3 - v\,dp_T - Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right)dt.$$

Obgleich für keinen einzigen Körper eine Zustandsgleichung hinreichend genau theoretisch abgeleitet ist, kennen wir jedoch empirische Formeln, welche die Daten des Experiments genügend befriedigen. An erster Stelle nennen wir die Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes.[2])

Für CO_2 sind selbst für vier Temperaturen *in dem Sättigungsgebiet* die Koeffizienten dieser Gleichung berechnet. Berechnet man nun die Abszisse des Punktes F, so findet man, daß innerhalb der Fehler des Experiments, der reziproke Wert dieser Abszisse, also „die Dichte des Punktes F", die halbe Summe der Dichten von Flüssigkeit bzw. Dampf ist.[3]) In diesem Falle aber ist gleichzeitig: $p_T = p_3$ und $v = v_3$ und die Relation (9) gibt:

$$(10) \quad (\eta_3 - \eta)\,dt = -Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right)dt \text{ oder } \eta_3 - \eta = -Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Nun war: $\mu = \mu_3$ oder $\varepsilon - T\eta + p_T v = \varepsilon_3 - T\eta_3 + p_3 v$ und weiter ist $p_T v = p_3 v_3$, also:

$$\varepsilon - T\eta = \varepsilon_3 - T\eta_3,$$

und aus (10) erhält man deshalb:

$$\varepsilon = \varepsilon_3 + HTv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Substituieren wir diesen Ausdruck für die Energie der Kapillarschicht in (5), so finden wir für die Dicke ζ der Kapillarschicht die Differentialgleichung:

$$(5\,a) \quad \frac{2\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{\varrho_1 + \varrho_2}\cdot\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}\,r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + HTv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 48. S. 780. 1915 und 54. S. 288. 1918.
2) H. Kamerling-Onnes und W. H. Keesom, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Art. V, 10. S. 728 usw.
3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 287. 1918.

oder da $v = \frac{1}{\varrho} = \frac{2}{\varrho_1 + \varrho_2}$ (vgl. oben!):

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{(\varrho_1+\varrho_2) r_i} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2}\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2} - \frac{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - \varepsilon_3}{r_i} \\ + \frac{2HT}{(\varrho_1+\varrho_2) r_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \end{aligned} \right.$$

oder kürzer:

$$(12)\quad -\frac{2T^2}{\varrho_1+\varrho_2}\frac{d\left\{\frac{H}{\zeta T}\right\}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}.$$

Stellen wir die Densität der Energie ε/v durch E dar, und markieren wir die flüssige, die dampfförmige Phase und die des Punktes F (Fig. 1) wieder durch die Indizes 1, 2 bzw. 3, so läßt sich (12) schreiben:

$$(12a)\quad T^2\frac{d\left\{\frac{H}{\zeta T}\right\}}{dt} = \frac{E_1+E_2}{2} - E_3.$$

Hierin ist nun, um es noch einmal zu wiederholen, H die Oberflächenspannung, ζ die Dicke der Kapillarschicht, T die absolute Temperatur und sind E_1, E_2 und E_3 die Energiedensitäten der flüssigen, dampfförmigen Phase, bzw. die der Phase F (Fig. 1).

Wie schon oben bemerkt, habe ich nun in einer vorherigen Arbeit die Dicke ζ der Kapillarschicht berechnet unter Vernachlässigung des letzten Gliedes in (11).[1]) Da nun $d\zeta/dt$ positiv ist, und also: $\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}$ negativ, sind daher die früher berechneten *zu klein*. Setzen wir:

$$\frac{1}{2}\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2} - \frac{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\varepsilon_3}{r_i} = A \text{ und } \frac{2HT}{(\varrho_1+\varrho_2) r_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -B,$$

so müssen wir die früher berechneten Werte durch: $\frac{A}{A-B}$ multiplizieren.

A. a. O. habe ich meine Berechnungen für CO_2, Äther und Benzol gemacht unter Benutzung von zwei Formeln für

1) Ann. d. Phys. 54. S. 289—293. 1918.

die Energie. Erstens benutzte ich die Gauss- van der Waalssche Formel:

(I) $$\varepsilon = -a\varrho + f(t)$$

und zweitens die Formel von Mills:

(II) $$\varepsilon = -A\sqrt[3]{\varrho} + F(t).$$

In (I) ist a eine Temperaturfunktion, in (II) ist A eine Konstante; $f(t)$ und $F(t)$ sind Temperaturfunktionen. Auf diese Weise fand ich für Kohlensäure, wie schon oben in einer Tabelle für CO_2 angegeben ist:

Tabelle 2.

$t =$	$-25°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$28°$	$30°$	$31{,}12°$
$\zeta_I =$	1,07	1,107	1,26[1])	1,63	2,39	4,6	10,8	176 $\mu\mu$
$\zeta_{II} =$	1,97	1,91	2,48[1])	2,64	3,83	7,13	16,52	211 $\mu\mu$
Im Mittel also:								
$\zeta =$	1,52	1,51	1,87	2,13	3,11	5,86	13,66	193 $\mu\mu$

Wäre die Zustandsgleichung von der Form:

$$p = Tf(v) - \frac{\varphi(t)}{(v+\beta)^3},$$

wovon die van der Waalssche Gleichung und die von Clausius und Sarrau besondere Fälle sind, so wird aber (vgl. oben):

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v+\beta} \quad \{A = \text{Temperaturfunktion}\}$$

und der Ausdruck

$$\frac{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - \varepsilon_3}{r_i} \text{ wird: } \tfrac{1}{2}\beta\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)}, \text{ da } \varrho_3 = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}.$$ [2])

Unter Vernachlässigung des letzten Gliedes von (11) erhalten wir also:

(13) $$\zeta = \frac{4\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{r_i(\varrho_1-\varrho_2)} \cdot \frac{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)}{2}.$$

Entnimmt man nun der Gleichung von Sarrau für CO_2 die Konstante $\beta = 0{,}357$, so findet man:

$t =$	$-25°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$25°$	$28°$	$30°$	$31{,}12°$
$\zeta =$	1,27	1,30	1,49	1,91	2,79	3,21	5,33	12,53	200,64

1) In meiner vorherigen Arbeit war $\zeta_I = 1{,}23$ und $\zeta_{II} = 2{,}03$. Infolge des verbesserten Wertes für die Oberflächenspannung H fallen sie hier größer aus.

2) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 288. 1918.

Diese Zahlen schließen sich deshalb sehr gut den Werten von ζ_I und ζ_{II} an, denn sie liegen gerade zwischen ihnen. Wir wollen darum diese Zahlen als erste angenäherte Werte der Dicke der Kapillarschicht betrachten und mit ihnen die Term $-B$ berechnen.

Zwischen -25^0 und -10^0 findet man:

$$-\frac{\Delta\frac{1}{\zeta}}{\Delta t}\,\frac{\frac{1}{1{,}27}-\frac{1}{1{,}30}}{15\,\mu\mu}=\frac{0{,}03\cdot 10^7}{24{,}76\cdot 15}=800\,(\mathrm{cm}^{-1})$$

und zwischen -10^0 und 0^0:

$$-\frac{\Delta\frac{1}{\zeta}}{\Delta t}\,\frac{\frac{1}{1{,}3}-\frac{1}{1{,}49}}{10\,\mu\mu}=0{,}00981\cdot 10^7=98100\,(\mathrm{cm}^{-1}).$$

Für -10^0 nehmen wir deshalb:

$$-\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}=49450\,(\mathrm{cm}^{-1}).$$

Benutzen wir für die Oberflächenspannung (H), die Verdampfungswärme (r_i) und die Densitäten der Flüssigkeit und des Dampfes wieder ebenso wie in vorhergehenden Arbeiten die Daten nach Verschaffelt, Regnault-Zeuner, Kuenen, Amagat und Mathias, so berechnen wir für B:

$$B=\frac{2\cdot 6{,}49\cdot 263\cdot 49.45\cdot 10^3}{0{,}973\cdot 228{,}1\cdot 10^7}=0{,}07606.$$

Für A können wir schreiben:

$$A=\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}-\frac{1}{2}\beta\,\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)}=\frac{\varrho_1-\varrho_2}{(\varrho_1+\varrho_2)\{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)\}}.$$

Mit Hilfe des schon früher berechneten Wertes von $\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}$ [1]) finden wir:

$A=0{,}362$ und also:

$$\zeta=\frac{A}{A-B}\cdot 1{,}3=\frac{0{,}362}{0{,}362-0{,}07606}\cdot 1{,}3=1{,}26\cdot 1{,}3=1{,}64.$$

Indessen haben wir bei der Berechnung von $-\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}\zeta$ zu klein genommen. Der berechnete Wert dieses Differential-

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 276. 1918.

quotienten ist deshalb *zu groß* und ebenso B. Korrigieren wir nun B durch Multiplikation durch $\frac{1{,}30}{1{,}64}$, so erhalten wir:

$$\zeta = \frac{0{,}362}{0{,}362 - 0{,}0604} \times 1{,}3 = 1{,}2 \cdot 1{,}30 = 1{,}56\ \mu\mu.$$

Da bei der letzten Berechnung B nun wieder ein wenig zu *klein* genommen ist, liegt der wirkliche Wert zwischen 1,64 und 1,56. Wir nehmen deshalb als Wert der Dicke der Kapillarschicht von CO_2: $\zeta = \frac{1{,}64 + 1{,}56}{2} = 1{,}6\ \mu\mu$.

Auch für 0, 10, 20, 25, 28 und 30° habe ich die Berechnung durchgeführt. Stellt B den erst berechneten Wert und B' die korrigierten, sind ζ' und ζ'' der erste und zweite berechnete Wert der Dicke der Kapillarschicht und ist $\zeta = \frac{\zeta' + \zeta''}{2}$ = Dicke der Kapillarschicht, so finde ich folgende Tabelle:

t	$-d\frac{1}{\zeta}/dt$	A	B	ζ'	B'	ζ''	$\zeta = \frac{\zeta' + \zeta''}{2}$
− 10°	$494{,}5 \cdot 10^3$	0,362	0,07606	1,64	0,0604	1,56	1,6
0°	$128{,}05 \cdot 10^3$	0,348	0,1457	2,59	0,084	1,98	1,78
10°	$144{,}10^3$	0,3104	0,130	3,28	0.076	2,54	2,91
20°	$108{,}10^3$	0,256	0,0602	3,63	0,046	3,40	3,51

Die Werte *oberhalb* 20° für ζ' und ζ'' haben eine zu große Differenz, um die halbe Summe als Wert für die Dicke ζ der Kapillarschicht betrachten zu können, und ich habe sie deshalb nicht in die Tabelle aufgenommen. Es war eine Folge des großen Wertes von $\frac{\Delta \frac{1}{\zeta}}{\Delta t}$, daß B und B' oberhalb 20° eine zu große Differenz zeigten.

Es gibt aber noch eine andere Weise, um ζ zu berechnen, wenigstens wenn die Formel für die Energie bekannt ist. Benutzen wir für die Energie die Formel:

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v + \beta}$$

als Folge der Zustandsgleichung von Clausius oder Sarrau, und setzen wir der Kürze halber $\frac{H}{\zeta T} = z$, so wird die Differentialgleichung (12) oben:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2 + \beta(\varrho_1 + \varrho_2)}\cdot\frac{r_i}{T^2}. \tag{14}$$

Berechnet man mit Hilfe der schon früher benutzten Daten mit $\beta = 0{,}357$ nach Sarrau für Kohlensäure den absoluten Wert des rechten Gliedes, so findet man:

$t = 0°$	10°	20°	30°	31,12°
$-\frac{dz}{dt} = 4787{,}7$	3299,7	1792,7	251,9	7,736

Mit Hilfe der bekannten Interpolationsformel von Lagrange finden wir folgendes Polynom, das diesen Werten genügt:

$$-\frac{dz}{dt} = 4787{,}1 - 97{,}752\,t - 9{,}2812\,t^2 + 0{,}50242\,t^3 - 0{,}0084132\,t^4.$$

Für $t = 31{,}115$ wird der Ausdruck Null. Die Integration gibt:

$$z = -\,4787{,}1\,t + 48{,}876\,t^2 + 3{,}0937\,t^3 - 0{,}125605\,t^4 + 0{,}0016826\,t^5 + \text{Konstante}.$$

Nun ist:

$$z = \frac{H}{\zeta T}$$

und können wir weiter die Oberflächenspannung H auffassen als die totale Abweichung von dem Gesetz von Pascal, d. h.: $H = (p_N - p_T)\zeta$, wenn p_N den Dampfdruck und p_T den Druck in der Längsrichtung der Kapillarschicht darstellt.[1])

Wir haben also:

$$z = \frac{p_N - p_T}{T}$$

und

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{T}\left(\frac{dp_N}{dt} - \frac{dp_T}{dt}\right) - \frac{p_N - p_T}{T^2}.$$

Nun wird bei der kritischen Temperatur: $p_N = p_T$ aber auch:

$$\frac{dp_N}{dt} = \frac{dp_T}{dt}\,^{2)},$$

deshalb:

$$\frac{dz}{dt} = 0, \text{ für } t = t_k.$$

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie 33. S. 488. Vgl. auch oben! (Formel 3).

2) Ebenda 51. S. 362. 1905; p_T ist a. a. O. durch p'_s angegeben.

Für diese Temperatur, wobei also $\frac{dz}{dt} = 0$, fanden wir nach obiger Formel für $\frac{dz}{dt} : t = 31{,}115$. (Nach Amagat $t_k = 31{,}35$). Hieraus finden wir für die Konstante der Formel für z: Konstante = 77172. Also:

$$(15)\left\{ z = \frac{H}{\zeta T} = 77172 - 4787{,}1\,t + 48{,}876\,t^2 + 3{,}0937\,t^3 - 0{,}125685\,t^4 + 0{,}0016826\,t^5 . \right.$$

Für $t = 0$ wird deshalb:

$$\frac{H}{\zeta T} = 77172 .$$

Mit $H = 4{,}5$ [1]) (dyne, cm) erhalten wir also:

$$\zeta = \frac{4{,}5}{77172 \cdot 273} = 2{,}1 \cdot 10^{-7} = 21\,\mu\mu .$$

Für $t = 10$ wird: $\frac{H}{\zeta} = 36193{,}7 \cdot 283 = 1{,}0243 \cdot 10^7$ oder $\zeta = \frac{1{,}712}{1{,}0234} \cdot 10^{-7} = 1{,}67\ \mu\mu$. Auf derselben Weise habe ich ζ für $t = 20°$ und $30°$ berechnet und finde ich resümierend:

$t =$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$
$\zeta =$	2,1	1,67	3,55	26,1 $\mu\mu$.

Da die Formel (15) durch Integration einer empirischen Relation entstanden ist, können wir nicht erwarten, daß die Werte für ζ völlig genau sind. *Der Größenordnung* nach schließen sich aber die Werte von ζ gut an die Werte mit Hilfe der vorletzten Methode gefundenen, nämlich:

$t =$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$
$\zeta =$	1,6	1,78	2,91	3,51 $\mu\mu$.

Um auch für tiefere Temperaturen den Wert von ζ zu finden, habe ich den Wert von $-\frac{dz}{dt}$ auch für $-30°$ und $-10°$ berechnet. Für $t = -30°$ findet man:

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2 + \beta(\varrho_1 + \varrho_2)} \cdot \frac{r_i}{2\,T^3} = \frac{2{,}0744}{2{,}39727} \cdot \frac{59{,}98 \cdot 4.2 \cdot 10^7}{4 \cdot 243^3} = 9229{,}1 .$$

1) $H = 4{,}5$ ist genauer als der früher durch mich benutzte Wert: $H = 4{,}41$.

Für $t = -10°$ findet man: $-\frac{d\varkappa}{dt} = 6417{,}94$. Für 0, 10, 20 und 30° ist der Differentialquotient schon oben berechnet. Statt 251,9 bei 30° muß es aber heißen: 254,9. Ich fand es aber nicht nötig, die obige Rechnung zu wiederholen, da 1,5% in dem Wert für $-\frac{d\varkappa}{dt}$ bei 30° keine nennenswerte Änderung in dem Wert von ζ veranlaßt.[1]) Wir erhalten also:

$t =$	$-30°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$
$-\frac{d\varkappa}{dt} =$	9229,1	6417,94	3299,7	1792,7	254,9	

Die Interpolationsformel von Lagrange gibt:

$$-\frac{d\varkappa}{dt} = 4843{,}97 - 156{,}678\,t + 0{,}1793\,t^2 + 0{,}00782\,t^3 - 0{,}00033\,t^4.$$

Integration gibt:

$$\frac{H}{\zeta T} = -4843{,}97\,t + 78{,}339\,t^2 - 0{,}0598\,t^3 - 0{,}001955\,t^4 + 0{,}000065\,t^5 + \text{Konstante}.$$

Nehmen wir als kritische Temperatur $t_k = 31{,}35$ (Amagat), so wird die Konstante: 76626,75, und wir erhalten:

$$\frac{H}{\zeta T} = 76626{,}75 - 4843{,}97\,t + 78{,}339\,t^2 - 0{,}0598\,t^3 - 0{,}001955\,t^4 + 0{,}000065\,t^5.$$ [2])

Hieraus finden wir für die Dicke ζ der Kapillarschicht von Kohlensäure die folgende Berechnung:

$t =$	$-30°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$
$\frac{H}{\zeta T} =$	290902,5	132934,1	76626,75	35985,1	10500
$\zeta =$	1,46	1,85	2,15	2,66	3,97

Die Berechnung von ζ bei 30° gibt:

$$\frac{H}{\zeta T} = 76626{,}7 - 145319{,}1 + 70505{,}1 - 1614{,}6 - 1583{,}55 + 1579{,}5 = 194{,}1.$$

Die Zahl 194,1 kommt also gegenüber den Gliedern 76626,7, 145319,1 und 70505,1 nicht in Betracht und die Berechnung wird unzuverlässig.

1) Überdies sind die experimentellen Daten über die Verdampfungswärme nur bis auf einzelne Prozente genau bekannt.

2) Oben fanden wir für die Konstante in Formel (15): 77172. Die Differenz ist deshalb noch kein Prozent.

Geben wir nun die gefundenen Werte für die Dicke (ζ) der Kapillarschicht durch die Indizes I, II, III bzw. IV an, derart, daß ζ_I der Wert ist nach Formel (13), korrigiert mit Hilfe der Werte für $\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}$, ζ_{II} der Wert erhalten durch Integration von (14) zwischen 0° und 30°, ζ_{III} der Wert erhalten durch dieselbe Integration zwischen $-30°$ und $+30°$, während ζ_{IV} den Wert darstellt nach Formel: $\zeta = \frac{H}{p_N - p_T}$, so haben wir resümierend[1]):

Tabelle 3.

t =	$-30°$	$-10°$	0°	10°	20°	25°	30°
ζ_I =		1,6	1,78	2,91	3,51 $\mu\mu$		
ζ_{II} =			2,1	1,67	3,55		26,1 $\mu\mu$
ζ_{III} =	1,46	1,85	2,15	2,66	3,97 $\mu\mu$		
ζ_{IV} =			1,6	1,5 *K. Onnes* 1,6 *Sarrau*	2,5	7,06 $\mu\mu$	

Die Differenzen, die wir hier zwischen den Werten von ζ bei derselben Temperatur finden, beweisen nichts gegen die Richtigkeit meiner Theorie, sind aber eine Folge der Verschiedenheit der gefolgten Methoden und benutzten Formeln.

Daß die Berechnung mit Hilfe der Integration von (14) auf dasselbe hinausläuft als die Benutzung der Formel: $\zeta = \frac{H}{p_N - p_T}$, sehen wir sofort. Markieren wir wieder die Größen der flüssigen, dampfförmigen Phasen und die der Phase F (Fig. 1) mit den Indizes 1, 2 bzw. 3, so hat man:

$$-\eta_3\,dt + v_3\,dp_3 = d\mu_3, \quad -\eta_1\,dt + v_1\,dp_N = d\mu_1 \quad \text{und:}$$
$$-\eta_2\,dt + v_2\,dp_N = d\mu_2,$$

wo nun p_N den Dampfdruck darstellt; p_N ist deshalb der Druck in der Kapillarschicht, in einer Richtung senkrecht zu ihrer Oberfläche.

Also:

$$\eta_3 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = v_3\frac{dp_3}{dt} - \frac{v_1 + v_2}{2}\frac{dp_N}{dt}$$

1) Hierbei ist p_T die Ordinate RF des Punktes F in der Fig. 1, und ist bei der Berechnung von RF die Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes benutzt. Für 10° ist auch Sarraus Gleichung benutzt.

Weiter ist:

$$\varepsilon_3 - T\eta_3 + p_3 v_3 = \mu_3 = \varepsilon_1 - T\eta_1 + p_1 v_1 = \mu_1 = \varepsilon_2 - T\eta_2 + p_2 v_2 = \mu_2$$

und deshalb:

$$\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - v_3\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) + \frac{v_1 + v_2}{2}\left(T\frac{dp_N}{dt} - p_N\right) = 0$$

oder:

$$\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) v_3 = \frac{1}{2}\frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{16}$$

Wir können diese Gleichung auch in der folgenden Form schreiben:

$$\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) = \varepsilon_3 - \frac{r_i\,\varepsilon_2 - v_2\,\varepsilon_1}{v_2 - v_1}. \tag{16a}$$ [1]

Nun fanden wir, wenigstens für Kohlensäure, für die Dichte in dem Punkt F: $\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$, und das ist in unserer Theorie der Kapillarschicht auch der Wert ihrer mittleren Dichte; also $v_3 = v = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$. Die Relation (16) können wir also schreiben:

$$\frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) = \frac{1}{2}\frac{v_1 + v_2}{v_2 - v_1} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}.$$

Schreiben wir die Clapeyron-Clausiussche Formel in der Gestalt:

$$\frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}\left(T\frac{dp_N}{dt} - p_N\right) = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} \cdot \frac{r_i}{v_2 - v_1},$$

und ziehen wir die letzten Gleichungen voneinander ab, so finden wir:

$$-\frac{2T^2}{\varrho_1 + \varrho_2}\frac{d\frac{p_N - p_3}{T}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{17}$$

Setzen wir deshalb $p_3 = p_T$ [2] und bedenken wir, daß:

$$\zeta = \frac{H}{p_N - p_T} \quad \text{oder} \quad p_N - p_T = \frac{H}{\zeta},$$

so finden wir in (17) wieder Gleichung (14) zurück.

Nehmen wir für die Temperaturen, wo verschiedene Werte von ζ berechnet sind, ihre Mittelwerte, so erhalten wir nach

---

1) Diese Relation ist das Gegenstück von der Gleichung Clapeyron-Clausius, denn sie leistet für den Punkt F in der Fig. 1 dasselbe wie die Clapeyron-Clausiussche Gleichung für die Punkte H und K.

2) Zeitschr. f. phys. Chemie 48. S. 86. 194. Vgl. oben!

obiger Tabelle für die Dicke der Kapillarschicht von Kohlensäure:

$t =$	$-30°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$25°$	$30°$
$\zeta =$	1,46	1,72	1,91	2,21	3,51	7,06	26,1 $\mu\mu$

während wir in einer vorhergehenden Arbeit (vgl. oben) fanden:

$t =$	$-25°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$28°$	$30°$	31,12	
ζ zwischen	1,07	1,12	1,26	1,63	2,39	4,6	10,8	176 $\mu\mu$	(a)
	1,97	1,91	2,48	2,64	3,83	7,13	16,52	211 $\mu\mu$	(b)
Mittelwerte:	1,52	1,51	1,87	2,13	3,11	5,86	13,66	193 $\mu\mu$	

Wie schon oben bemerkt, sind alle diese Zahlen sub (a) und sub (b) zu klein zufolge der Vernachlässigung der Änderung von ζ mit der Temperatur; in der Nähe der kritischen Temperatur muß dieser Einfluß am größten werden, und das ist gerade, was wir sehen.

§ 2.

Ich möchte hier nun eine dritte Methode angeben und verwerten, die zwar nicht so genau ist als die, welche in § 1 durch mich auf Kohlensäure angewendet wurde, welche aber den Gegenstand *von einer ganz anderen Seite beleuchtet* und wenigstens der Größenordnung nach die Dicke der Kapillarschicht richtig angibt.

Wenn nämlich Θ in einem Punkte der Kapillarschicht den kinetischen Druck[1]) darstellt und S_N und S_T sind die Kohäsionen in einer Richtung senkrecht bzw. parallel zu der Oberfläche der Kapillarschicht, so ist, da θ unabhängig von der Richtung ist:

$$p_N - p_T = \Theta - S_N - (\theta - S_T) = S_T - S_N.$$

Wenn wir also der Kürze halber die Mittelwerte von S_T und S_N ohne Striche schreiben, so ist deshalb nach (3) § 1:

$$\zeta = \frac{H}{p_N - p_T} = \frac{H}{S_T - S_N}. \tag{18}$$

Nehmen wir vorläufig an, daß die Kohäsionen in der Flüssigkeit bzw. in dem Dampf durch die Laplaceschen Formeln $a\varrho_1^2$ und $a\varrho_2^2$ gegeben werden, so würde in dem Falle, daß der Übergang zwischen Flüssigkeit und Dampf völlig diskontinuierlich wäre, die Kohäsion S_N durch den Ausdruck

1) Druck = kinetischer Druck − Kohäsion.

$a\varrho_1\varrho_2$ dargestellt werden.[1]) Auf diese Weise würden wir für die Oberflächenspannung nach (18) erhalten:

$$H = \zeta(\delta_T - \delta_N) = \zeta\left\{a\varrho_1\varrho_2 - \frac{a(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}a\zeta(\varrho_1 - \varrho_2)^2.$$

Ist der Übergang aber *nicht* völlig diskontinuierlich, so gibt eine analoge Betrachtung wie a. a. O., jedesmal auf zwei aufeinanderfolgende Molekularschichten angewandt, als Ausdruck für die Oberflächenspannung H statt ein *einziges* Glied, eine *Summe* von Gliedern wie $\frac{1}{2}a\zeta(\varrho_1 - \varrho_2)^2$. Wir wollen nun annehmen, daß die mittlere Dichte in einer Molekelschicht die halbe Summe ist der mittleren Dichten in den anliegenden Schichten, so daß die Differenz der Dichten von zwei aufeinanderfolgenden Schichten gegeben ist durch:

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}},$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht darstellt.

Für die Oberflächenspannung erhält man also:

$$H = \sum_1^n \tfrac{1}{2}a\zeta_p\left\{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}\right\}^2$$

oder, da $\sum_1^n \zeta_p = \zeta$ = totale Dicke der Kapillarschicht:

$$H = \tfrac{1}{2}a\zeta\left\{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}\right\}^2. \tag{19}$$

Ist N die Zahl der Molekeln in einem g-Molekel (Avogadrosche Konstante) und M das Molekulargewicht, so ist der mittlere Abstand zwischen zwei Molekeln der Flüssigkeit bzw. des Dampfes:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_1}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_2}}.$$

Wenn also die Flüssigkeit und der Dampf, bzw. n_1 und n_2 Molekelschichten zur Bildung der Kapillarschicht „beigetragen" haben[2]), so wird die Dicke der Kapillarschicht gegeben durch den Ausdruck:

$$n_1\sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_1}} + n_2\sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_2}}.$$

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chemie 93. S. 167. 1918.
2) Vgl. oben! (§ 1).

Da wir, wie gewöhnlich, die Grenzflächen der Kapillarschicht auf gleiche Abstände der Teilfläche legen wollen, ist:

$$n_1 \sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_1}} = n_2 \sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_2}}.$$

Stellen wir die Gesamtzahl $n_1 + n_2$ der Molekelschichten, welche die Kapillarschicht bilden sollen, durch n dar, so erhalten wir (Kraft der Lage der Teilfläche) also für ihre Dicke ζ:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \frac{2n_1}{\sqrt[3]{\varrho_1}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} = \frac{2n_2}{\sqrt[3]{\varrho_2}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} = \frac{2(n_1+n_2)}{\sqrt[3]{\varrho_1}+\sqrt[3]{\varrho_2}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt[3]{\varrho_1}+\sqrt[3]{\varrho_2}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}}. \end{aligned} \right.$$

Die Zahlen $\mathfrak{N}$ und n sind selbstverständlich von derselben Größenordnung. (Wie immer denken wir uns, daß die Teilfläche so gelegt wird, daß, wenn die Kapillarschicht weggenommen würde und die homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) bis zu der besagten Fläche fortgesetzt würden, die Gesamtmaße und das Gesamtvolumen der Materie sich nicht änderte. Wir haben das oben in § 1 zum Ausdruck gebracht, indem wir sagten: Die Kapillarschicht hat sich aus den homogenen Phasen von Flüssigkeit und Dampf ohne Änderung der Gesamtmaße und des Gesamtvolumens der Materie gebildet.

Bei der Bildung der Kapillarschicht schicken sich die n-Molekelschichten zu $\mathfrak{N}$ neue Schichten. Wir setzen:

$$(21) \qquad \mathfrak{N} = q\,n$$

und wollen zeigen, daß für Temperaturen in der Nähe des Schmelzpunktes q für Kohlensäure zwischen 1 und 1,5 liegt; bei höheren Temperaturen kommt q immer höher an 1. Denken wir uns nämlich erstens eine *homogene* Phase, welche dieselbe Dichte hat als die mittlere Dichte $\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$ der Kapillarschicht. Der mittlere Abstand zwischen zwei Molekeln ist in diesem Falle gegeben durch:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}}}.$$

Wir würden also als Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht erhalten:

$$n' = \frac{\dfrac{2}{3}}{\sqrt[3]{\dfrac{M}{N\dfrac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}}.$$

Im Zusammenhang mit (20) erhalten wir also:

$$n' = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}{\dfrac{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}}{2}} n.$$

Wir setzen: $n' = q' n$.

In einer vorhergehenden Arbeit habe ich schon die Zahl q' nicht allein für Kohlensäure, sondern auch für Benzol und Äther berechnet und benutzt. Ich fand[1]):

Tabelle 4.

Benzol.

t =	5,4°	20°	50	80	100	150	200	250	275
q' =	1,59	1,48	1,43	1,38	1,35	1,26	1,17	1,09	1,04

Äther.

t =	0°	20°	50	80	120	150	170	190	198
q' =	1,440	1,398	1,33	1,27	1,18	1,12	1,07	1,02	1,01

Kohlensäure.

t =	− 25°	− 10°	0	10	20	28	30	31,12
q' =	1,2	1 14	1,11	1,09	1,05	1,02	1,009	1,001

oder resümierend, wenn wir q' in ihrer Abhängigkeit zu der *reduzierten* Temperatur ϑ angeben:

	C_6H_6	C_6H_6	Äther	Äther	C_6H_6	C_6H_6	Äther	C_6H_6
ϑ =	0,493	0,575	0,584	0,627	0,629	0,664	0,691	0,753
q' =	1,59	1,43	1,44	1,398	1,38	1,35	1,33	1,26

	Äther	CO_2	Äther	C_6H_6	CO_2	CO_2	Äther	CO_2
ϑ =	0,755	0,815	0,841	0,842	0,864	0,897	0,905	0,929
q' =	1,27	1,2	1,18	1,17	1,14	1,11	1,12	1,09

	C_6H_6	Äther	CO_2	C_6H_6	CO_2	Äther	CO_2	Äther	CO_2
ϑ =	0,931	0,948	0,963	0,976	0,989	0,990	0,995	0,997	0,999
q' =	1,09	1,07	1,05	1,01	1,02	1,02	1,009	1,01	1,001

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie 91. S. 582—585. 1916.

Da nun der wirkliche Wert $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten der Kapillarschicht zwischen n und n' liegt, nehmen wir $q = \frac{1+q'}{2}$ und finden:

	C_6H_6	C_6H_6	Äther	Äther	C_6H_6	C_6H_6	Äther	C_6H_6
$\vartheta =$	0,493	0,575	0,584	0,627	0,629	0,664	0,691	0,753
$q =$	1,3	1,21	1,22	1,2	1,19	1,17	1,16	1,13

	Äther	CO_2	Äther	C_6H_6	CO_2	CO_2	Äther	CO_2
$\vartheta =$	0,755	0,815	0,841	0,842	0,864	0,897	0,905	0,929
$q =$	1,13	1,1	1,09	1,08	1,07	1,05	1,06	1,04

	C_6H_6	Äther	CO_2	C_6H_6	CO_2	Äther	CO_2	Äther	CO_2
$\vartheta =$	0,931	0,948	0,963	0,976	0,989	0,990	0,995	0,997	0,999
$q =$	1,04	1,03	1,02	1,01	1,01	1,01	1,004	1,005	1,005

Da nun $\vartheta = 0{,}493$ für Benzol den Schmelzpunkt (5,4°) angibt, sehen wir also, daß der Koeffizient q in (21) vom Schmelzpunkt bis zu der kritischen Temperatur von 1,3 bis 1 abnimmt.

Elimination von ζ und n zwischen (19), (20) und (21) gibt für $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \frac{a(\varrho_1 - \varrho_2)^3}{q\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right) H} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \tag{22}$$

Indessen haben wir bei dieser Betrachtung als Formel für den Molekulardruck den Laplaceschen Ausdruck: $a\varrho^2$ gewählt. Wollen wir aber unsere Ergebnisse vergleichen mit denen in § 1 oben, so müssen wir in Formel (22) $\varrho_1 - \varrho_2$ ersetzen durch $\frac{1}{v_1 + \beta} - \frac{1}{v_2 + \beta}$, da wir oben für die *homogene* Phase von CO_2 die Zustandsgleichung:

$$p = Tf(v) - \frac{a}{(v+\beta)^3}$$

benutzt haben. Da aus der letzten Gleichung für die innere Verdampfungswärme r_i folgt:

$$r_i = \left(a - T\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{v_1 + \beta} - \frac{1}{v_2 + \beta}\right),$$

so erhalten wir für $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{q\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \cdot \frac{r_i(\varrho_1 - \varrho_2)}{\left(1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt}\right)(1 + \beta\varrho_1)(1 + \beta\varrho_2) H}. \tag{23}$$

Nach Sarrau ist für Kohlensäure

$$\beta = 0{,}357 \text{ und } a = 4317{,}7 \cdot 10^6 \cdot 1{,}00285^{-T}.$$

Mit Hilfe dieser Werte berechnen wir[1]):

Kohlensäure.

$t =$	$-25°$	$-10°$	0	10	20	28	30
$1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} =$	1,71	1,749	1,778	1,806	1,835	1,858	1,863
$(1+\beta\varrho_1)(1+\beta\varrho_2) =$	1,382	1,385	1,372	1,367	1,360	1,357	1,361

Weiter wird:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N}} = 10^{-7}\sqrt[3]{\frac{44}{620}} = 0{,}414 \cdot 10^{-7}$$

und deshalb nach (20):

$$\zeta = \frac{0{,}828 \cdot 10^{-7} n}{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}}.$$

Benutzen wir für r_i die Werte nach Regnault-Zeuner (bei 30° nach Mollier), während die Werte für die Oberflächenspannung nach den Angaben von Verschaffelt berechnet sind, so finden wir nach (23), (21) und (20):

I

$t =$	$-25°$	$-10°$	0	10	20	28	30
$\Re =$	3	3,6	4,2	5,1	7	11,4	26
$n =$	2,7	3,4	4	4,9	6,9	11,3	26
$\zeta =$	1,6	2	2,3	2,8	3,2	6,1	14 $\mu\mu$

Unter Vernachlässigung der *Änderung* der Dicke ζ der Kapillarschicht mit der Temperatur, d. h. wenn wir die Term

$$HvT\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

in (5a)[2]) weglassen, *wodurch die Werte von ζ zu klein ausfallen*, fanden wir nach (13), § 1:

II

$t =$	$-25°$	$-10°$	0	10	20	28	30
$\zeta =$	1,27	1,3	1,49	1,91	2,79	5,33	12,53 $\mu\mu$

Wenn wir Reihe I mit Reihe II vergleichen, sehen wir, daß auch wirklich die Zahlen sub I größer sind, wie die Zahlen sub II.

Tabelle 3, § 1, gibt eine Zusammenfassung der Werte für die Dicke der Kapillarschicht, nach verschiedenen Methoden gefunden. Bei der Berechnung von ζ_I, ζ_{II} und ζ_{III} ist zur Bestimmung

1) Die Werte von ϱ_1 und ϱ_2 sind nach Amagat.

2) Diese Relation befindet sich zwischen (10) und (11).

der Energie die Gleichung von Sarrau benutzt, ebenso wie hier. Allein bei 30° haben wir dort einen anderen Wert für r_i adoptiert. (Nach Mathias statt nach Mollier.) Die Mittelwerte von ζ_I, ζ_{II} und ζ_{III} von Tabelle 3, § 1, sind deshalb bis 20° vergleichbar mit denen, berechnet in diesem Paragraph nach I. Wir erhalten als Mittelwerte von ζ_I, ζ_{II} und ζ_{III}:

III

$t =$	$-30°$	$-10°$	0	10	20
$\zeta =$	1,46	1,7	2	2,6	3,6

Wie wir sehen, sind die Werte von ζ nach II und III genügend im Einklang miteinander, wenigstens wenn wir den großen Unterschied in den gefolgten Methoden beachten. Weiter bemerken wir, daß in der hier befolgten Methode die Dicke ζ der Kapillarschicht berechnet ist durch Formeln, wo die innere Verdampfungswärme r_i in dem Zähler steht, während die Oberflächenspannung H sich in dem Nenner befindet, *im Gegensatz zu den Formeln*, benutzt in § 1, wo gerade die innere Verdampfungswärme (r_i) in dem Nenner, bzw. die Oberflächenenergie $\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)$ in dem Zähler steht.

Außerhalb Kohlensäure gibt es leider wenige Körper, wofür die Daten, nötig für die obigen Berechnungen, über ein genügend ausgedehntes Temperaturgebiet gegeben sind. Wir müssen uns auf Benzol und Äther beschränken. Für den ersten Körper kennen wir die Oberflächenspannung (H) und die Densitäten ϱ_1 und ϱ_2 vom Schmelzpunkt bis 280°, also bis einzelne Grade unterhalb der kritischen Temperaturen (288,5° nach Young), während die innere Verdampfungswärme über demselben Temperaturgebiet durch mich berechnet ist.[1]) Eine genügend exakte Zustandsgleichung gibt es aber für diesen Körper nicht; ebensowenig für Äther, wofür wir die übrigen nötigen Daten zwischen 0° und 193° (krit. Temp. nach Amagat: 194,4°) kennen. Aus Mangel an einer besseren Zustandsgleichung wollen wir für Benzol und Äther die van der Waalssche Zustandsgleichung benutzten. Weiter können wir dann nach unserer Theorie die Zahl der Molekelschichten der Kapillarschicht und ihre Dicke ζ berechnen.

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie 90. S. 99—104. 1905. und Ann. d. Phys. 54. S. 275. 1918.

Benzol.[1])

Für Benzol ist bei 5,4° (Schmelzpunkt) die innere Verdampfungswärme $r_i = 346{,}6 \cdot 10^7$ erg., $\varrho_1 = 0{,}894$, $\sqrt[3]{\varrho_1} = 0{,}9633$, während ϱ_2 gegen ϱ_1 vernachlässigt werden kann. Weiter ist M (Molekulargewicht) = 78 und für N (Avogadrosche Konstante oder Zahl der Molekeln in einem g-Molekel) nehmen wir: $6{,}2 \cdot 10^{23}$. Das gibt $\sqrt[3]{\frac{M}{N}} = 0{,}50107 : 10^{-7}$. Bei Benutzung der Formel von Clausius für a wird $1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} = 2$ und deshalb hat man für die Zahl $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten nach Formel (23) ($\beta = 0$):

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{q\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \cdot \frac{r_i(\varrho_1 - \varrho_2)}{\left(1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt}\right) H}$$

$$= \frac{1}{1{,}29} \cdot 0{,}50107 \, \frac{346{,}6 \cdot 0{,}894^{2/3}}{2 \cdot 31{,}31} = 2.\ ^{2})$$

Nach der van der Waalschen Formel von a (in seiner Zustandsgleichung) wird $1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} = \frac{T + T_x}{T_x} = 1{,}49$ und das würde geben $\mathfrak{N} = 2{,}7$. Im Mittel wird also: $\mathfrak{N} = 2{,}4$ bei $t = 5{,}4$ (Schmelzpunkt.)

Nach Ramsay und Shields ist die Oberflächenspannung H gegeben durch:

$$H = 2{,}1043\,(t_x - t - 6{,}5)\,\varrho_1^{2/3} M^{-1/3}.$$

Bei 50° können wir ϱ_2 gegen ϱ_1 vernachlässigen und erhalten mit $q = 1{,}21$ (Tabelle IV)[3]:

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{1{,}21\sqrt[3]{\varrho_1}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \frac{r_i \varrho_1}{2} \frac{\sqrt[3]{M^2}}{2{,}1043\,(t_x - t - 6{,}5)\,\varrho_1^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{1{,}21} \cdot 0{,}5017 \, \frac{391{,}39 \cdot 78^{2/3}}{2 \cdot 2{,}1043 \cdot 232} = 3.$$

---

1) Wir benutzen im folgenden die Daten derselben Forscher wie in den vorhergehenden Arbeiten.

2) $q = \frac{1 + q'}{2}$ und nach Tabelle IV ist $q' = 1{,}59$.

3) $t = 50° = \vartheta = 0{,}575$.

Mit der van der Waalsschen Formel für a wird

$$1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} = 1{,}57 \quad \text{und hieraus} \quad \mathfrak{N} = 3 \cdot \frac{2}{1{,}57} = 3{,}8.$$

Im Mittel ist also $\mathfrak{N} = 3{,}4$.

Auch für 80, 100, 150, 200, 250, 275 und 280° habe ich die Berechnung durchgeführt und im Mittel (halbe Summe der beiden Werte) gefunden (resümierend):

$t =$ 5,4°	50	80	100	150	200	250	275	280 [1]),
$\mathfrak{N} =$ 2,4	3	3,2	3,4	3,5	4	6,4	10,8	16

Indessen haben wir bei der Ableitung von Formel (19) als Ausdruck für die Differenz der Dichten von zwei aufeinanderfolgenden Schichten den Ausdruck $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}$ benutzt, während man doch oberflächlich meinen könnte, daß es heißen muß: $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N} - 1}$. Da $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht darstellt, so gibt es allerdings $\mathfrak{N} - 1$ Abstände zwischen den äußersten Schichten; es ist aber nicht rational, als Dicke der Kapillarschicht einfach den Abstand zwischen den äußersten Molekelschichten zu nehmen, denn exakter ist es bei diesem Abstand noch hinzuzufügen einen *halben* Molekelabstand, sowohl der flüssigen als der dampfförmigen Phase. Der richtige Ausdruck für die Differenz der Dichten von zwei aufeinanderfolgenden Schichten ist deshalb: $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}$.

In einer Arbeit von 1915 [2]) fand ich schon für die Zahl der Molekelschichten, die „die Kapillarschicht geformt haben“:

$t =$ 20°	50	80	100	150	200	250	275
$n =$ 3,7	3—4	3—5	3,5—5	3,5—5	4—6	6—8	9—12

Äther.

Ganz auf dieselbe Weise wie oben habe ich die Berechnung zwischen 0 und 193° (krit. Temp. 194,5°) für Äther durchgeführt und berechnet:

$t =$ 0°	20	50	80	120	170	190	193
$\mathfrak{N} =$ 2,3	3,3	3,3	4,2	5	7,8	16,5	21,5

1) Für $t = 280°$ ist q' in Tabelle IV nicht berechnet. Wir finden $q' = 1{,}014$ und deshalb $q = 1{,}007$.

2) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chemie 90. 105. 1915; vgl. Ann. d. Phys. 54. S. 277. 1918.

Mit Hilfe der Theorie des klassischen Agens fand ich früher[1]):

$n =$	3,7	4,7	3—5	4—6	6,5	10,6	10—16	27

Zusammenfassung.

In § 1 ist auf zwei Weisen die folgende thermodynamische Gleichung abgeleitet:

$$T^2 \frac{d\left\{\frac{H}{\zeta T}\right\}}{dt} = \frac{E_1 - E_2}{2} - E_3 .$$

Hierin ist H die Oberflächenspannung, ζ die Dicke der Kapillarschicht, T die absolute Temperatur und sind E_1, E_2 und E_3 die Energiedensitäten der flüssigen, dampfförmigen Phase bzw. die der Phase F (Fig. 1).[2])

In F hat das thermodynamische Potential denselben Wert wie für die homogene Phase der Flüssigkeit und des Dampfes.

Durch Entwicklung von (I) entsteht links ein Glied, das den Differentialquotient $\frac{d\zeta}{dt}$ enthält. Vernachlässigt man dieses Glied, so erhält man eine vereinfachte Relation, welche die Dicke ζ der Kapillarschicht ein wenig *zu klein* angibt. Die Größenordnung ist aber richtig. Diese Berechnung habe ich in einer vorhergehenden Arbeit für Kohlensäure, Äther und Benzol durchgeführt.

Für die Energie ε der homogenen Phase benutzte ich erstens die Gauss-van der Waalssche Formel:

$$\varepsilon = -a\varrho + f(t) \qquad \text{(II)}$$

und zweitens die Formel von Mills:

$$\varepsilon = -A\sqrt[3]{\varrho} + F(t). \qquad \text{(III)}$$

In (II) ist a eine Temperaturfunktion und in (III) ist A eine Konstante; $f(t)$ und $F(t)$ sind Temperaturfunktionen. Als Mittel der zwei Berechnungen fand ich:

IV)

$t =$	$-25°$	-10	0	10	20	28	30	31,12
$\zeta =$	1,52	1,51	1,87	2,13	3,11	5,86	13,66	193 $\mu\mu$

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chemie 90. S. 118. 1915; vgl. Ann. d. Phys. 54. S. 279. 1918.

2) Energiedensität = Energie der Volumeinheit. Ist für eine Phase ε die Energie pro Einheit der Masse und v das spez. Volumen, so ist also: $E = \frac{\varepsilon}{v}$.

In *dieser* Arbeit habe ich nun für die Energie ε die Formel benutzt, wie sie aus der Zustandsgleichung von Clausius[1]) folgt, nämlich:

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v + \beta},$$

wo β eine Konstante und A eine unbekannte Temperaturfunktion darstellt. Ebenso ist $\psi(t)$ eine unbekannte Temperaturfunktion.

Mit $\beta = 0{,}357$ nach Sarrau finde ich für CO_2 in § 1:

(V)

$t =$	$-25°$	-10	0	10	20	25	28	30	$31{,}12$
$\zeta =$	$1{,}27$	$1{,}30$	$1{,}49$	$1{,}91$	$2{,}79$	$3{,}21$	$5{,}33$	$12{,}5$	$200{,}6\ \mu\mu$.

Diese Zahlen schließen sich deshalb sehr gut den Werten nach (IV) an. In dieser Arbeit habe ich darum diese Zahlen als erste angenäherte Werte für die Dicke der Kapillarschicht von CO_2 betrachtet. Durch ein Annäherungsverfahren wurde nun weiter mit Hilfe der *vollständigen* Relation (I) für ζ berechnet:

(VI)

$t =$	$-10°$	0	10	20
$\zeta =$	$1{,}6$	$1{,}78$	$2{,}91$	$3{,}51\ \mu\mu$.

Auch durch Integration von (I), sowohl zwischen $0°$ und $30°$ als zwischen -30 und $+30$ wird ζ berechnet.

Die Mittelwerte von ζ, die nach dieser verschiedenen Weise hier für Kohlensäure gefunden sind:

(VII)

$t =$	$-30°$	-10	0	10	20
$\zeta =$	$1{,}46$	$1{,}7$	2	$2{,}6$	$3{,}6$

Wie es sein muß, sind die Werte nach (V) kleiner wie die nach (VII).

In § 2 wurde *auf ganz andere Weise* die Dicke ζ der Kapillarschicht bestimmt. Stellen wir nämlich wieder die Kapillarenergie[2]) (numerisch = Oberflächenspannung) durch H dar und sind p_N und p_T die Drucke in einer Richtung senkrecht, bzw. parallel der Oberfläche der Kapillarschicht, so ist:

(VIII) $$H = (p_N - p_T)\zeta \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{H}{p_N - p_T}.$$

---

1) In ihrer verallgemeinerten Form: $p = Tf(v) - \frac{\varphi(t)}{(v+\beta)^2}$.

2) Exakter: Die *Änderung* der *Freien* Energie bei der Bildung der Kapillarschicht.

Wenn S_N und S_T die Kohäsionen in den besagten Richtungen darstellen, so ist also, da der kinetische Druck *unabhängig* von der Richtung ist:

$$p_N - p_T = S_T - S_N.$$

Wenn wir deshalb der Kürze halber die Mittelwerte von S_T ohne Strich schreiben, so ist nach (VIII):

$$\zeta = \frac{H}{S_T - S_N}. \tag{IX}$$

Ist $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht, so finden wir mit Hilfe von (IX):

$$H = \zeta (S_T - S_N) = \tfrac{1}{2} a \zeta \left\{ \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}} \right\}^2,$$

wobei wir vorläufig angenommen haben, daß die Kohäsionen in der Flüssigkeit bzw. in den Dampf durch die Laplaceschen Formeln $a\varrho_1^2$ und $a\varrho_2^2$ gegeben werden.

Setzt man weiter:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}{\frac{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}}{2}} = \eta' \quad \text{und} \quad \frac{\eta' + 1}{2} = \eta,$$

so findet man für die Zahl $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten in der Kapillarschicht:

$$\mathfrak{N} = \frac{a (\varrho_1 - \varrho_2)^2}{\eta \left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2} \right) H} \sqrt[3]{\frac{M}{N}}, \tag{X}$$

wo N die Zahl der Molekeln in einem Grammolekel (Avogadrosche Konstante) und M das Molekulargewicht darstellt.

Wollen wir aber unsere Ergebnisse für Kohlensäure in § 2 vergleichen mit denen in § 1, so müssen wir den Ausdruck $a\varrho^2$ oder a/v^2 ersetzen durch den Ausdruck $\frac{a}{(v+\beta)^2}$ von Clausius und Sarrau. Mit Hilfe der Werte von β und a nach Sarrau finde ich für CO_2 mit Hilfe der auf diese Weise korrigierten Formel (X):

(XI)

$t =$	$-25°$	-10	0	10	20	28
$\mathfrak{N} =$	3	3,6	4,2	5,1	7	11,4
$n =$	2,7	3,4	4	4,9	6,9	11,3
$\zeta =$	1,6	2	2,3	2,8	3,2	6,1 $\mu\mu$.

Wie wir sehen, sind die Werte nach (XI) *sehr gut im Einklang mit den Werten* (VII) *in § 1, nach einer ganz anderen Methode gefunden.*

Außerhalb Kohlensäure gibt es nur zwei Körper, wofür die Daten, nötig für meine Berechnungen, gegeben sind. Wir müssen uns auf Benzol und Äther beschränken. Aus Mangel an einer besseren Zustandsgleichung haben wir weiter für diesen Körper die van der Waalssche Zustandsgleichung benutzt. Auf diese Weise fand ich nach meiner Theorie für die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht von

Benzol[1])

$t = 5{,}4°$	50	80	100	150	200	250	275	280
$\mathfrak{N} = 2{,}4$	3	3,2	3,4	3,5	4	6,4	10,8	16

Auf ähnliche Weise habe ich für Äther berechnet:

Äther[2])

$t = 0°$	20	50	80	120	170	190	193
$\mathfrak{N} = 2{,}4$	3,3	3,3	4,2	5	7,8	16,4	21,5

1) Schmelzpunkt: 5,4°. Kritische Temperatur: 288,5°.
2) Schmelzpunkt: — 117,5°. Kritische Temperatur: 194,5°.

(Eingegangen 3. September 1919).

4. *Bewegung und Ladung kleiner Teilchen im ionisierten elektrischen Feld;* *von F. v. Hauer.*

Gelegentlich von Versuchen[1]) über den Einfluß von α-Strahlung auf die Bewegung ultramikroskopischer, in einem luftgefüllten Kondensator schwebender Teilchen (Zigarettenrauch, Öltröpfchen usw.) wurde beobachtet, daß diese Teilchen völlig andere Bewegungserscheinungen zeigen, wenn der Kondensatorraum mit α-Strahlung erfüllt ist, als ohne diese.

Normalerweise (d. h. ohne α-Strahlung) zeigen solche Teilchen, wie bei den bekannten Versuchen von Ehrenhaft, Millikan u. a., ohne elektrisches Feld neben starker Brownscher Bewegung eine mehr oder weniger ausgeprägte Fallbewegung. Bei Einschalten eines elektrischen Feldes wird der Bewegungszustand eines Teiles der Teilchen nicht geändert (ungeladene), während ein anderer Teil, je nach dem Sinne der elektrischen Ladung der Teilchen, einen Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung des elektrischen Feldes oder gegen diese erfährt. Man sieht dabei deutlich, wie die offenbar teils positiv, teils negativ geladenen Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit aneinander vorbeischwebend der negativen bzw. positiven Kondensatorplatte zueilen.

Ist der Raum zwischen den Kondensatorplatten jedoch stark ionisiert, so ändert sich das Bild völlig. Beim Einschalten des elektrischen Feldes wandern die Teilchen nicht aneinander vorbei, sondern es bildet sich ungefähr in der Mitte des Kondensators eine Grenzfläche aus und alles, was ober dieser Grenzfläche ist, wandert gegen die obere Kondensatorplatte,

1) Die ursprüngliche Absicht war, den Stoß und die Umladung durch das α-Teilchen zu beobachten und so zu Ehrenhafts „elektrischer Wage" mit Hilfe der bekannten Ladung des α-Teilchens gleichsam „elektrische Gewichte" zu schaffen.

alles, was unterhalb ist, gegen die untere Platte. Die Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens bleibt längs seines Weges nicht konstant, sondern wird mit abnehmender Entfernung von der Platte, auf welche das Teilchen zueilt, stets größer. Da die gleiche Erscheinung, wie ich annehme, auch bei dem von Przibram[1]) angegebenen Versuch zur Demonstration der Reichweite der α-Strahlen auftritt und möglicherweise auch den Wanderungssinn kolloider Teilchen bei der Elektrolyse beeinflußt, sei es mir gestattet, hierauf etwas näher einzugehen.

Als Ursache für das erwähnte Verhalten müssen wir die durch das Anlegen des elektrischen Feldes gestörte Ionenverteilung ansehen, die einerseits durch Ausbildung einer entgegengesetzt geladenen Ionenschicht an jeder Elektrode die Feldstärke ändert, andererseits die in dieser Schicht befindlichen ultramikroskopischen Teilchen durch Ionenadsorption auflädet.

Um Ionenverteilung und Verlauf der Feldstärke im Kondensator zu berechnen, schreiben wir[2]):

$$n_1 - n_2 = \frac{1}{4\pi e}\frac{dX}{dx},$$

$$n_1 e c_1 X + n_2 e c_2 X = i,$$

$$q - \alpha n_1 n_2 = c_1 \frac{d}{dx}(n_1 X),$$

$$q - \alpha n_1 n_2 = -c_2 \frac{d}{dx}(n_2 X).$$

Dabei bedeuten n_1 und n_2 die Ionendichten (Anzahl in einem bestimmten Volumen, dividiert durch dieses Volumen) der positiven bzw. negativen Ionen, e die Ladung des Elementarquantums ($= -4{,}7 \cdot 10^{-10}$ elst. E.), X die elektrische Kraft in der x-Richtung, d. h. senkrecht zu den Kondensatorplatten; c_1 und c_2 die Beweglichkeiten der positiven bzw. negativen Ionen, i die Stromdichte im Kondensator, q die Zahl der im cm^3 pro Sekunde erzeugten Ionen jedes Vorzeichens und α den Wiedervereinigungskoeffizienten.

---

1) Karl Przibram, Wien. Ber. 121. II A. S. 221. 1912 und Elster-Geitel-Festschrift.

2) Vgl. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, S. 65.

Setzen wir näherungsweise $c_1 = c_2 = c$ und $\alpha = 0$ (Sättigungsstrom), so ergeben die obigen Gleichungen

$$n_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{ec}\,\frac{1}{X} + \frac{1}{4\pi e}\,\frac{dX}{dx}\right)$$

und

$$q = c\,\frac{d}{dx}\left(\frac{i}{ec} + \frac{1}{4\pi e}\,X\,\frac{dX}{dx}\right) = \frac{c}{4\pi e}\,\frac{d}{dx}\left(X\,\frac{dX}{dx}\right);$$

daraus erhalten wir durch Integration

$$X\,\frac{dX}{dx} = X_0\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 + \frac{4\pi e q}{c}\,x$$

(Index 0 für die entsprechenden Werte an der in $x = 0$ befindlichen Kondensatorplatte) und durch nochmalige Integration

$$X^2 = \frac{4\pi e q}{c}\,x^2 + 2\,X_0\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 x + X_0^2$$

oder da

$$X_0^2 = X_d^2$$

(Index d für die entsprechenden Werte an der zweiten in $x = d$ befindlichen Platte) ergibt sich

$$2\,X_0\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 = -\,\frac{4\pi e q}{c}\,d$$

und daher schließlich

(A) $$X^2 = \frac{4\pi e q}{c}\,(x^2 - x\,d) + X_0^2.$$

Setzen wir den hieraus abzuleitenden Ausdruck für $X\,\frac{dX}{dx}$ in die Gleichung für n_1 ein, so erhalten wir

(B) $$n_1 = \frac{1}{2X}\left[\frac{i}{ec} + \frac{q}{2}\,(2x - d)\right]$$

und aus den Ausgangsgleichungen

(C) $$n_1 - n_2 = \frac{q}{e}\,\frac{1}{X}\,(2x - d).$$

Die Gleichungen (A) bis (C) geben uns den Verlauf der elektrischen Feldstärke, der Ionendichte und des aus der ungleichen Ionenverteilung resultierenden Ladungsüberschusses als Funktion der Entfernung von der einen Platte. Die elektrische Feldstärke hat ihren maximalen Wert X_0 an den Kondensatorplatten ($x = 0$ und $x = d$) und nimmt gegen die Mitte zu ab bis zum kleinsten Wert ($X_{\min}$) in $x = d/2$, wo

$$X^2 = X^2_{\min} = X_0^2 - \frac{n e q}{c}\,d^2.$$

Die positiven Ionen sind vor der negativen Kondensatorplatte und die negativen Ionen vor der anderen Platte stark verdichtet, so daß sich vor jeder Kondensatorplatte eine Ionenatmosphäre mit einer Raumladung von entgegengesetztem Vorzeichen befindet. Die Dichte dieser Raumladung ist durch Gleichung (C) gegeben.

Denken wir uns nun in diesen Kondensatorraum ein kleines Teilchen (etwa Zigarettenrauch) eingeführt, so kann dieses aus verschiedenen Ursachen einen Bewegungsantrieb erfahren. Die Influenz kann, da das elektrische Feld jetzt nicht homogen ist, eine Bewegung zur näherstehenden Kondensatorplatte veranlassen oder es kann das Teilchen infolge einer wahren elektrischen Ladung gezwungen sein, dem Felde zu folgen. Diese wahren elektrischen Ladungen müssen (abgesehen von den schon bei der Erzeugung der Teilchen entstandenen Ladungen, die ja zu andern schon eingangs beschriebenen Bewegungen führen) der das Teilchen umgebenden Ionenatmosphäre entstammen. Es werden aus diesen Ionen beiderlei Vorzeichens gegen das Teilchen durch das elektrische Feld des Kondensators geführt, und zwar, wenn das Teilchen näher der positiven Platte ist, mehr negative Ionen als positive, da der Raum zwischen dem Teilchen und der negativen Platte, aus dem alle negativen Ionen zum Teilchen wandern, größer ist, als der zwischen der positiven Platte und dem Teilchen, aus dem alle positiven Ionen gegen das Teilchen geführt werden. Es resultiert somit aus diesem Ionenstrome eine elektrische Aufladung des Teilchens, die das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie die näherstehende Kondensatorplatte und somit eine Anziehung gegen diese. Endlich können die molekularen Stöße der Wärmebewegung oder, wenn man so sagen will, der Gasdruck Ionen gegen das Teilchen treiben, wobei dann das Teilchen natürlich eine Ladung des gleichen Vorzeichens wie die umgebende Ionenatmosphäre erhalten muß, woraus ebenfalls eine Anziehung gegen die näherstehende Platte resultiert.

Um nun diese verschiedenen Ursachen quantitativ zu überblicken, betrachten wir einen speziellen Fall, der ungefähr den von mir realisierten Versuchsbedingungen entspricht. Wir setzen nämlich

$$c = 1{,}4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \Big/ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}, \quad q = 6{,}10^{7}, \quad d = 0{,}1 \text{ cm}$$

und die an den Kondensator angelegte Potentialdifferenz gleich 100 Volt (= $\frac{1}{3}$ der absoluten Einheit). Es wäre demnach die elektrische Feldstärke im nichtionisierten Kondensator

$$X = \frac{10}{3} \text{ abs. E.}$$

und es wird

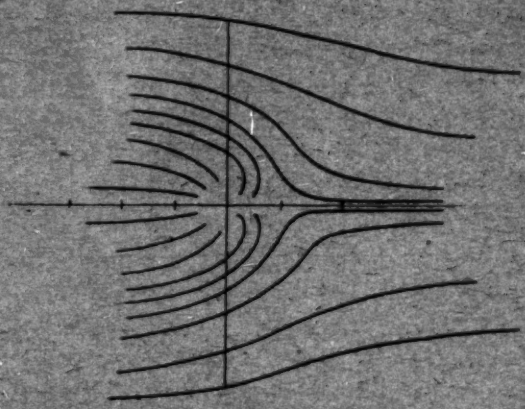
$$X_0^2 - X_{\min}^2 = \frac{\pi e q}{c} d^2 = 2{,}10^{-6}.$$

(Alles in abs. st. Einh. ausgedrückt.)

Die Differenz zwischen maximalem und minimalem Wert der Feldstärke ist also so klein, daß das Feld praktisch doch als homogen angesehen werden kann. Die Wirkung dieser geringen Inhomogenität auf die Influenzladungen kleinerer Teilchen (Radius $r = 10^{-4}$ bis 10^{-5} cm) ist zu vernachlässigen; denn man sieht leicht, daß diese Influenzladungen von der Größenordnung $r^2 X$ sind und, da ihr Abstand ungefähr gleich r und sehr klein, ist die auf das Teilchen wegen der Influenz ausgeübte Kraft von der Größenordnung $r^3 X \frac{dX}{dx}$, was nach Gleichung (A) zu Kräften von 10^{-17} Dyn führt, die gegen die Schwerkraft schon zu vernachlässigen sind, die beobachteten Kräfte aber sind wesentlich größer als die auf die Teilchen wirkende Schwerkraft.

Wir haben es demnach mit einer wahren Ladung des Teilchens zu tun, wie dies auch durch einen weiter unten angegebenen Versuch mit einem größeren Probekörper bestätigt wird. Wir haben nun zu untersuchen, inwieweit diese Ladung durch den oben erwähnten Ionenstrom hervorgerufen sein kann. Auf das ungeladene Teilchen (mit dem Radius r) in der Entfernung x müssen durch das Feld alle Ionen eines Vorzeichens, die in dem Zylinder mit der Grundfläche $r^2\pi$ und der Höhe x erzeugt werden, getrieben werden, also in der Sekunde $r^2 \pi x q$ Ionen. Vom entgegengesetzten Vorzeichen werden in der Sekunde $r^2 \pi (d - x) q$ Ionen gegen des Teilchen getrieben, also erhält es pro Sekunde, eine Ladung von $r^2 \pi (d - 2x) q$ Ionen, d. h. mit unseren Zahlenwerten höchstens 0,2 Ionen pro Sekunde. Dies reicht nicht hin, um die beobachteten Bewegungserscheinungen zu erklären, denn innerhalb einiger Sekunden wird ein Teilchen dabei unter wachsender Geschwindigkeit an die

Platte bewegt; es muß also in dieser Zeit eine ganze Anzahl von Ionenladungen übernommen haben, was durch diesen Ionenstrom um so weniger bewirkt werden kann, als eine auf dem Teilchen vorhandene geringe Ladung bereits das Feld in der nächsten Umgebung so deformiert, daß weitere Aufladung durch Ausweichen des Ionenstromes verhindert wird (vgl. Fig. 1, wobei jedoch der Dichte der Kraftlinien keine Bedeutung zukommt.)



Störung des elektrischen Feldes um eine Ladung von 70 ε (1 Sekt. = 10^{-4} cm).

Fig. 1.

Als weiterer Grund zur Ausbildung einer elektrischen Ladung wurde der Zusammenstoß mit Ionen infolge der Wärmebewegung derselben genannt. Gleichung (C) ergibt unmittelbar an der Platte einen Überschuß von 5,10[1] Ionen ([illegible]) eines Vorzeichens nach Einsetzen der angegebenen Zahlenwerte. Behandeln wir nun die Ionen wie gewöhnliche Gasmolekel, so wird durch den Stoß dieser Ionen gegen das Teilchen, wenn N die Zahl der Gasmolekel im cm^3, ν die Zahl der Stöße gegen ein cm^2 der Wand bedeutet, in der Sekunde die Ladung von $4 r^2 \pi \nu \frac{n_1}{N}$ Ionen dem Teilchen mitgeteilt, das ist mit $\nu = 1{,}6 \cdot 10^{23}$, $N = 2{,}10^{19}$ die Ladung von einem Ion pro Sekunde. Dabei ist noch zu bedenken, daß eine bereits vorhandene Ladung des Teilchens abstoßend wirkt, während andererseits die durch das Ion selbst auf dem Teilchen hervorgerufene Influenz es gegen das Teilchen treibt. Der erste

Umstand kann aber die Aufladung nur wenig behindern, da die gesamte Arbeit, die nötig ist, um ein Ion (Ladung e) auf ein Teilchen mit der Ladung von etwa $10\,e$ zu bringen, nur $\frac{10\,e^2}{r}$ Erg beträgt, also mit $r = 10^{-4}$ cm gleich $2{,}10^{-14}$ ist, während die mittlere lebendige Kraft eines Gasmolekels bei Zimmertemperatur etwa dreimal so groß ist. Dieser letztgenannte Grund kann demnach im Verein mit dem vorher genannten die Ladung mehrerer Ionen auf ein kleines Teilchen bringen, und damit eine Bewegung desselben zur näherstehenden Kondensatorplatte verursachen.

Die experimentelle Beobachtung der erwähnten Erscheinung wurde in folgender Weise durchgeführt. Auf einen Objektträger wurden zwei etwa 1 mm dicke und 3 mm breite Messing-

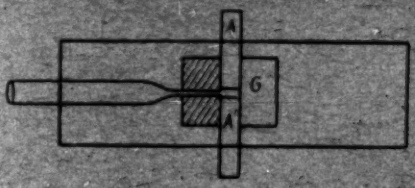


Fig. 2.

streifen ($A\,A'$) im Abstand von 1 mm aufgeklebt, rechts davon ein ebenso dickes Glasplättchen (G) und links eine Schicht Pizein, in der ein feines Kapillarröhrchen einen Luftzugang in den so gebildeten Hohlraum gestattete. Der Hohlraum wurde noch durch ein darüber gelegtes eingefettetes Deckgläschen geschlossen. Diese Kammer wurde nun vor das horizontal stehende Mikroskop gebracht und von rechts durch das Glasplättchen (G) mit dem konzentrierten Lichtkegel einer Bogenlampe beleuchtet. Bläst man durch die Kapillare Tabaksrauch usw. ein, so beobachtet man in diesem Dunkelfeld die Brownsche Bewegung der Teilchen und schaltet man an $A\,A'$ eine Potentialdifferenz, so sieht man die Trennung der Teilchen in positiv und negativ geladene, wie sie von Ehrenhaft und anderen beschrieben wurde. Nun wurden die durch die Messingplättchen gebildeten Teile der Kammerwände mit zwei Platinblechen (1×3 mm) überdeckt, auf denen ca. $14{,}10^{-10}$ g Po niedergeschlagen war. Um ungefähr die Stärke der durch die Po-Strahlung hervorgerufenen Ionisierung angeben zu können,

wurde angenommen, daß in dem Volumen der Kammer (v) der Bruchteil $\frac{v}{V} J$ Ionen erzeugt werde, wobei J die gesamte von dieser Po-Menge pro Sekunde erzeugte Ionenmenge und V das Volumen einer Kugel bedeutet, deren Radius gleich ist der Reichweite der Po-Strahlung. (Der Fehler, der in dem Umstande liegt, daß die Dichte der α-Strahlung mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt, wird teilweise dadurch korrigiert, daß die Zahl der erzeugten Ionen längs des Strahles mit der Entfernung zunimmt.) So wurde die oben verwendete Zahl q berechnet. Durch das (nach unten weitere) Kapillarröhrchen konnte leicht Tabaksqualm eingeblasen werden. Da man es dabei aber mit einer schlecht definierten Substanz zu tun hat, nahm ich auch Na-, Hg- und Öldampf; von diesen wurde ein Tröpfchen in einem in der Mitte erweiterten Glasröhrchen kräftig erwärmt und ihr Dampf durch die ausgezogene Spitze des Glasröhrchens in die Kapillare geblasen. Ohne α-Strahlung waren die Öltröpfchen fast alle ungeladen, bei Anwesenheit der Strahlung aber zeigten alle genannten Substanzen das gleiche Verhalten: Beim Einschalten des elektrischen Feldes wurden alle Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit gegen die näherstehende Kondensatorplatte befördert (gegen A und A').

Um auch noch den experimentellen Beweis zu führen, daß in einem ionisierten elektrischen Feld suspendierte Teilchen eine wahre elektrische Ladung erhalten, bediente ich mich folgender Anordnung: In einem Glasröhrchen von 20 cm Länge war an einem Kokonfaden ein Klümpchen Klebwachs aufgehängt; zu beiden Seiten desselben waren innerhalb des Röhrchens zwei Blechstreifen, die mit den Polen einer Akkumulatorenbatterie (130 Volt) verbunden werden konnten. Unterhalb des Glasröhrchens wurde ein Ra-Präparat gelegt (dasselbe war mit einem Deckgläschen zugedeckt, so daß hier keine α-Strahlen, sondern nur β- und γ-Strahlen wirkten); auf der Vorderseite des Röhrchens war ein Fensterchen (ein Deckgläschen) angebracht, durch welches mit einem schwach vergrößerndem Mikroskop die Ablenkungen des Kokonfadens, d. h. des Wachsklümpchens beobachtet werden konnten. Durch Ein- und Ausschalten des elektrischen Feldes bzw. der Strahlung war es leicht möglich, sich zu überzeugen, daß dieses grobe Teilchen

sich qualitativ gleich verhält, wie die kleinen und daß die Ursache hiervon eine wahre Ladung ist, die auch nach Entfernung des Ra auf dem Teilchen bleibt, aber rasch verschwindet, wenn die Ra-Strahlung ohne Gegenwart des elektrischen Feldes ionisiert. Die Aufladung des Teilchens ging hier ganz allmählich vor sich, die positive langsamer als die negative. In dieser Weise sollen die Versuche noch weiter fortgesetzt werden.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die beschriebene Erscheinung eine Fehlerquelle bei Potentialmessungen in ionisierten Gasräumen mit Hilfe von Sonden darstellt. Die Voraussetzung bei diesen Messungen ist, daß die eingeführte Sonde, abgesehen von der durch ihre Ausdehnung hervorgerufenen Störung, das Potential der Stelle, an der sie sich befindet, annimmt, so wie es vor Einführung der Sonde war. Eine *isolierte* Sonde müßte dies natürlich ohne Ladungsaufnahme tun, die Elektrizitätsaufnahme ist nur nötig, wenn mit der Sonde noch andere Körper (Elektrometerblättchen, Zuleitung) verbunden sind und daher ebenfalls auf das Potential der Sonde gebracht werden müssen. Nimmt aber, wie aus obigem hervorgeht, auch eine isolierte Sonde Ladung auf, so hat sie nicht das Potential, das an der betreffenden Stelle vor ihrer Einführung herrschte, und ein mit ihr verbundener Elektrometer ebensowenig.

Zusammenfassung.

In einem ionisierten elektrischen Feld suspendierte Teilchen nehmen aus der sie umgebenden Ionenatmosphäre eine elektrische Ladung auf, deren Vorzeichen durch die Lage des Teilchens im Feld bestimmt ist. Die Ursache hiervon dürfte in der Hauptsache in der Ausbildung von einseitig geladenen Ionenschichten durch die Wirkung des Feldes und der Adsorption bzw. Entladung dieser Ionen an dem suspendierten Teilchen bestehen. Um neben der Wärmebewegung und der elektrostatischen Anziehung der Ionen gegen das durch die Ladung des Ions influenzierte Teilchen noch andere besondere Adsorptionskräfte anzunehmen, liegt hierbei keine Notwendigkeit vor.

Die gleiche Erscheinung liegt dem Przibramschen Kondensator zur Demonstration der Reichweite der α-Strahlen zugrunde. Sie muß ferner die Ladung suspendierter Teilchen in Flüssigkeiten beeinflussen und ist wohl die Ursache, daß manche Kolloide bei der Elektrolyse nach beiden Elektroden wandern; sie muß bei der Ladung sehr großer Ionen in Luft mitspielen und Potentialmessungen in ionisierten Feldern stören.

Freiburg im Uechtland, September 1919.

(Eingegangen 9. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen

und für wissenschaftliche Zwecke

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P. | System Gaede, D. R. P. angemeldet

Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen. Eine Konstruktion nach Angaben.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. | **Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.**

Alle Arten von Luftpumpen;

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-Luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Hebelapparate.

Inhalt.

1. H. Dember und H. Ulbe. Über die Gestalt des stetigen Spektrums . . . . . Seite 313
2. F. Reuter. Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorie der verdünnten Lösungen 324
3. H. Dember und H. Ulbe. Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der stetigen Geschwindigkeitsänderung von Luft- und Wasserteilchen in verschiedenen Höhen über dem Horizont 335
4. Richard Gans. Die potentielle Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve 379
5. Richard Gans. Die Trägheitsmomente der Magnetonen 396
6. Richard Gans. Berichtigung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichtes durch ein inhomogenes Medium“ 399
7. Richard Gans. Oszillationen von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie 400
8. K. Hahn. Die ungestörte Trägheitsmomentfläche von Rechteck und Quadrat 416

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien (Würzburg, Pleicherring 2), Adresse des Verlages: Leipzig, Salomonstraße 18 b.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den teuren Druck für die verwickelteren Formeln nicht zu vermehren.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls größere Auflagen gewünscht werden, so muß dies spätestens beim Korrekturlesen an die Druckerei auf besonderen Zettel bemerkt werden. Alle weiteren, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bitten wir an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitige Abdrucke der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzungen derselben bedürfen der ausdrücklichen Erlaubnis seitens der Verfasser und der Verlagsbuchhandlung.

Die Zeichnungen sind in möglichst übersichtlicher Anordnung und Ausführung der Figuren beizufügen. Die Figuren sollen möglichst in den Text gedruckt werden. In die Figuren dürfen keine Buchstaben eingetragen werden, die in der Schrift des Manuskriptes nicht vorkommen.

Literatur wird am Schluß oder unten auf den Seiten des Manuskriptes in dem Text entnommener Reihenfolge zusammengestellt. Die Zitate im Text erfolgen durch Hochstellung der betreffenden Ziffern mit Klammern. Die Zitierweise der Titel, Namen und Jahreszahlen richte man nach

1920. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes;*

von H. Dember und M. Uibe.

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 69, 31. Juli 1917.)

Sechster Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1.

Der unbedeckte Taghimmel und der sternenklare Nachthimmel werden als mehr oder weniger flaches Gewölbe und nicht als vollkommene Halbkugel gesehen. Im allgemeinen ist die Form des Gewölbes mit großer Annäherung eine Kugelkalotte.[1]) Die Mehrzahl der Wege, diese Erscheinung zu erklären, welche nach Ptolemäus für uns „eine feste, stetige und unveränderbare Vorstellung" bildet[2]), ist von alters her psychologischer Art gewesen. Aristoteles und Ptolemäus haben die Theorie der Luftperspektive geschaffen, die in den dichteren lichtabsorbierenden Luftschichten des Horizonts die Ursache sieht, welche uns die Objekte lichtschwach und dadurch fern erscheinen läßt. Malebranche und Wallis erklären die weitere Entfernung des Horizonts gegenüber dem Zenit dadurch, daß in der horizontalen Blickrichtung eine große Anzahl von Objekten gesehen wird, deren Distanzen bekannt sind und daß, mit Hilfe der Kenntnis dieser, unbewußt Entfernungsschätzungen vorgenommen werden, die wegen des Vorhandenseins der Merkmale in der Horizontalen größer ausfallen als in der Richtung zum Zenit, wo die Zwischenzeichen fehlen. Mit dieser Theorie verwandt ist diejenige Alhazens. Er setzt an die Stelle des unbewußten Vergleichs von Ent-

1) H. Dember und M. Uibe, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 139—148. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

2) Pernter-Exner, Meteorolog. Optik, 1910, Abschnitt 1 von J. M. Pernter.

fernungen den Vergleich der Größe von Gegenständen: Zwischen uns und dem Horizont sehen wir eine große Anzahl von Gegenständen, die uns der Größe nach bekannt sind. Am Horizont, wo der Himmel die Erde scheinbar berührt, erscheinen sie uns sehr klein und wir schätzen daher die Entfernung sehr groß ein, während wir in der vertikalen Blickrichtung durch das Fehlen von vergleichbaren Objekten getäuscht werden und den Zenit für nahe halten. In neuerer Zeit hat Helmholtz[1]) diese Theorie in Verbindung mit der Luftperspektive vertreten.

Alle diese Vorstellungen[2]) haben den großen Mangel, daß sie wohl erklären können, warum der Horizont weiter erscheint als der Zenit oder der Himmel in einer anderen Richtung, aber daß sie versagen bei einem Vergleich zweier Entfernungen in Richtungen, die beide zwischen Horizont und Zenit liegen, wo nun bei beiden die vergleichbaren Distanzen oder Gegenstände fehlen. Von diesem Mangel frei ist die Gausssche Blickrichtungstheorie, die behauptet, daß infolge physiologischer Bedingungen des menschlichen Sehapparates, Winkel, mit stirnwärts gedrehten Augen bei normaler Kopfhaltung beobachtet, kleiner erscheinen als in horizontaler Blickrichtung. Ein eifriger Verfechter dieser Theorie ist J. M. Pernter. In einem vorangehenden Bericht konnte gezeigt werden, daß sich die Blickrichtungstheorie mit den Beobachtungen schwerlich vereinbaren läßt. Die Hauptgründe, die gegen ihre Grundlagen und Anwendbarkeit sprechen, sind die große Verschiedenheit der Höhe von Tag- und Nachthimmel, der Einfluß der Himmelshelligkeit und meteorologischer Faktoren, sowie die Tatsache, daß man bei sternenklarer Nacht Himmelsgewölbe beobachten kann mit einem geschätzten Halbierungswert von 42,9°, also nur wenig verschieden vom Halbierungswert einer Halbkugel (45°).

Den psychologisch-physiologischen Theorien, von denen die Blickrichtungstheorie heute das größte Ansehen genießt, stehen

1) H. von Helmholtz, Physiologische Optik, 2. Auflage. 1896.

2) Die drei vorangehenden Theorien sind von ihren Schöpfern gerade so wie die Blickrichtungstheorie, ursprünglich ausgedacht worden, um die scheinbare Vergrößerung von Sonne und Mond in der Nähe des Horizontes zu erklären. Man hat dieses Problem mit dem von der Gestalt des Himmelsgewölbes schon frühzeitig verquickt, obgleich die experimentellen Grundlagen dazu so gut wie vollständig fehlen.

zwei gegenüber, welche das Gewölbe als nicht scheinbar oder durch „Täuschung" hervorgerufen ansehen, sondern es, durch physikalische Umstände bedingt, als reell vorhanden erklären.

Die Atmosphäre bildet um die Erde eine konzentrische Hülle, deren Höhe man, soweit es sich um optische Vorgänge handelt, nach den neuesten photogrammetrischen Aufnahmen[1]) der Nordlichtstrahlen zu 250 km ansetzen kann. Nimmt man mit Hobbes an, daß die wirkliche Grenze der Atmosphäre auch die uns sichtbare ist, so errechnet sich, bei Zugrundelegung der Form einer Kugelkalotte, ein Gewölbe mit einem zu schätzenden Halbierungswert des Bogens Horizont-Zenit von rund 12°; ein Wert, der weit unterhalb aller beobachteten liegt. Das klare Himmelsgewölbe Hobbes müßte viel flacher gesehen werden, als es bisher beobachtet worden ist.

Eine zweite physikalische Anschauung, die von Reimann geäußert worden ist, sieht die Luft als feinen Nebel an und faßt das Himmelsgewölbe auf als die „sichtbare Grenze im nicht absolut durchsichtigen Medium" Luft. Wir entnehmen über die Reimannsche Vorstellung der Meteorologischen Optik von Pernter-Exner folgende Sätze, da uns die Arbeit selbst nicht zugänglich ist: Reimann „führt die Erscheinung, daß uns im Nebel in einer gewissen Entfernung eine weiße Wand erscheint, die jeden weiteren Blick abschneidet, auf die Luft über, die eben nur wie ein sehr dünner Nebel wirke. Es ist wohl nur ein quid pro quo, wenn diese Auffassung nicht zu einem im Zenit vertieften statt gedrückten Gewölbe führen soll — abgesehen von allen sonstigen dagegensprechenden Momenten."

Die Hauptfolgerung Pernters ist richtig, aber trotzdem hat die Ansicht Reimanns einen tauglichen Kern. Sieht man nämlich die Luft nicht nur als feinen Nebel an, sondern beachtet man außerdem, daß im Sinne der Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels jede einzelne Luftmolekel tagsüber ein Lichtzentrum ist und jeder anderen Luftmolekel sowie dem Beobachter Licht zusendet, d. h. also, berücksichtigt man die Helligkeit des Himmels, so gelangt man zu einer einfachen geometrischen Darstellung der Himmelsform aus Zahlen,

1) L. Vegard u. O. Krogness, Ann. d. Phys. 51. S. 1

die mit Hilfe ganz unabhängig von diesen Betrachtungen ausgeführter photometrischer Messungen der Himmelshelligkeit erhalten worden sind.

§ 2.

Die Entfernung eines Punktes in der Atmosphäre, von dem aus eine leuchtende Luftmolekel gerade so viel Energie ins Auge des Beobachters schickt, daß eine Lichtempfindung zustande kommt, sei die maximale Sichtweite. Die maximale Sichtweite mißt daher die Entfernung, bis zu welcher sich die für uns sichtbare Atmosphöre erstreckt. Außer von der optischen Beschaffenheit der Luft ist die maximale Sichtweite noch von der Empfindlichkeit des einzelnen Auges abhängig und sie ist beim Tageshimmel für das Auge mit derjenigen Entfernung identisch, in welcher sich eine Lichtquelle (leuchtende Molekel) nicht mehr von der hellen Umgebung abhebt. Die letztere Distanz, die „kritische" Sichtweite könnte man sie nennen, bewirkt, daß wir in dem ihr gleichen Abstand in der Atmosphäre eine unterschiedslose Grenze erblicken, die von der leuchtenden Luft des Tageshimmels gebildet wird.

Besitzt eine leuchtende Luftmolekel m im Innern einer großen Luftmasse die Lichtintensität J_1, so ist die Intensität in einem Abstande s davon unter Berücksichtigung der Rayleighschen Extinktion durch die auf der Strecke s liegenden Molekeln und der unendlich vielfachen Zurückstrahlung, welche diese Molekeln durch die Umgebung erleiden

$$J_s = \frac{J_1}{s^2} \cdot e^{-hs} + \frac{J_1}{s^2} \cdot A. \tag{1}$$

Hierin bedeutet h den Extinktionskoeffizienten und A den durch Zustrahlung auf der Strecke s gewonnenen Bruchteil. In einer gleichmäßig hellen Luftmasse, deren Gesamtintensität sich in einem endlichen Intervall nicht ändert, ist der durch Extinktion auf der Strecke s verlorene Bruchteil $(1 - e^{-hs})$ von J_1 gleich dem Bruchteil A.

$1 - e^{-hs} = A$, woraus, in (1) eingesetzt, die geometrische Beziehung folgt

$$J_s = \frac{J_1}{s^2}.$$

Für eine zweite Luftmasse, in welcher jede einzelne Molekel die Lichtintensität J_2 besitzt, bekommen wir gleicherweise im Abstande r die Intensität $J_r = \frac{J_2}{r^2}$. Sind nun $J_S = J_R$ gerade diejenigen Minimalintensitäten in den Abständen S und R von der Molekel m, welche im Auge gerade eine Lichtempfindung hervorrufen können, so ist $J_1 : S^2 = J_2 : R^2$ und

$$S : R = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2},$$

wo S und R die maximalen Sichtweiten in den beiden verschiedenen Luftmassen bedeuten.

Die mit den Photometer meßbaren Helligkeiten H_1 und H_2, der leuchtenden Luftmassen sind den Intensitäten J_1 und J_2 direkt proportional, so daß gilt

$$S : R = \sqrt{H_1} : \sqrt{H_2}. \tag{2}$$

§ 3.

Die Beziehung (2) erlaubt, mit Hilfe von Messungen der Himmelshelligkeiten das zur Zeit der Messung *sichtbare* Himmelsgewölbe zu konstruieren und zu berechnen.

Tabelle 1 gibt eine Meßreihe von Himmelshelligkeiten wieder, die, wie die folgenden auf Teneriffa ausgeführten, zum Teil[1]) einer systematischen Untersuchung der Himmelshelligkeiten entnommen werden, die der eine von uns (Uibe) auf Anregung von Hrn. Prof. O. Wiener ausgeführt hat und die später als Dissertation veröffentlicht werden soll. φ bedeutet die mittlere Höhe der Sonne über dem Horizont während der photometrischen Messung, zu deren Ausführung ein Wienersches Himmelsphotometer diente. ζ ist die Zenitdistanz des

Tabelle 1.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 20{,}0°$ vormittags	15	0,96	0,98	1,02
	30	1,18	1,09	1,09
	45	1,42	1,19	1,22
	60	2,03	1,42	1,42
	75	3,20	1,79	1,78

1) Es sind die vom 22. Juni 1916. Martin Uibe, Über die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichts am klaren Himmel. Math.-Phys. Kl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Abhandlungen: Bd. 35. Nr. 6. 1918.

beobachteten Flächenstücks am Himmel und H die gefundene Himmelshelligkeit, unter der Festsetzung, daß im Zenit die Helligkeit $H = 1$ herrscht. Die Messungen sind in einem Azimut von 90°, vom Sonnenvertikal aus gezählt, vorgenommen worden. Dieses Azimut wurde aus weiter unten ersichtlichen Gründen für die Darstellung bevorzugt.

In der Fig. 1 sind von O aus, dem Standpunkte des Beobachters, unter dem zugehörigen Zenitabstand ζ die Strecken

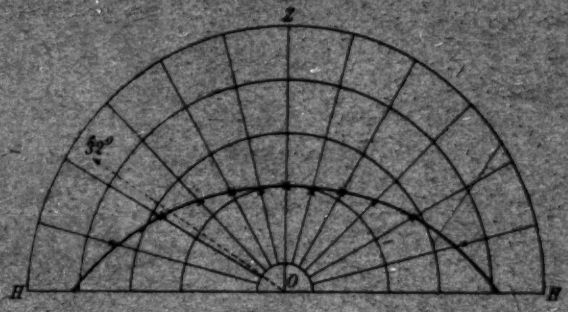


Fig. 1.

$\sqrt{H}$, welche den maximalen Sichtweiten entsprechen, als Vektoren aufgetragen und ihre Endpunkte miteinander verbunden. Ein Ansetzen des Zirkels lehrt, daß die so erhaltene Kurve mit sehr großer Genauigkeit ein Stück eines Kreises ist.

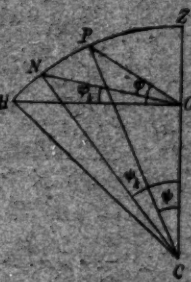


Fig. 1a.

In einem vorangehenden Bericht konnten wir zeigen, daß die Kugelkalotte eine gute Darstellung des Hauptverlaufs der Himmelsform gibt. Diese geometrische Eigenschaft gestattet eine Prüfung unserer Annahme, indem sich die nach der Kugelkalottentheorie errechneten Radiivektoren direkt gleich den photometrisch gefundenen $\sqrt{H}$ in einer bestimmten Richtung ergeben müssen, wenn der Radiusvektor der Kalotte im Zenit gleich 1 und die Helligkeit in dieser Richtung ebenfalls gleich 1 gesetzt wird.

In der vorstehenden Zeichnung (Fig. 1a) bedeutet HZ die Hälfte des kalottenförmigen Bogens des vom Beobachter in O gesehenen Himmels. Ist N am Himmel ein beliebiger

Punkt, der unter dem wahren Winkel φ_k über dem Horizont liegt, so ist es unsere Aufgabe, das Verhältnis der Strecken $NO:OZ$ zu berechnen, wenn φ_k und die gemessene Höhe φ des geschätzten Halbierungspunktes P bekannt sind. Statt φ führen wir den zugehörigen Zentriwinkel ψ ein. Beide sind durch die Gleichung

$$\cos^3\psi - {}^3/_4(1 - {}^1/_3\,\mathrm{tg}^2\varphi)\cos\psi = {}^1/_4(1 - \mathrm{tg}^2\varphi)$$

miteinander verbunden. Aus Dreieck NOC folgt

$$NO = \sin\psi_k : \cos\varphi_k .$$

Weiter ist $OZ = 1 - OC$ und da $OC = 1 \cdot \cos 2\psi$, so wird $OZ = 2\mathrm{sin}^2\psi$ und

$$\frac{NO}{OZ} = \frac{\sin\psi_k}{\cos\varphi_k \cdot 2\sin^2\psi} .$$

Hierin bestimmt sich der Winkel ψ_k aus

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = OC \cdot \cos\varphi_k = \cos 2\psi \cdot \cos\varphi_k .$$

Unser $\sqrt{H}:\sqrt{1}$ muß, falls die oben gegebene Darstellung richtig ist, für jeden Punkt am Himmel dem Ausdruck für $NO:OZ$ gleich sein. Mit seiner Hilfe haben wir die Werte für $\sqrt{H}$ in den Tabellen berechnet. Die Übereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen ist, unter Berücksichtigung der Fehler himmelsphotometrischer Messungen und mitspielender zufälliger Umstände in der Atmosphäre besonders bei den in Güímar ausgeführten Beobachtungen (1—12) eine recht gute.

Daß die Möglichkeit der Konstruktion der Form des sichtbaren Himmelsgewölbes mit Hilfe der durch Himmelshelligkeiten gemessenen Sichtweiten keinem rechnerischen Zufall zu verdanken ist, darin bestärkt die Tatsache, daß der geschätzte Halbierungspunkt des Bogens Horizont-Zenit in der Figur 32° über dem Horizont liegt. Aus 204 in den Monaten Februar bis Juni 1916 ausgeführten Schätzungen des Halbierungswertes am klaren Taghimmel hatte sich ein mittlerer Wert dieses Winkels von 32,03° ergeben.

In den Tabellen 2—10 und den dazugehörigen Figuren 2 bis 10 folgen eine Anzahl weiterer Himmelshelligkeitsmessungen, Berechnungen und Formkonstruktionen für verschiedene Sonnenhöhen. Es sind jedesmal die Halbierungswerte der Gewölbe-

Tabelle 2.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 3{,}5°$ vormittags	15	1,09	1,04	1,03
	30	1,23	1,11	1,11
	45	1,61	1,27	1,27
	60	2,36	1,54	1,53
	75	3,34	1,83	1,95
	85	6,05	2,46	2,36

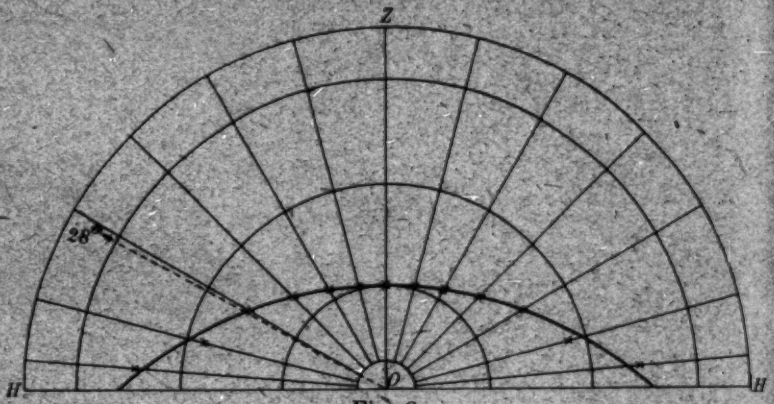


Fig. 2.

Tabelle 3.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 22{,}7°$ nachmittags	15	1,00	1,00	1,02
	30	1,08	1,04	1,10
	45	1,54	1,24	1,23
	60	2,01	1,42	1,45
	75	3,21	1,79	1,78
	80	3,92	1,98	1,92

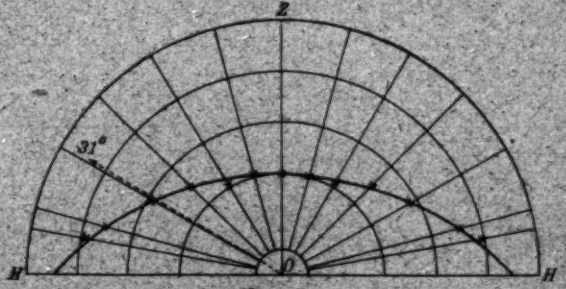


Fig. 3.

Tabelle 4.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
23. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 20{,}0°$ vormittags	15	1,08	1,04	1,02
	30	1,21	1,10	1,09
	45	1,54	1,24	1,22
	60	2,04	1,43	1,42
	75	3,02	1,74	1,78
	80	4,22	2,05	1,85

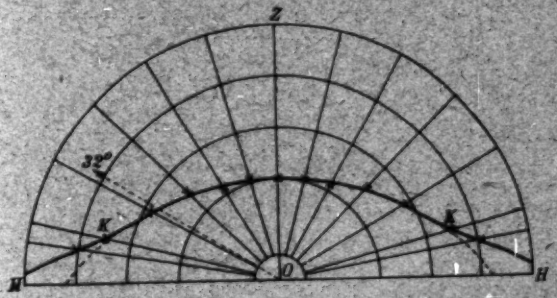


Fig. 4.

Tabelle 5.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
1. Juli 1916	0°	1.00	1,00	1,00
$\varphi = 22{,}0°$ nachmittags	15	0,91	0,95	1,02
	30	1,10	1,05	1,10
	45	1,44	1,20	1,23
	60	2,20	1,48	1,45
	75	3,22	1,79	1,78
	80	5,10	2,26	1,92

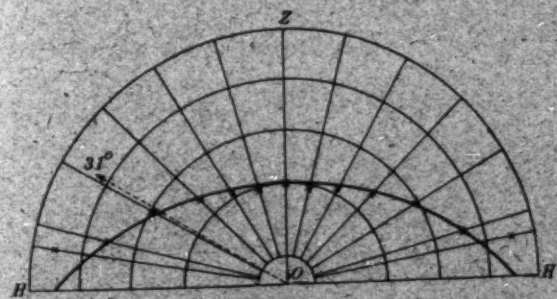


Fig. 5.

Tabelle 6.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
1. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
φ = 1,0° nachmittags	15	0,92	0,96	1,02
	30	0,92	0,96	1,10
	45	1,54	1,24	1,23
	60	2,08	1,44	1,45
	75	3,16	1,78	1,78
	80	4,28	2,07	1,92

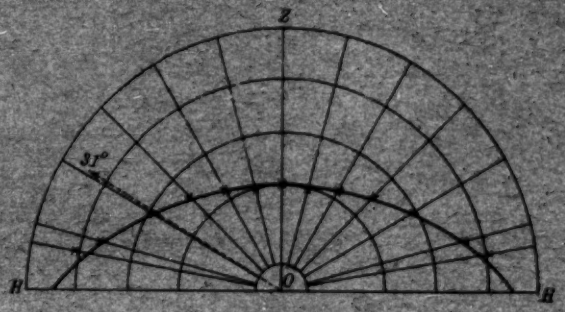


Fig. 6.

Tabelle 7.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
φ = 5,5° vormittags	15	1,01	1,00	1,02
	30	1,18	1,09	1,10
	45	1,47	1,21	1,24
	60	2,07	1,44	1,48
	75	3,45	1,86	1,84
	80	4,44	2,11	2,00

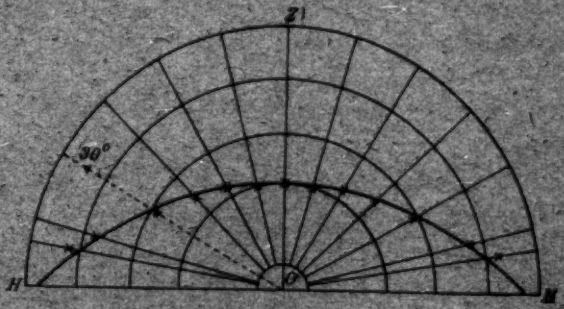


Fig. 7.

Tabelle 8.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 23{,}5°$ nachmittags	15	1,07	1,03	1,03
	30	1,14	1,07	1,11
	45	1,66	1,29	1,26
	60	2,10	1,45	1,51
	75	3,55	1,88	1,90
	80	5,40	2,32	2,07

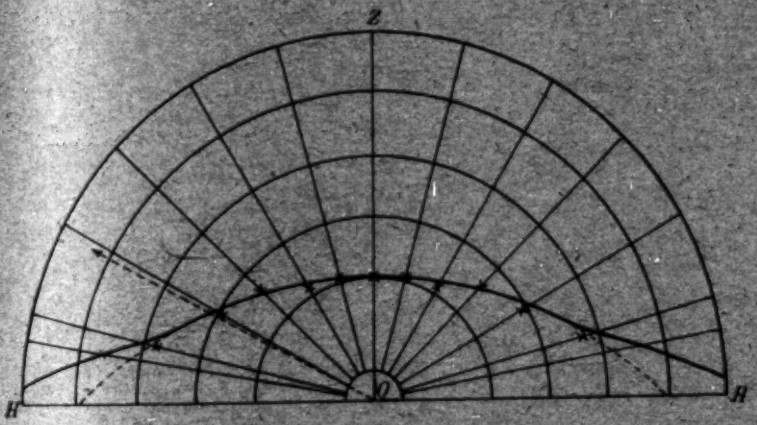


Fig. 8.

bögen angegeben, so wie sie graphisch gefunden wurden. Alle diese Winkel liegen innerhalb des Unsicherheitsbereiches unsrer früher ausgeführten Schätzungen. Den zugehörigen Berechnungen von $\sqrt{H}$ ist jedesmal der in der Figur angegebene Halbierungswert zugrunde gelegt.

§ 4.

Die Betrachtung der Figuren und der berechneten Zahlen zeigt, daß die Punkte, welche den dicht über dem Horizont gemessenen entsprechen, nicht auf der Kugelkalotte liegen. Sie liegen so, daß sie einem flacheren Gewölbe zuzugehören scheinen als die übrigen Punkte. Diese Abweichung hat uns den Schlüssel für das Verständnis von Beobachtungen gegeben, die wir oft in unserem Beobachtungsjournal bemerkt haben, für welche wir aber bis dahin trotz mancherlei Bemühungen keine Deutung hatten finden können. An vielen klaren Tagen mit mittlerer

Tabelle 9.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 1{,}5°$ nachmittags	15	0,98	0,99	1,02
	30	1,28	1,13	1,10
	45	1,58	1,26	1,24
	60	2,24	1,49	1,48
	75	3,45	1,86	1,84
	80	5,40	2,32	2,00

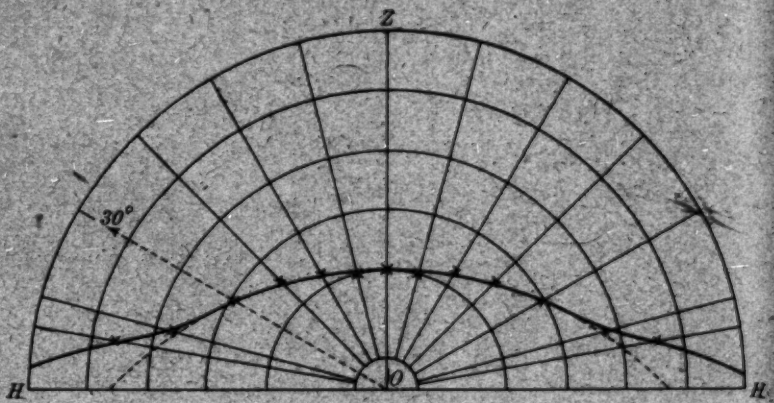


Fig. 9.

Weitsicht war es bei den Schätzungen der Halbierungswerte des Bogens Horizont-Zenit aufgefallen, daß der Himmel oft die Gestalt zeigte, wie sie besonders in den Figg. 4, 8 und 9 zu erkennen ist und die man mit Helmform bezeichnen kann. Einmal darauf aufmerksam geworden[1]), sieht man diese Gestalt fast täglich mehr oder weniger ausgeprägt, indem der in der Fig. 4 mit K bezeichnete Ansatz seine Höhe ändert. An wenig sichtigen Tagen und an ganz hervorragend klaren Tagen ist er nur schwach oder gar nicht zu erkennen.

Das Auftreten der Helmform erklärt sich jetzt ungezwungen aus einem starken Anwachsen der Himmelshelligkeit nach dem Horizont hin, von etwa 75° Zenitdistanz an. Die photometrischen Messungen zeigen deutlich ein starkes An-

1) Um die Helmform zu erkennen, braucht man nur eine Himmelsstelle in etwa 45° über dem Horizont zu betrachten und dann langsam zum Horizont und wieder zurück zu blicken.

Tabelle 10.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,06	1,00
$\varphi = -2{,}0°$ nachmittags	15	0,92	0,96	1,02
	30	1,18	1,09	1,10
	45	1,53	1,24	1,23
	60	2,17	1,47	1,45
	75	3,20	1,79	1,78
	80	4,19	2,05	1,92

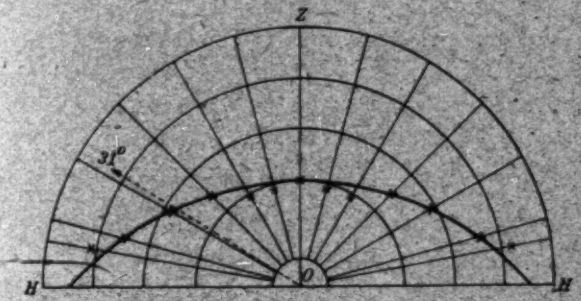


Fig. 10.

wachsen der Helligkeit des Himmels an dieser Stelle, aber auch das bloße Auge erkennt hier in den Subtropen an vielen Tagen die verhältnismäßig große Helle der dem Horizont unmittelbar anliegenden Luftschichten, bis zur Höhe von etwa 15° über dem Horizont. In der gleichen Weise wie die Helmform erklärt sich eine andere Abweichung von der normalen Himmelsform, die wohl auch schon oft bemerkt worden ist. Im Sonnenvertikal und in der Nähe der Sonne erscheint das Gewölbe nach oben hin ausgebogen, oft so stark, daß es die konvexe Seite nach der Erde zeigt. Solche Fälle sind in den Figg. 11 und 12 dargestellt und zwar nach in Güímar ausgeführten Messungen.

Daß sich diese Erscheinung für das Auge, bei dem mächtigen Anwachsen der Helligkeit nach der Sonne zu, nicht stärker ausprägt, liegt daran, daß die Lichtempfindung im Auge bei großen einfallenden Lichtintensitäten nur noch sehr langsam ansteigt, d. h. daran, daß eine Blendung eintritt. Mit Hilfe der hier in Betracht kommenden psycho-physischen Gesetze wird es nicht schwer sein, die entsprechenden Korrektionen

Tabelle 11.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00
$\varphi = 35{,}0°$ vormittags	15	0,99	0,99
	30	0,99	0,99
	45	1,29	1,14
	60	1,70	1,30
	75	2,66	1,63

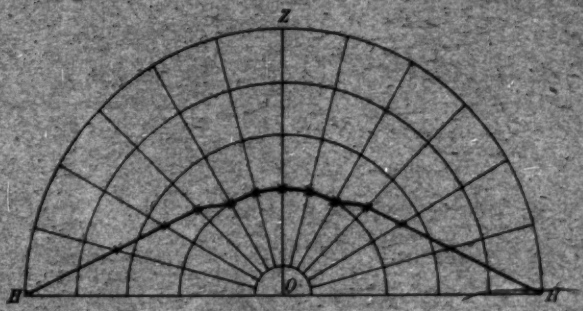


Fig. 11.

Tabelle 12.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00
$\varphi = 57{,}0°$ vormittags	15	0,89	0,94
	30	0,84	0,92
	45	0,86	0,93
	60	1,01	1,00
	75	1,78	1,33

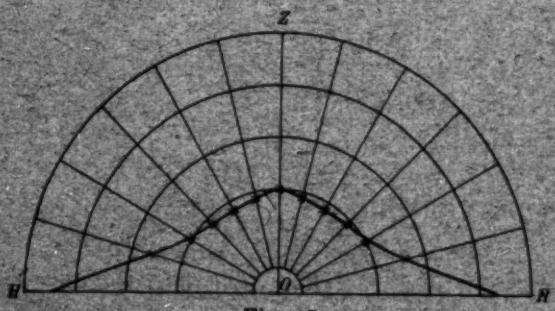


Fig. 12.

an der Gleichung (2) anzubringen, doch müssen wir aus Mangel an der einschlägigen Literatur davon absehen.

§ 5.

Um auch einen Vergleich mit an anderen Orten ausgeführten Beobachtungen zu ermöglichen, haben wir nach (2) die Quadratwurzeln der Himmelshelligkeiten aufgetragen nach Messungen, die Schramm[1]) in Kiel angestellt hat. Tab. 13 und Fig. 13 gibt die Zahlen und die Form des erhaltenen Gewölbes wieder.

Tabelle 13.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.
14. Januar 1900	0°	1,00	1,00
$\varphi = 5°$ nachmittags	30	2,40	1,55
	60	5,57	2,36
	85	9,05	3,01

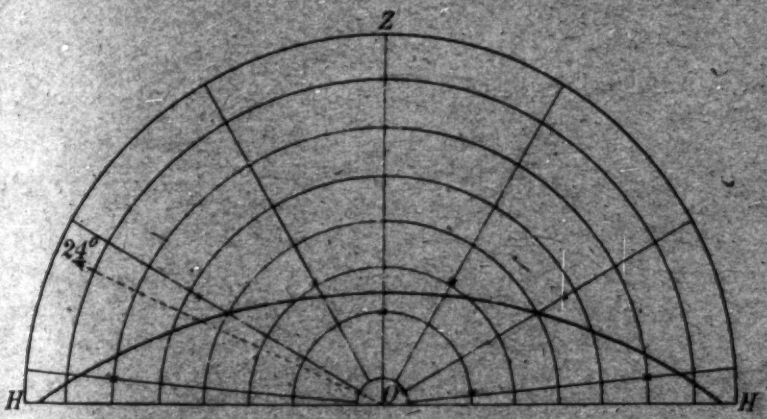


Fig. 13.

Die konstruierten Punkte liegen auch hier nahe auf einem Kreisbogen, dessen Halbierungswert rund 24° ist, in Übereinstimmung damit, daß die Reimannschen Werte der Höhe des geschätzten Halbierungspunktes für Deutschland niedriger (22°) sind als die unsrigen für Teneriffa (32°).

Eine weitere Bestätigung unserer Anschauung liefert die Chr. Wienersche Theorie der Helligkeit des klaren

1) W. Schramm, Kieler Dissertation 1901.

Tabelle 14.

	ζ	H der Theorie	$\sqrt{H}$ der Theorie	$\sqrt{H} \cdot 22{,}3$
$\varphi = 0°$	0°	0,00202	0,0449	1,00
	15	0,00226	0,0474	1,06
	30	0,00319	0,0564	1,26
	45	0,00420	0,0647	1,44
	60	0,00522	0,0722	1,61
	75	0,00682	0,0826	1,84
	90	0,01139	0,1067	2,39

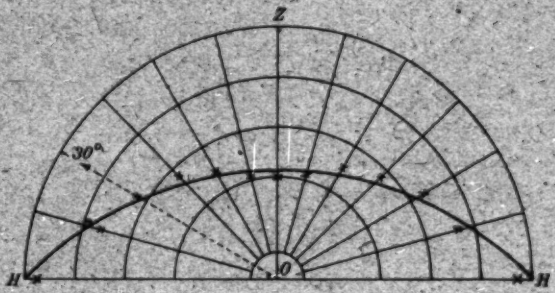


Fig. 14.

Tabelle 15.

	ζ	H der Theorie	$\sqrt{H}$ der Theorie	$\sqrt{H} \cdot 5{,}6$
$\varphi = 35°16'$	0°	0,03165	0,178	1,00
	15	0,03154	0,177	0,99
	30	0,03056	0,175	0,98
	45	0,02902	0,170	0,95
	60	0,03100	0,176	0,99
	75	0,04024	0,201	1,13
	90	0,06697	0,259	1,45

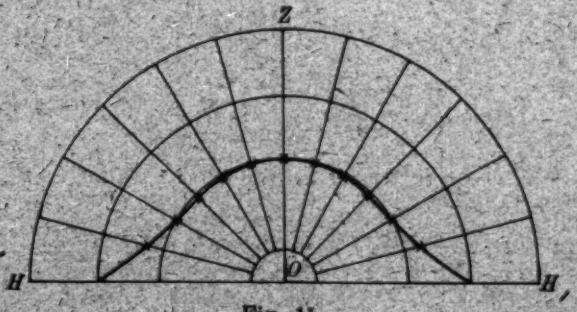


Fig. 15.

Himmels.[1]) Unter Berücksichtigung der direkten Sonnenstrahlung, der Zerstreuung des Lichts durch Beugung, Brechung und Reflexion an Wassertröpfchen, Eiskristallen und Staubteilchen, Reflexion durch den Erdboden und der Rayleighschen Diffusion durch die Luftmolekeln gelangt Wiener für die Helligkeit des Himmels an einer bestimmten Stelle für beliebige Sonnenstände zu exakten Zahlen. In der vorstehenden Tabelle und Fig. 14 haben wir aus Wieners Zahlen mit Hilfe von Gleichung (2) das Gewölbe konstruiert. Es ist mit großer Annäherung eine Kugelkalotte mit einem Halbierungswert des Bogens HZ von etwa 30°.

Für einen höheren Sonnenstand ($\varphi = 35°16'$) folgt aus den Wienerschen Zahlen (siehe Tab. und Fig. 15) die Helmform des Himmelsgewölbes, gerade so wie sie die nach den photometrischen Messungen konstruierten Gewölbe und vielfache Skizzen unsres Beobachtungsjournals zeigen.

Nach dem Obigen genügt, besonders bei niederen Sonnenständen eine einzige Schätzung des Halbierungswertes des Bogens Horizont-Zenit, um die Verteilung der Himmelshelligkeit in größerem Azimut vom Sonnenvertikal darzustellen. Für höhere Sonnenstände würde die im 3. Bericht geübte Unterteilung in Drittel und Viertel des Bogens Horizont-Zenit bei der Schätzung weiterhelfen.

§ 6.

Mit Hilfe der gleichzeitigen Verfolgung einer großen Anzahl gleichartiger Pilotballons mit dem Auge ließe sich in direkter Weise die Form des Himmels festlegen unter der Voraussetzung, daß die Entfernung Auge-Ballon im Augenblick des Verschwindens mit der kritischen Sichtweite identisch ist. Vom meteorologischen Observatorium auf Teneriffa wird seit einer Reihe von Jahren regelmäßig der Flug von Pilotballons beobachtet. Die im Jahre 1912 erreichten größten Höhen derselben waren am 13. Juni 24000 m und am 10. Juli 28400 m.[2])

1) Chr. Wiener, Abhandlungen d. K. Leopold.-Carol. Akad. d. Naturf. Nova Acta 73. Nr. 1. 1896: 91, Nr. 2. 1909

2) Diese Zahlen sind dem Anuario del Observatorio Central Meteorológico zu Madrid (Supl. zum 1. Bd. 1916) entnommen, das wir der Freundlichkeit seines Direktors Sr. D. José Galbis Rodríguez verdanken.

Im ersten Falle war der Ballon vom Auge in direkter Verbindungslinie 39,5 km entfernt und verschwand in einer Höhe von 37° 23,5′ über dem Horizont. Im zweiten Falle war die Entfernung 36,7 km bei einer Höhe von 50° 45,3′.

Die Entfernungen 39,5 km und 36,7 km entsprechen der Strecke ON (Fig. 1 s). Ist das sichtbare Himmelsgewölbe eine Kugelkalotte und läßt es sich auf diese Weise mit Pilotballons abtasten, so muß die aus diesen Zahlen berechnete horizontale Sichtweite OH mit der auf Teneriffa im Sommer herrschenden übereinstimmen. Die horizontale Sichtweite schwankt hier zwischen 50 und 100 km; für einen Sommertag mit mittlerer Sichtigkeit ist sie rund 70 km. Aus den Entwicklungen des § 3 sieht man leicht, daß

$$OH = ON \cdot \frac{\cos \varphi_k \cdot \sin 2\psi}{\sin \psi_k}.$$

Hieraus rechnet sich unter Zugrundelegung eines Halbierungswertes für das Himmelsgewölbe von $\varphi = 32°$ ($\psi = 25° 3{,}5'$) für $ON = 39{,}5$ km eine horizontale Sichtweite $OH = 64{,}4$ km und für $ON = 36{,}7$ km eine solche von 67,5 km; in guter Übereinstimmung mit der horizontalen Sichtweite eines mittleren Sommertages.

§ 7.

Für eine gleichmäßig helle, den Beobachter vollständig umgebende Lufthülle folgt aus Gleichung (2), daß die maximale Schichtweite nach allen Richtungen darin gleich groß ist, d. h. daß ein Gewölbe gesehen wird mit einem Halbierungswert von 45°. Ist die Helligkeit am Horizont größer als in den übrigen Teilen, so ergibt sich ein Halbierungswert $< 45°$, ist der Horizont dunkler als das Übrige, so ist der Halbierungswert $> 45°$.

Wir haben diese Folgerungen einer direkten Prüfung innerhalb einer homogenen, hellen Nebelschicht unterzogen. In der folgenden Tab. 16 sind die Resultate chronologisch aufgeführt so wie sie sich bei einer Wanderung in einer Wolkenschicht ergeben haben.

Aus den Zahlen dieser Tabelle ist deutlich zu erkennen, wie sich das flache Gewölbe — mit kleinem Halbierungs-

Tabelle 16.

Beobachtungen im hellen Nebel.

Nr.	Tageszeit	Höhe ü. d. Meere	Halbierungswerte D.	Mittel	U.	Mittel	Gemeinsame Mittel	Bemerkungen
	20. 5. 1917							Oberhalb Güímars
1	8h 10 v.	508 m	24,0°		25,7°		24,85°	Am unteren Rand der Wolke.
2	8h 25	544	36,0		38,0			
			37,0	36,5	37,0	37,5	37,0	Vornan im Nebel.
3	8h 38	617	40,2		42,0			
			39,0		43,0			
			42,5	40,2	45,0	43,6	41,9	
4	9h 10	685	42,0		41,0			Ganz im hell. Nebel.
			45,1		41,2			
			39,2	41,75	40,7	40,95	41,35	
5	9h 30	741	46,3		45,3			Tiefer im Nebel. Windstill.
			42,0		42,3			
			40,5		41,2			
			44,5		45,8			
			46,0		50,0	44,9	44,4	
			44,0	43,9				
					38,0			Nach der helleren Sonnenseite beob.
6	10h 6	790	43,8		49,8			Auf horizontal. Stelle nach der Richtung eines Bergrückens gesehen. Oben etwas hell. als unten. Improvisiert. Diaphanometerversuch ergibt als Sichtweite 35 m.
			49,0		45,1			
			40,0		46,5			
			42,5		47,2			
			44,0	43,9	44,2	46,6	45,25	
7			41,0					Nach der Sonnenseite gemessen.
8	10h 45	684	40,4		44,4			
			40,8		40,7			
			37,0		43,0			
			39,0		42,5	42,65	41,5	Nach der helleren Meeresseite beob.
			44,8	40,4				
9		684	46,0		48,2			Nach der Landseite gemessen, wo der untere Teil des Nebels dunkler war, als oben.
			47,4		47,0			
			44,8	46,1	48,8	46,3	46,2	
10		684	¾ Wert = 70,0°					

wert — unterhalb des Nebels, wo noch der helle klare Himmel den Horizont bildet, in das höhere im Innern des Nebels umwandelt. Bei dem Augenschein nach gleichmäßiger Helligkeit des Nebels (Nr. 5 der Tabelle) ist der Halbierungswert nahezu 45°. In den Fällen, wo der obere Teil heller war als der untere (Nr. 6 und 9) ist die Sichtweite nach oben größer als in der horizontalen oder einer dieser Richtung nahen gewesen. Der unter Nr. 10 angeführte Wert für die Höhe des als $^3/_4$ des Bogens geschätzten Punktes liegt, der oberen Helligkeit entsprechend, zu hoch, statt bei 67,5° der Halbkugel bei 70°.

Da selbst der sternenklare Nachthimmel am Horizont eine etwas größere Helligkeit als im Zenit besitzt, so folgt auch für ihn eine entsprechende geringe Abweichung von der Halbkugelform und es erklärt sich so der von uns in dem vorangehenden Bericht angegebene Halbierungswert von 42,9° statt 45° für den klaren Nachthimmel.

Welchen Einfluß die horizontale und zenitale Helligkeit auf die Wölbung des Himmels haben, davon haben wir uns durch die folgenden Versuche überzeugt, die gleichzeitig einen Beweis bringen, daß die Resultate der im hellen Nebel ausgeführten Beobachtungen auf die Atmosphäre übertragen werden dürfen.

Blickt man den Himmel durch eine dunkelblaue Glasscheibe genügender Größe an — wir benutzten zu dem Zwecke eine kobaltblaue Scheibe von 45×52 cm² —, so werden die großen Helligkeitsunterschiede ausgeglichen. Die unteren atmosphärischen Schichten, welche überwiegend langwellige Strahlen aussenden, die teilweise von dem blauen Glase absorbiert werden, erscheinen dunkler als vorher und in ihrem Helligkeitsgrade von der zenitalen Helligkeit wenig verschieden. Wie es nach dem Vorangehenden zu erwarten war, ergaben die durch die blaue Glasscheibe hindurch ausgeführten Versuche daher erhöhte Halbierungswerte. In Tab. 17 sind zwei Beobachtungsreihen angeführt.

Ein genügend großes, rotes Glas stand uns leider nicht zur Verfügung, doch zeigten schon durch eine kleine (9×12 cm²) Scheibe ausgeführte Schätzungen, daß der Himmel infolge der großen Dunkelheit im Zenit und dagegen auffallender Helle der Horizontschichten eine sehr flachgewölbte Gestalt besaß.

Tabelle 17.

Halbierungshöhen durch eine blaue Scheibe hindurch.

Blaues Glas	Mittel	Ohne Glas	Mittel	Beobachter und Datum
40,0°		30,0°		D.
41,5		31,0		19. 6. 1917
36,3		33,0		
38,8		32,8		
40,6	39,3°		31,7°	
38,0°		30,0°		U.
42,0		30,5		22. 6. 1917
38,5	39,5°	32,0	30,8°	

Es ergaben sich Halbierungswerte von 24,3°; 25,0°; 25,0°; 24,0°.

§ 8. Resultate.

1. Die sichtbare Form des Himmelsgewölbes wird bedingt durch die in verschiedenen Richtungen verschiedene kritische oder maximale Sichtweite und nicht durch physiologische oder psychologische Ursachen.

2. Zwischen den Sichtweiten und den Himmelshelligkeiten besteht eine einfache Beziehung, die es ermöglicht, die Himmelsform mit Hilfe photometrischer Helligkeitsmessungen geometrisch darzustellen.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser Untersuchung verdanken wir Mitteln, welche die kartellierten Deutschen Akademien, sowie die Solvaystiftung zur Verfügung gestellt haben.

Güímar auf Teneriffa, Juni 1917.

(Eingegangen 23. Februar 1919.)

2. *Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorie der verdünnten Lösungen;* von *P. Boedke.*

Planck weist in seinen „Vorlesungen über Thermodynamik“[1]) darauf hin, daß die weitere Auswertung der von ihm für die fundamentalen thermodynamischen Funktionen angegebenen Reihenentwicklungen ein gangbarer Weg sein dürfte, um zu einer rationellen thermodynamischen Theorie von Lösungen beliebiger Konzentration zu gelangen. Seit das Problem von Planck gestellt wurde, hat wohl zuerst und auch allein H. Jahn versucht, die mathematische Theorie der Lösungen in der angedeuteten Richtung auszubauen.[2]) Während die Plancksche Theorie der ideal verdünnten Lösungen in den erwähnten Reihenentwicklungen nur die Glieder der ersten Ordnung berücksichtigt, untersuchte Jahn den Einfluß der Glieder der zweiten Ordnung. Wenn nun auch durch die so erhaltenen erweiterten Ansätze ein näherer Anschluß der Theorie an die vorliegenden Versuchsdaten erreicht wird, so bleiben die Jahnschen Ergebnisse doch insofern unbefriedigend, als gewisse charakteristische Erscheinungen in höher konzentrierten Lösungen auch durch sie immer noch nicht und zwar nicht einmal andeutungsweise dargestellt werden. Wie nun die Hauptbedeutung der Van der Waalsschen Gleichung einer einheitlichen Flüssigkeit nicht etwa in der damit erzielten zahlenmäßigen Übereinstimmung von Theorie und Versuch liegt — diese ist bekanntlich sogar verhältnismäßig wenig befriedigend —, sondern vielmehr darin zu suchen ist, daß die Verdampfungserscheinungen und der kritische Zustand in ihr eine qualitativ zutreffende Darstellung finden, so erscheint auch in der Theorie der Lösungen ein Ansatz als das zunächst erstrebenswerte Ziel, aus dem sich

1) 3. Auflage, Leipzig 1911, § 252.
2) Zeitschr. f. phys. Chemie 41. S. 257. 1902.

das charakteristische Verhalten hoch konzentrierter Lösungen, wenn auch vorläufig rein qualitativ ableiten läßt.

Da die Jahnschen Rechnungen nicht zu dem gewünschten Ergebnis führten, so müßte man in konsequenter Fortsetzung des einmal eingeschlagenen Weges nunmehr den Einfluß der Reihenglieder von der dritten Ordnung untersuchen. Die betreffenden Rechnungen gestalten sich jedoch überaus langwierig und scheinen jedenfalls nicht in einfacher Weise übersichtliche Resultate zu ergeben. Im folgenden wird deshalb versucht, in anderer Weise an die Planckschen Gesetze ideal verdünnter Lösungen anzuknüpfen.

In der Tat läßt sich eine Funktion aus ihrer Reihenentwicklung zwar einerseits mit um so größerer Genauigkeit bestimmen, je mehr Reihenglieder man berücksichtigt. Andererseits kann man aber auch durch passende Wahl des Arguments, nach dem man die Funktion entwickelt, häufig eine stärkere Konvergenz der Reihe erzielen und dadurch unter Berücksichtigung einer gleichen Anzahl von Reihengliedern wie vorher einen besseren Anschluß an die wahren Funktionswerte erreichen. Im folgenden wird deshalb versucht, die Reihenentwicklungen der thermodynamischen Funktionen nach einem anderen Argument als dem von Jahn gewählten vorzunehmen und auf diese Weise infolge gegebenenfalls besserer Konvergenz der Reihen immer noch allein mit den Gliedern der zweiten Ordnung auszukommen.

Ein Urteil darüber, ob ein Argument zweckmäßiger als ein anderes ist, kann man in dem hier vorliegenden Falle naturgemäß nur aus dem Umfange gewinnen, in welchem die erhaltenen Ansätze die charakteristischen Eigenschaften der Lösungen darstellen. Zur Prüfung dieses Geltungsbereiches wählen wir zunächst ein ganz spezielles, möglichst leicht zu übersehendes Beispiel; es wird im folgenden allein versucht, an der Hand der vorgenommenen Reihenentwicklungen die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit in binären flüssigen Gemischen, wie sie vor allem von Rothmund[1]) systematisch beobachtet worden sind, abzuleiten. In der Tat sind diese Erscheinungen für unseren Zweck besonders geeignet; denn sie spielen sich wesentlich nur in Gebieten

1) Zeitschr. f. phys. Chemie **26**. S. 433. 1898.

höherer Konzentration ab und sind, wie im folgenden gezeigt wird, weder mit Hilfe der Planckschen Gleichungen für ideal verdünnte Lösungen, noch auch mit Hilfe der erweiterten Jahnschen Gleichungen darstellbar. Die Planck-Jahnschen Gleichungen ergeben zwar eine Formulierung der Zustandsänderungen in den beiderseits hochverdünnten Gebieten solcher Gemische, gestatten aber nicht, an der Hand einer und derselben Gleichung die Erscheinungen, wie sie sich bei allmählicher Änderung der Konzentration zwischen den beiden Grenzgebieten abspielen, stetig zu verfolgen. Dies scheint nun mit Hilfe der im folgenden angegebenen Entwicklungen möglich zu sein. Ob danach den neuen Ansätzen eine tiefer liegende Bedeutung beigemessen werden kann, müssen allerdings erst noch weitergehende Untersuchungen entscheiden, auf die in dieser Mitteilung noch nicht eingegangen wird.

1. Über die Reihenentwicklungen der Planckschen Φ-Funktion.

Betrachten wir eine zunächst als verdünnt anzusehende Lösung, deren Zustand durch den Druck p, die Temperatur T und die Massen $m_0, m_1, m_2, \ldots$ der einzelnen Bestandteile bzw. durch deren Molekülzahlen $n_0, n_1, n_2, \ldots$ bestimmt ist. Es sei R die absolute Gaskonstante, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ seien die bezüglichen Molekulargewichte, m sei die Gesamtmasse, n die Summe der Molekülzahlen, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ seien die molekularen, $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots$ die molaren Konzentrationen, also z. B. sei

$$c_0 = \frac{n_0}{n}, \qquad \bar{c}_0 = \frac{m_0}{m}.$$

Überhaupt seien durchgängig die bei Benutzung der Massen an Stelle der Molekülzahlen einzuführenden Größen überstrichen. Bezieht sich der Index 0 auf das Lösungsmittel, so sind die Größen $m_1, m_2, n_1, n_2, c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_1$ usw. sämtlich klein gegen die bezüglichen Größen mit dem Index 0.

Wir vergleichen unter diesen Voraussetzungen die vier Entwicklungen der Planckschen Φ-Funktion

$$(1) \qquad \Phi = -R\Sigma n_0 \log c_0 + n_0 \mathfrak{P}\left(\frac{n_1}{n_0}, \frac{n_2}{n_0}, \ldots\right),$$

$$(2) \qquad \Phi = -R\Sigma n_0 \log c_0 + n\,\mathfrak{Q}(c_1, c_2, \ldots),$$

$$(3) \qquad \Phi = -\Sigma r_0 m_0 \log \bar{c}_0 + m_0 \overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0}, \ldots\right),$$

$$(4) \qquad \Phi = -\Sigma r_0 m_0 \log \bar{c}_0 + m\,\overline{\mathfrak{Q}}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots).$$

Darin bedeuten $r_0, r_1, r_2, \ldots$ Konstante, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind Potenzreihen der angegebenen Argumente, deren Koeffizienten durch φ mit gehöriger Indizierung bezeichnet seien.

Die Entwicklung (1) ist von Planck angegeben worden. Unter Berücksichtigung von Gliedern nur der ersten Ordnung erhält man den Ansatz

$$\Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + n_2(\varphi_2 - R\log c_2)\ldots,$$

auf dem sich die Plancksche Theorie der ideal verdünnten Lösungen aufbaut. Nimmt man noch die Glieder zweiter Ordnung mit hinzu, so erhält man die Ausgangsgleichung für die Jahnschen Rechnungen, die z. B. für eine binäre Lösung die Form hat

$$\Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + \frac{n_1^2}{n_0}\varphi_{11}.$$

Die Entwicklungen (2), (3), (4) folgen am einfachsten durch Umformung von (1). Ersetzt man mit Hilfe der Beziehung

$$n_0 = n\,[1 - (c_1 + c_2 + c_3 + \ldots)]$$

die Molekülzahl des Lösungsmittels durchweg durch die Gesamtzahl n der Moleküle und entwickelt danach alle Glieder nach Potenzen von $c_1, c_2, \ldots$, so erhält man (2). Die dritte Form der Entwicklung ergibt sich aus (1), wenn man überall statt der molekularen Größen die molaren einführt und danach nach den Potenzen von $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots$ entwickelt. Aus (3) folgt schließlich (4) auf die gleiche Weise wie (2) aus (1). Zwischen den Koeffizienten der Entwicklungen bestehen natürlich Beziehungen; so ist vor allem

$$R = r_1\mu_1 = r_2\mu_2 = \ldots \text{ usw.} \tag{5}$$

Über die Konvergenz der Reihen läßt sich von vornherein nichts aussagen. Es ist möglich, daß sie in allen Konzentrationsgebieten Gültigkeit haben oder nur in gewissen beschränkten Bereichen anwendbar sind. Im letzten Falle würde es unmöglich sein, die Erscheinungen, wie sie sich bei fortgesetzter Erhöhung der Konzentration irgendeines Bestandteils in einer zunächst verdünnten Lösung zeigen, stetig an der Hand einer dieser Potenzentwicklungen zu verfolgen. Für unsere Betrachtungen im folgenden müssen wir deshalb ausdrücklich zweierlei voraussetzen: Einerseits soll sich der Konvergenzbereich der benutzten Reihen bis in das Gebiet höherer

Konzentrationen hineinerstrecken, zweitens soll die Konvergenz eine derartig schnelle sein, daß eine wenigstens qualitativ zutreffende Beurteilung der Erscheinungen schon bei Berücksichtigung der Glieder bis zur zweiten Ordnung möglich ist. Ob diese Voraussetzungen zulässig sind, kann natürlich nur der Vergleich mit der Erfahrung entscheiden.

Jedenfalls scheinen die Entwicklungen (2), (4) diesen Annahmen mehr zu entsprechen als (1), (3). Wird nämlich z. B. in einem binären Gemisch durch ständig verstärkte Konzentration des gelösten Stoffes allmählich die andererseits verdünnte Lösung hergestellt, so steigt gleichzeitig das Argument n_1/n_0 bzw. m_1/m_0 der Entwicklungen (1), (3) zu unendlich an. Gesetzt selbst den Fall, daß die Entwicklungen in diesem Grenzgebiet noch konvergierten, so kann man dann doch nicht mehr die Funktion durch die beiden ersten Reihenglieder approximieren. Sonach ist es z. B. ausgeschlossen, an der Hand des Jahnschen Ansatzes das Gesamtgebiet aller Konzentrationen zu überblicken. Bei den Entwicklungen (2), (4) werden die Argumente in dem betrachteten Grenzfall nahezu gleich 1; die Verhältnisse liegen hier für das Vordringen der Theorie in Gebiete höherer Konzentrationen also ungleich günstiger.

Die Entwicklungen (3), (4) sind überall da von Bedeutung, wo es sich um Anwendung der Theorie auf Beobachtungen mit molaren Konzentrationen handelt. Allerdings kann man auch in solchen Fällen von den molekularen Ansätzen ausgehen und die aus diesen entwickelten Ergebnisse dann auf die molare Form bringen. Da die Vernachlässigungen, die man auf dem einen und dem anderen Wege begeht, verschieden sind, so fallen auch die Ergebnisse verschieden aus. Welcher von beiden Wegen einen besseren Anschluß an die vorliegenden Versuchsdaten ergibt, das kann natürlich auch erst wieder hinterher entschieden werden. Jedenfalls müssen wir uns für Anwendungen auf solche molaren Beobachtungen zunächst beide Möglichkeiten offen halten.

Der ursprüngliche Planck sche Ansatz (1) wird bekanntlich durch Vergleichung mit Entwicklungen gewonnen, die für die in den idealen Gaszustand übergeführte Lösung gelten. Dieser Vergleich ist bei den Entwicklungen (3), (4) nicht mehr unmittelbar durchführbar, da bei der Einführung der molaren

Konzentrationen das logarithmische Glied zum Teil in die Potenzreihen eingeht. Das kann aber natürlich nicht als ein Grund gegen den Gebrauch dieser beiden Ansätze geltend gemacht werden; denn bei passender Unordnung der Glieder in diesen Entwicklungen oder der bezüglichen Glieder in den Gesetzen für den idealen Gaszustand läßt sich der Vergleich wieder vornehmen.

Für den weiteren Gebrauch stellen wir die vier auf Glieder zweiter Ordnung abgekürzten Entwicklungen für binäre Gemische zusammen.

$$(6)\quad \Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + \frac{n_1^2}{n_0}\varphi_{11},$$

$$(7)\quad \Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + \frac{n_1^2}{n}\varphi_{11},$$

$$(8)\quad \Phi = m_0(\bar{\varphi}_0 - r_0\log \bar{c}_0) + m_1(\bar{\varphi}_1 - r_1\log \bar{c}_1) + \frac{m_1^2}{m_0}\bar{\varphi}_{11},$$

$$(9)\quad \Phi = m_0(\bar{\varphi}_0 - r_0\log \bar{c}_0) + m_1(\bar{\varphi}_1 - r_1\log \bar{c}_1) + \frac{m_1^2}{m}\bar{\varphi}_{11},$$

Der geringfügige Unterschied in den quadratischen Zusatzgliedern von (7), (9) gegenüber denen in (6), (8) bewirkt, daß diese Ansätze, wie im folgenden gezeigt werden soll, für höhere Konzentrationen brauchbar werden.

2. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für ein binäres Gemisch.

Die Bedingungen für das stabile Gleichgewicht eines aus α unabhängigen Bestandteilen bestehenden Systems gegen Zustandsänderungen, bei denen Druck, Temperatur und die Gesamtmassen aller α Bestandteile ungeändert bleiben, lauten nach Planck

$$\delta\Phi = 0, \qquad \delta^2\Phi < 0.$$

Hierin führen wir die spezifischen Werte φ', φ'' usw. der Potentialfunktion Φ in den einzelnen Phasen und die Konzentrationen c ein. Um nur mit unabhängigen Variablen zu operieren, denken wir uns eines der c, etwa c_a, durch die übrigen ersetzt; ferner sei noch zur Abkürzung

$$f_\nu = \frac{d\varphi}{dc_\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial c_\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial c_a}.$$

Für die Erscheinungen der gegenseitigen Löslichkeit lassen sich dann die obigen Gleichgewichtsbedingungen in der Form aussprechen: In allen Phasen besitzen gleiche Werte

(10) 1. jede der Größen $f_1, f_2, \ldots f_{a-1}$,

(11) 2. die Größen $\varphi - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \ldots c_{a-1} f_{a-1}$

und zwar gelten diese Bedingungen, wenn noch vorausgesetzt wird, daß das Molekulargewicht jedes Bestandteils in allen Phasen das gleiche ist, sowohl für die molare als auch für die molekulare Form der Gleichungen, d. h. für die ungestrichenen Größen ebenso wie für die überstrichenen.

Die hieraus abzuleitenden Bedingungen für die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit binärer Gemische lassen sich in einer Form hinschreiben, in der sie vollkommene Analogie mit gewissen aus der Theorie der Zustandsgleichung einer einheitlichen Substanz bekannten Gesetzmäßigkeiten zeigen. Wird bei der von jetzt ab allein auftretenden Größe f_1 der Einfachheit halber der Index fortgelassen, so gelten folgende Sätze:

1. In beiden Phasen eines binären flüssigen Systems ist

(12) $$\frac{df}{dc_1} < 0 .$$

2. Die Größe f hat in beiden Phasen den gleichen Wert

(13) $$f' = f'' .$$

Für f' und f'' wird deshalb einfach f geschrieben.

3. Analog zum Maxwell-Clausiusschen Satze bei der Zustandsgleichung ist

(14) $$\int_{f'}^{f''} d c_1 = \varphi' - \varphi'' = f (c_1' - c_1'') .$$

4. Der kritische Lösungspunkt wird bestimmt durch

(15) $$\frac{\partial f}{\partial c_1} = 0 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} = 0 .$$

Die Differentiationen und Integrationen sind hierbei bei konstant gehaltenen Werten des Drucks und der Temperatur vorzunehmen.

Die Größen f, c_1, T spielen hier sonach bezüglich genau die gleiche Rolle, wie der Druck p, das Volumen v und die Temperatur T in der Theorie der Zustandsgleichung. Wie nun bekanntlich die Zustandsgleichung in übersichtlicher Weise durch die graphische Darstellung der Isothermen in einem p, v-Diagramm versinnlicht wird, so werden sich demnach in ganz ähnlicher Weise die Eigenschaften binärer Ge-

mische durch Zeichnung der Isothermen in einem f, c_1-Diagramm geometrisch interpretieren lassen. Das von uns zu lösende Problem kann dann in rein geometrischer Form so ausgesprochen werden: Es ist das spezielle Isothermensystem zu suchen, das als Träger der angegebenen Eigenschaften geeignet ist und in der Grenze die bekannten Eigenschaften der ideal verdünnten Lösungen ergibt. Ein solches Isothermensystem müßte den kritischen Punkt als singulären Punkt enthalten, auf der einen und nur der einen Seite der durch diesen Punkt hindurchgehenden Isotherme Maxima und Minima zeigen und in dem Grenzgebiet idealer Verdünnung in die durch die Plancksche Näherung bestimmten Isothermen übergehen. Im folgenden Abschnitt werden deshalb zunächst die Planckschen Isothermen besprochen, dann wird gezeigt, daß die aus dem Jahnschen Ansatz entspringenden Isothermen keinen geeigneten Träger bilden, während die Ansätze (7), (9) zu Isothermen führen, die alle nötigen Eigenschaften haben, und (9) zudem noch quantitativen Anschluß an die vorliegenden Versuchsergebnisse zeigt.

3. Anwendungen.

Aus (6), (7), (8), (9) leiten wir zunächst die auf die Einheit der Molekülzahl bzw. der Masse bezogenen Werte φ der Funktion Φ und die daraus abgeleiteten Größen her. Der Einfachheit halber schreiben wir nur die molare Form der Gleichungen hin und unterdrücken dabei die Überstreichung; eine Verwechslung der beiden Gleichungsformen erscheint ausgeschlossen, da die molare Form an den Größen r_0, r_1 kenntlich bleibt, die für die molekulare Form beide gleich R werden. Es wird für

	Jahns Ansatz:	**Ansatz (7), (9):**
(16)	$\varphi = c_0(\varphi_0 - r_0 \log c_0) + c_1(\varphi_1 - r_1 \log c_1) + \frac{c_1^2}{c_0}\varphi_{11}$,	$\varphi = c_0(\varphi_0 - r_0 \log c_0) + c_1(\varphi_1 - r_1 \log c_1) + c_1^2 \varphi_{11}$,
(17)	$f = (r_0 - \varphi_0 - r_1 + \varphi_1 - \varphi_{11}) + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + \frac{\varphi_{11}}{c_0^2}$,	$f = (r_0 - \varphi_0 - r_1 + \varphi_1) + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2c_1\varphi_{11}$,
(18)	$\frac{df}{dc_1} = -\frac{r_0}{c_0} - \frac{r_1}{c_1} + \frac{2\varphi_{11}}{c_0^2}$,	$\frac{df}{dc_1} = -\frac{r_0}{c_0} - \frac{r_1}{c_1} + 2\varphi_{11}$,
(19)	$\frac{d^2f}{dc_1^2} = -\frac{r_0}{c_0^2} + \frac{r_1}{c_1^2} + \frac{6\varphi_{11}}{c_0^4}$;	$\frac{d^2f}{dc_1^2} = -\frac{r_0}{c_0^2} + \frac{r_1}{c_1^2}$.

I. *Die Planckschen Isothermen.* Die durch $\varphi_{11} = 0$ aus allen Ansätzen gleichmäßig folgende Gleichung der Isothermen für ideal verdünnte Lösungen ist

$$f = f_{01} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 . \tag{20}$$

Dabei faßt die Größe

$$f_{01} = r_0 - \varphi_0^0 - r_1 + \varphi_1^0$$

die allein von Druck[1]) und Temperatur abhängigen Glieder zusammen, worin der an die Größen φ herangefügte obere Index andeutet, von welchem Stoff bei Herleitung des Ansatzes als Lösungsmittel ausgegangen wurde. Aus (15), (18), (19) ergibt sich für den kritischen Punkt

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = 0, \quad \frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_0}{c_1^2} = 0 .$$

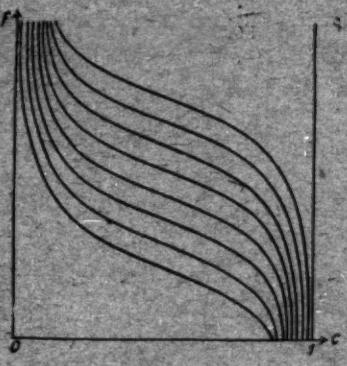


Fig. 1.

Da die erste dieser beiden Gleichungen mit der zweiten und zudem mit den Bedingungen

$$c_0 + c_1 = 1 ,$$
$$0 < c_0, c_1 < 1$$

unverträglich ist, so enthält der Planecksche Ansatz den kritischen Punkt nicht. In der Tat bestehen die Isothermen aus lauter kongruenten, nur in der Richtung der f-Achse gegeneinander verschobenen Kurven von der in Fig. 1 dargestellten Form ohne Maxima und Minima mit einem Krümmungswechsel an der Stelle

$$c_0 = \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_1}},$$

an der die Tangente die durch

$$\frac{df}{dc_1} = -(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1})^2$$

---

1) Nach Rothmund, a. a. O., sind die Sättigungserscheinungen in weitem Umfange vom Druck unabhängig, so daß schlechthin von Isothermen gesprochen werden kann.

bestimmte Richtung hat. Für die molekulare Form liegt der Krümmungswechsel bei

$$c_0 = c_1 = \tfrac{1}{2}$$

und die Tangente hat hier die Richtung

$$\frac{df}{dc_1} = -4R.$$

Nach der Ableitung von (20) haben die Kurven zunächst nur für sehr kleine Werte von c_1 physikalische Bedeutung als Isothermen. Erst dadurch, daß der für die andererseits hochverdünnte Lösung gültige Wert

$$f = f_{10} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 ,$$

wo

$$f_{10} = r_0 - \varphi_0^1 - r_1 + \varphi_1^1 ,$$

dieselbe Kurvenschar ergibt, erhält auch das Gebiet der Werte von f für c_1 nahe 1 entsprechende Bedeutung. Damit ist allerdings noch nicht verbürgt, daß Anfang und Ende einer Kurve auch zur gleichen physikalischen Isotherme gehören. Dies ist nur der Fall, wenn

$$f_{01} = f_{10} ,$$
$$\varphi_0^0 + \varphi_1^1 = \varphi_0^1 + \varphi_1^0 ,$$

also nur, wenn die von Lösungsmittel und gelöstem Stoff abhängigen Größen φ_0^1 und φ_1^0 eine ganz bestimmte Bedingung erfüllen. Tun sie dies nicht, so wird der Anfang *einer* Kurve durch einen ganz anderen mittleren Isothermenverlauf als er dem Planckschen Ansatz entspricht in das Ende einer *anderen* Kurve übergeführt.

Dies im wesentlichen negative Ergebnis hat immerhin insofern eine physikalische Bedeutung, als dadurch eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs dieser ersten Näherung möglich wird. Dieser Bereich wird sicher beschränkt durch die Konzentrationsgebiete, innerhalb welcher sich die kritischen Erscheinungen abspielen und das sind teilweise Gebiete, innerhalb welcher die Lösungen schon als verdünnt bezeichnet werden müssen.

II. *Die Jahnschen Isothermen.* Ebensowenig wie diese erste Näherung führt auch in der Jahnschen Form die zweite Näherung zu einem kritischen Punkt. Dieser ist nämlich nach (15), (18), (19) jetzt an die Bedingungen

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = \frac{2\varphi_{11}}{c_0^3}, \quad \frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_1}{c_1^2} = \frac{6\varphi_{11}}{c_0^4}$$

gebunden, woraus durch Elimination von φ_{11}

$$\frac{2r_0}{c_0^2} + \frac{3r_1}{c_0 c_1} + \frac{r_1}{c_1^2} = 0$$

folgt. Diese Gleichung ist aber unmöglich, da darin die Summe dreier wesentlich positiver Größen verschwindet. Noch deutlicher wird dies in der molekularen Form, in der sich für den kritischen Punkt

$$c_0 = 2, \quad c_1 = -1$$

ergibt. Auch allein aus der Betrachtung von φ_{11} kann man die Ungeeignetheit des Jahnschen Ansatzes zur Darstellung der kritischen Erscheinungen erkennen. Entweder nämlich ist φ_{11} positiv, dann wird f für $c_1 = 0$ und ebenso für $c_1 = 1$ positiv unendlich und die Isothermen zeigen im Gebiete c_1 nahe 1 nicht den nötigen Anschluß an die Planckschen Isothermen. Oder φ_{11} ist negativ, dann folgt aus (18), daß die Kurvenschar keine Maxima und Minima zeigen kann, wie es für das Vorhandensein eines kritischen Punktes notwendig ist.

Sonach wird die Theorie der Lösungen durch die Jahnsche Näherung wenigstens in bezug auf die kritischen Erscheinungen keinen Schritt weiter geführt.

III. *Die Isothermen der Ansätze* (7), (9) ergeben demgegenüber zunächst widerspruchsfrei den kritischen Punkt. Für diesen gilt jetzt

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = 2\varphi_{11},$$

$$\frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_1}{c_1^2} = 0.$$

Hieraus folgen die kritischen Konzentrationen, die wir von jetzt ab durch einen Stern auszeichnen,

$$(21) \qquad c_0^* = \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}, \quad c_1^* = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}.$$

Nach (5) kann man diese Werte in Zusammenhang mit den Molekulargewichten bringen; es ergibt sich die Beziehung

$$\frac{c_0^*}{c_1^*} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}},$$

für deren Prüfung es zunächst allerdings noch an dem nötigen Beobachtungsmaterial fehlt. Die kritische Temperatur bestimmt sich aus

$$\varphi_{11}^{*} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2. \tag{22}$$

Jede Isotherme zeigt für $\varphi_{11} > \varphi_{11}^{*}$ ein Maximum und ein Minimum. Für Werte von c_1 nahe 0 oder 1 gehen die Isothermen in die Plancksche Form über. Sie bilden demnach eine Kurvenschar etwa von der in Fig. 2 dargestellten Gestalt, die allen in Abschnitt 2 genannten Anforderungen entspricht.

Auf jeder Isotherme lassen sich zwei Punkte, A und B, so bestimmen, daß ihre zur c_1-Achse parallele Verbindungsgerade mit den Isothermenbögen ACE einerseits und BDE andererseits an Inhalt gleiche Flächenstücke begrenzt. Gemäß (13), (14) stellt AB den Zustand der Lösung im Zweiphasengebiet dar. Der geometrische Ort der Punkte A, B ist die Sättigungskurve, die im kritischen Punkt ein Maximum hat.

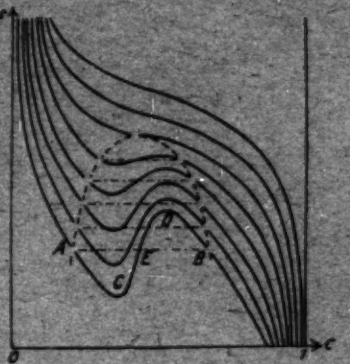


Fig. 2.

Das von der Sättigungskurve umschlossene Gebiet hat, wenn von Übersättigungserscheinungen abgesehen wird, nur theoretische Bedeutung; im besonderen führen nach (12) die Isothermen überall da, wo in diesem Gebiet

$$\frac{df}{dc_1} > 0$$

ist, durch labile Zustände hindurch. Die Konzentrationen in den Punkten A, B stehen zueinander in einer Beziehung, die von Druck und Temperatur unabhängig ist und die wir die Sättigungsgleichung nennen wollen. Sie wird aus den Gleichungen (13), (14), (16), (17) gewonnen und kann nach gehöriger Umformung auf die Form gebracht werden

$$\begin{cases} r_0\left\{(c_0' + c_0'')\log\frac{c_0'}{c_0''} - 2(c_0' - c_0'')\right\} \\ \qquad + r_1\left\{(c_1' + c_1'')\log\frac{c_1'}{c_1''} - 2(c_1' - c_1'')\right\} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Solche zusammengehörigen Konzentrationen koexistenter Phasen sind von Rothmund in verschiedenen flüssigen Systemen beobachtet worden. Der Vergleich mit diesen Beobachtungen zeigt, daß (23) auch quantitativ mit der Erfahrung gut übereinstimmt. So ist z. B. für das Gemisch Schwefelkohlenstoff-Methylalkohol, wenn mit c_1 die Konzentration des Methylalkohols bezeichnet wird,

$\bar{c}_1'$	$\bar{c}_1''$ beobachtet	berechnet	$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''}$
0,549	0,017	0,016	0,021
0,492	0,028	0,027	0,028
0,458	0,036	0,037	0,032
0,416	0,045	0,050	0,034
0,360	0,065	0,072	0,039
0,195	0,195	0,192	0,059

wobei der Berechnung der Wert

$$\frac{r_1}{r_0} = 0{,}0567$$

zugrunde gelegt wurde.

Wir haben bisher mit den molaren Ansätzen gearbeitet. Die entsprechenden molekularen Beziehungen folgen aus (21), (22), (23), wenn darin r_1 und r_2 durch R ersetzt werden. Für den kritischen Punkt ergeben sich so die außerordentlich einfachen Bedingungen

$$c_0^* = \tfrac{1}{2}\,, \quad c_1^* = \tfrac{1}{2}\,, \quad \varphi_{11}^* = 2R\,.$$

Leider befinden sich die weiteren Ergebnisse nicht in der wünschenswerten quantitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Sättigungsgleichung erhält hier nämlich die gleichfalls sehr einfache Form

$$c_1' + c_1'' = 1\,,$$

oder, wenn sie auf die von Rothmund beobachteten molaren Konzentrationen reduziert wird, die jetzt der Übersichtlichkeit halber wieder besonders gekennzeichnet werden,

$$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''} = \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} = \text{const.}$$

Wie die letzte Spalte der obigen Tabelle zeigt, ist der Quotient auf der linken Seite aber keineswegs konstant, sondern mit

der Konzentration in ziemlich hohem Grade veränderlich. Danach kommt den molekularen Ansätzen nur eine qualitative Bedeutung zu.

Ähnlich wie bei den Planckschen Isothermen lassen sich auch hier die beiden Ansätze miteinander vergleichen, die man erhält, wenn man einmal den einen und dann den anderen Stoff als Lösungsmittel ansieht. Unterscheidet man die Größen in beiden Fällen wieder durch herangefügten oberen Index, so wird entweder

$$f = f_{01} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^0 ,$$
$$f_{01} = r_0 - \varphi_0^0 - r_1 + \varphi_1^0 ,$$

oder

$$f = f_{10} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^1 ,$$
$$f_{10} = r_0 - \varphi_0^1 - r_1 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11}^1 .$$

Haben die aus beiden Ansätzen folgenden Isothermen gemeinsame Punkte — und das ist anzunehmen, wenn anders sich aus ihnen die kritischen Erscheinungen in gleicher Weise ergeben sollen —, so müssen die Beziehungen

$$\varphi_{11}^0 = \varphi_{11}^1 = \varphi_{11} ,$$
$$\varphi_0^0 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11} = \varphi_0^1 + \varphi_1^0$$

erfüllt sein; es muß also vor allem der Koeffizient φ_{11} in genau der gleichen Weise vom Lösungsmittel wie vom gelösten Stoff abhängen.

4. Ein allgemeiner Satz über die Sättigungsgleichung.

Versucht man, wie wir es oben getan haben, die Plancksche Theorie der hochverdünnten Lösungen in absichtlicher Überschreitung ihres Geltungsbereichs auf die kritischen Lösungserscheinungen, die sich wesentlich nur in Gebieten höherer Konzentration abspielen, anzuwenden, so ergibt sich im allgemeinen nicht nur keine Übereinstimmung mehr mit der Erfahrung, sondern man wird auch, wie sich gezeigt hat, zu Widersprüchen der Theorie in sich geführt. Immerhin ergab sich z. B. schon der Krümmungswechsel der Isothermen an der richtigen Stelle und sehr wunderbarer Weise läßt sich auch die Sättigungsgleichung — wie man sich leicht überzeugt — aus jenen Ansätzen herleiten, die in sich völlig widerspruchsfrei ist und, wie wenigstens im Falle binärer Gemische

gezeigt wurde, in bemerkenswertem Grade den Beobachtungsresultaten entspricht. Die Bedeutung der von uns an die Planckschen Ansätze herangesetzten Zusatzglieder beruht demnach im wesentlichen darin, daß sie die inneren Widersprüche der Theorie beseitigen, ohne doch — ganz im Gegensatz zu der Jahnschen Erweiterung — den schon brauchbaren Kern, die Sättigungsgleichung nämlich, zu verändern. Die durch diese Glieder veranlaßte Änderung ist demnach rein sekundärer Natur und die oben gezogenen durch die Erfahrung bestätigten Folgerungen sind im wesentlichen schon ein Bestandteil der ursprünglichen Planckschen Theorie. Wir zeigen kurz, auf welchen allgemeinen Zusammenhängen dies beruht.

Aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (10), (11) ergibt sich für irgend zwei Phasen, z. B. für die ersten beiden, die Gleichung

$$(24) \qquad \varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum (c_1' - c_1'') \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right),$$

worin die Summe über alle Bestandteile, auch über den $a$ten, zu erstrecken ist. Die Zustandsänderungen, auf die wir diese Gleichgewichtsbedingungen in der vorliegenden Untersuchung anwenden, sind nicht ganz allgemeiner Natur; sie gehen vielmehr stets kontinuierlich ohne chemische Umsetzungen vor sich. Handelt es sich etwa wie oben um ein binäres Gemisch, so wird dessen Zustand durch die nämliche Funktion Φ bestimmt, gleichgültig, ob es einerseits oder andererseits verdünnt oder beliebig konzentriert ist. Ebenso unterscheiden sich z. B. φ' und φ'' nur durch die Werte der Konzentrationen, dagegen sind die darin eingehenden Konstanten die gleichen, genau wie dies in der Van der Waalsschen Theorie der Zustandsgleichung einer einheitlichen Flüssigkeit der Fall ist, die in unveränderter Form für den von der Flüssigkeit ausgesandten Dampf Gültigkeit behält. Unter dieser beschränkenden Annahme gilt der folgende Satz: Ist φ eine ganze Funktion ersten oder zweiten Grades der Konzentrationen, so wird (24) identisch erfüllt.

Zum Beweise werde φ zunächst als lineare Funktion der Konzentrationen angenommen; es sei etwa

$$\varphi = \sum \varphi_1 c_1,$$

worin die Koeffizienten φ beliebig von Druck und Temperatur abhängen können. Dann ist unter der obigen Voraussetzung der Kontinuität

$$\varphi' = \sum \varphi_1 c_1', \qquad \varphi'' = \sum \varphi_1 c_1'',$$
$$\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} = \varphi_1 \text{ usw.}, \qquad \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} = \varphi_1 \text{ usw.},$$

also

$$\varphi' - \varphi'' = \sum \varphi_1 (c_1' - c_1''),$$
$$\frac{1}{2} \sum (c_1' - c_1'') \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right) = \sum \varphi_1 (c_1' - c_1''),$$

was zu beweisen war.

Um auch für quadratische Funktionen von der Form

$$\varphi = \sum \varphi_{11} c_1^2 + 2 \varphi_{12} c_1 c_2 + \ldots$$

den Nachweis zu führen, bringt man (24) passend auf die Form

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} - c_1'' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} - c_1'' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in zwei Teile, von denen der eine sich nur auf die erste Phase, der andere sich nur auf die zweite Phase bezieht. Soll die Gleichung identisch erfüllt werden, so muß sich auch die rechte Seite in gleicher Weise anordnen lassen können. Abgesehen von dem Fall, daß φ linear von den Konzentrationen abhängt, ist diese Zerlegung aber nur dann möglich, wenn die zweite Summe identisch verschwindet, wenn also einzeln

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} - c_1'' \frac{\partial \varphi}{\partial c_1''} \right),$$
$$0 = \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} - c_1'' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1''} \right).$$

Der oben angegebene quadratische Ausdruck erfüllt nun in der Tat diese beiden Bedingungen. Für die erste folgt dies aus der Eigenschaft von φ als homogene Funktion zweiten Grades; für die zweite sieht man es, wenn man die Glieder mit einem bestimmten der Koeffizienten φ_{11}, φ_{12} usw. ins Auge faßt.

Man erkennt weiter sofort, daß ganze Funktionen der Konzentrationen von höherem als dem zweiten Grade die bewiesene Eigenschaft nicht mehr haben; denn die erste der

beiden simultanen Gleichungen wird nur durch quadratische Funktionen erfüllt. Demnach führen alle Funktionen φ_1, die sich um ganze Funktionen ersten oder zweiten Grades der Konzentrationen unterscheiden, aber auch nur diese, zur nämlichen Gleichung (24).

Nach dem bewiesenen Satze wird (24) durch die zweite und die dritte Summe in dem von uns den Betrachtungen zugrunde gelegten Ausdruck (4), (9), (16)

$$\varphi = -\sum r_0 c_0 \log c_0 + \sum \varphi_0 c_0 + \sum (\varphi_{11} c_1^2 + 2 \varphi_{12} c_1 c_2 + \ldots)$$

identisch befriedigt. Es kann also φ beim Einsetzen in (24) durch den einfacheren, schon im Planckschen Ansatz für hochverdünnte Lösungen enthaltenen Ausdruck

$$-\sum r_0 c_0 \log c_0$$

ersetzt werden. Hieraus geht schon hervor, daß die aus (24) herzuleitende Gleichung in unserem Falle Druck und Temperatur nicht enthält, sich also eine Beziehung allein zwischen den Konzentrationen koexistenter Phasen ergibt. Vereinigt man nach dem Einsetzen alle sich auf den gleichen Bestandteil beziehenden Glieder, so erhält man die Sättigungsgleichung (23) in der allgemeinen Form

$$\sum r_0 \left\{ (c_0' + c_0'') \log \frac{c_0'}{c_0''} - 2 (c_0' - c_0'') \right\} = 0.$$

Entsprechende Beziehungen gelten natürlich auch für jede andere Kombination von je zwei Phasen.

Die Sättigungsgleichung ist sonach allein eine Folge der logarithmischen Glieder in den Planckschen Reihenentwicklungen, die sich bekanntlich aus dem Vergleich der Gesetze der Lösungen mit den Gesetzen des idealen Gaszustandes ergeben. Damit treten die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit in direkte Beziehung zu den Gasgesetzen. In der Tat würde die Sättigungsgleichung genau so für den gasförmigen Zustand gelten müssen, wenn ein Gasgemisch in zwei Phasen vorkommen könnte. Natürlich würden sich dabei auch wieder die gleichen Widersprüche wie oben bei Bestimmung des kritischen Punktes aus den Planckschen Ansätzen ergeben müssen, die ja erst durch das Anfügen der quadratischen Glieder, die die Gasgleichung[1]) nicht enthält,

1) Planck, a. a. O. Gleichung 199a.

aufgehoben werden. Die gesamte Theorie bleibt widerspruchsfrei, weil im Bereiche der einfachen nur lineare Glieder enthaltenden Ansätze, bei den Gasen nämlich, nicht Phasen verschiedener Zusammensetzung gebildet werden, und weil da, wo solche Phasen in flüssigen oder festen Systemen auftreten, eben die allgemeinere die quadratischen Glieder mit enthaltende Fundamentalbeziehung gilt.

Bemerkt sei noch, daß in den vorliegenden Betrachtungen unseres Wissens zum ersten Male das auf das Lösungsmittel bezogene Glied $\log c_0$ voll zur Geltung kommt. Bei den Vorgängen in verdünnten Lösungen wird c_0 im allgemeinen gleich 1 gesetzt, so daß $\log c_0$ verschwindet.

Die von uns vorgenommene Erweiterung der Planckschen Theorie erweist sich nach der obigen Darlegung in dem betrachteten speziellen Beispiel als erfolgreich. Weitergehende Untersuchungen müssen zeigen, ob sich noch andere zutreffende Folgerungen daraus ziehen lassen. Vor allem muß dadurch entschieden werden, ob die in der obigen Anwendung auch quantitativ befriedigenden molaren Ansätze in der Tat vor den molekularen den Vorzug verdienen. Es würde das den bisherigen Anschauungen, wonach die molekularen Ansätze im Wesen der Sache begründet sind, entgegen sein. Sollte diese Entscheidung nicht zugunsten der molaren Gleichungen ausfallen, so müßten im genauen Verfolg des Planckschen Gedankens die Reihenglieder dritter und höherer Ordnung herangezogen werden, um den quantitativen Anschluß an die Erfahrung zu erzielen. Dadurch würde dann allerdings die Sättigungsgleichung nicht unerhebliche Änderungen erfahren.

Wenn auch die weitere Auswertung der Planckschen Reihenentwicklungen immer näheren Aufschluß in der Theorie der Lösungen bringen wird, so ist auf dem Wege doch wohl kein endgültiger Abschluß der Theorie zu erwarten, wenn man sich nicht in endlose Rechnungen verlieren will. Derartige Untersuchungen, die sich auf Reihenentwicklungen gründen, werden wohl stets mehr oder weniger unbewußt in der Hoffnung unternommen, allmählich nicht nur zu immer mehr genäherten, sondern zu den genauen Ansätzen durchdringen zu können. Das bedeutet die Erwartung, daß die

Reihen nach einer nicht zu großen Zahl von Gliedern abbrechen, also endlich sind, oder daß man nach wenigen Gliedern schon sichere Anhaltspunkte gewinnt, wie sich die entwickelte Funktion in Wirklichkeit aufbaut. Von diesem Standpunkt aus würde sich empfehlen, zunächst schon etwa den Ausdruck

$$\varphi = -\sum r_i c_i \log c_i + \sum \varphi_i c_i + \sum \varphi_{i\mu} c_i c_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots \alpha)$$

nicht nur als genäherten, sondern als genauen Wert des Potentials φ zu betrachten und alle irgend möglichen Folgerungen daraus zu ziehen. Erweist sich danach diese Annahme als nicht zutreffend, so würde neben der Untersuchung der Reihenglieder höherer Ordnung der Versuch gemacht werden können, mit einer geschlossenen Funktion, die durch den hingeschriebenen Ausdruck in anderer Weise approximiert wird, eine passende Erweiterung der Theorie zu finden. Am schnellsten und sichersten dürften solche rein formalen Versuche allerdings fortschreiten, wenn sie auf eingehende kinetische Vorstellungen gestützt werden könnten.

Neukölln, Juli 1919.

(Eingegangen 26. Juli 1919.)

3. *Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont;*

von H. Dember und M. Uibe.

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 69, 14. Nov. 1917.)

Siebenter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1. Aufgabe.

Sonne und Mond besitzen im Horizont einen kleineren scheinbaren Durchmesser als im Zenit. Dies ist eine Folge davon, daß am Horizont der Abstand der Gestirne vom Beobachter größer ist als im Zenit. Am erdennahen Mond lassen sich diese Differenzen mikrometrisch feststellen, und man erhält z. B. für einen Durchmesser von 31′20″ im Horizont einen solchen von 31′52″ für 90° Höhe. Im gleichen Sinne wie die Verschiedenheit der Entfernung wirkt die atmosphärische Strahlenbrechung, die am Horizont eine Verkleinerung des vertikalen Durchmessers hervorruft. Aus diesen Gründen müßten die Gestirne am Horizont kleiner aussehen als im Zenit. Der tägliche Augenschein lehrt uns das Gegenteil: Wir schätzen die Gestirne in Horizontnähe mehr als doppelt so groß als in Zenitnähe.

Die älteren Theorien (Einfluß der Luftperspektive, Vergleichstheorien) sehen diesen Widerspruch als Wirkung einer Urteilstäuschung an, welche durch die unbewußte Verwendung von Urteilsmitteln hervorgerufen wird, die für diesen Fall untauglich sind, aber der sonstigen Erfahrung nach zu richtigen Schlüssen führen. In neuerer Zeit wird die Ursache oft einer optischen Täuschung zugeschrieben (Blickrichtungstheorie), bei welcher zwischen den geometrisch-physikalischen Eigenschaften des Objekts und der subjektiven optischen Wahrnehmung des Beobachters eine Übereinstimmung nicht besteht.

Die genau gleichen Anschauungen und Überlegungen, welche im einzelnen zur Erklärung der sichtbaren Größenveränderung der Gestirne dienen, sind auch für die Erklärung der Form des Himmelsgewölbes herangezogen worden. In dem vorangehenden 6. Bericht[1]) haben wir gezeigt, daß der sichtbaren Form des Himmelsgewölbes berechen- und meßbare physikalische Ursachen zugrunde liegen. Danach wird die Gestalt des Himmelsgewölbes bedingt durch die nach verschiedenen Richtungen von der Himmelshelligkeit abhängige verschiedene Sichtweite, welche bewirkt, daß wir am Tage im Abstande der Sichtweite eine unterschiedslose Grenze sehen, die von den im Sinne der Rayleighschen Theorie leuchtenden Molekeln der Luft gebildet wird.

Im folgenden haben wir den Versuch gemacht, experimentell und rechnerisch zu untersuchen, wieweit ein Zusammenhang zwischen diesem sichtbaren reellen Himmelsgewölbe und der sichtbaren Größenvariation der Gestirne besteht. Dabei hat uns der Gedanke geleitet, diejenige Stelle als Ort des Gestirns anzusehen, wo der vom Gestirn nach dem Auge konvergierende Lichtkegel das Himmelsgewölbe durchdringt und dann besonders zu untersuchen, ob zwischen den wirklichen Größen dieser Durchdringungsstellen — die infolge der abgeflachten Form des Gewölbes sich bei verschiedenen Gestirnhöhen voneinander der Größe und Lage nach unterscheiden — und der sichtbaren Größe der Gestirne ein fester numerischer Zusammenhang besteht.

§ 2. Versuch zur Prüfung der Gaussschen Blickrichtungstheorie.

Eine zahlenmäßige Prüfung derjenigen Theorien durchzuführen, die auf Urteilstäuschung und unbewußten Schlüssen, also auf rein psychologischen Vorgängen beruhen, waren wir nicht imstande. Dagegen ließ sich eine Entscheidung über das Gelingen eines Versuches bringen, von dem widersprechende Ergebnisse vorliegen und der von mehreren Forschern dazu angestellt worden ist, zu prüfen, wieweit bei der Größenvariation der Gestirne die Blickrichtung eine Rolle spielt, also eine bestimmte physiologische Eigenschaft unseres Sehapparates in

1) H. Dember und M. Uibe, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 391—411. 1917.

Frage kommt. Der Vorschlag, einen solchen Versuch auszuführen, rührt von Gauss her: Hängt die scheinbare Größe der Sonne und des Mondes von der Blickrichtung ab, so muß das Spiegelbild des im Zenit stehenden Gestirns, in der horizontalen Richtung gesehen, groß erscheinen, und andererseits das vom Horizont aus in die Vertikale geworfene Bild klein. Helmholtz hat diesen Versuch ausgeführt[1]), indem er den hochstehenden Mond in die horizontale Richtung reflektierte. Der reflektierte Mond erschien ihm nicht entschieden größer als der direkt gesehene. Filehne und Zoth[2]) dagegen beschreiben den Versuch mit konträrem Ergebnis. Sowohl Helmholtz als auch die beiden letzteren Forscher benutzten planparallele Glasplatten zur Spiegelung.

Wir haben das Experiment mit einigen Abänderungen unter besonderer Berücksichtigung des Punktes wiederholt, der dem Helmholtzschen Versuch als Fehler vorgeworfen worden

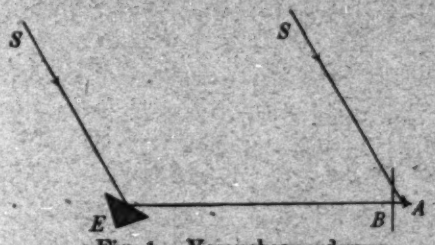


Fig. 1. Versuchsanordnung.

ist, nämlich daß in seiner Anordnung der Spiegel selbst nicht unsichtbar gewesen sei. Außerdem haben wir die planparallele Platte durch eine einzige spiegelnde Oberfläche ersetzt, weil planparallele Glasplatten sowohl an der Vorder- wie auch Hinterseite reflektieren und so zwei Bilder geben, die bei schräger Inzidenz der Lichtstrahlen nicht ganz zur Deckung kommen und bei genügender Lichtintensität leicht eine Vergrößerung vortäuschen können. Das Licht des Gestirns *S* (vgl. obenstehende Versuchsanordnung) fiel in unserer Anordnung auf die Hypotenuse eines sehr gut geschliffenen Glasprismas *E* und von dort durch ein Blendglas *B* in das Auge *A*.

1) H. v. Helmholtz, Physiologische Optik. 2. Aufl., S. 776. 1896.
2) Vgl. Pernter-Exner, Meteorologische Optik, wo auch, wie bei Helmholtz, die ältere Literatur angegeben ist.

Das Blendglas bestand in einer exponierten, entwickelten und fixierten photographischen Platte, welche die Sonne als silbernes Scheibchen durchscheinen ließ, aber so dicht war, daß von der spiegelnden Oberfläche des Prismas nichts erkannt werden konnte. Das Auge hat auf solche Weise keinen Anhalt, die Akkommodation beim Wechsel der Objekte (direkt gesehene Sonne oder ihr Spiegelbild) zu ändern. Das Ergebnis unserer Versuche war das gleiche wie es Helmholtz erhalten hat: Ob das Gestirn direkt oder im Spiegelbild betrachtet wurde, es behielt immer die gleiche scheinbare Größe. Die Versuche kamen an der Sonne und am Mond mit gleichem Resultat zur Ausführung.

Der Blickrichtungstheorie kommt hiernach für die Erklärung der Vergrößerung der Gestirne ebensowenig eine Bedeutung zu, wie für die Erklärung der Form des Himmelsgewölbes. Eine auf solche Art zustande kommende optische Täuschung liegt nicht vor.

§ 3. Meßmethode.

Um die Größenveränderung der Gestirne in verschiedenen Höhen über dem Horizont zu verfolgen, bedienten wir uns des folgenden, im Prinzip einfachen und schon von Reimann verwendeten Verfahrens. Eine weiße kreisrunde und durchscheinende Leinwandscheibe wurde in solcher Entfernung vom Beobachter aufgestellt, daß sie ihm die gleiche Größe zu haben schien wie das durch ein Blendglas betrachtete Gestirn. Das Blendglas ist stets so dicht gewesen, daß nur das Gestirn und nichts von der Umgebung zu erkennen war. Dabei ist vor allem darauf geachtet worden, daß kein Messen an Stelle des Schätzens ausgeführt werden konnte. Dies erreichten wir so, daß der Azimutabstand des niedrig stehenden Gestirns — nur hier liegt die Gefahr vor — ein genügend großer von der Scheibe aus war, und zwar immer größer als 30°. Die Höhe der Scheibe, die in einem dunklen Rahmen an einer der Länge nach verstellbaren Stange saß, war die Augenhöhe, und die Scheibe kam meist so zur Aufstellung, daß sie der Meereshorizont schnitt. Für verschieden große Gestirnhöhen muß der Beobachter eine jedesmal andere Distanz von der Scheibe aufsuchen, damit diese ihm gleich groß erscheint wie das Ge-

stirn. Das Aufsuchen geschah in der Weise, daß der Beobachter aus einer Entfernung, bei der die Leinwandscheibe mit Sicherheit kleiner geschätzt wurde als das Gestirn, an die Scheibe langsam heranging, den Ort der Gleichheit markierte und dann so weit sich näherte, bis die Scheibe mit Sicherheit größer erschien. Rückwärtsgehend markierte er dann wieder den Punkt der Gleichheit. Das Mittel aus beiden Markierungen nahmen wir als richtiges Mittel an und bestimmten den Abstand von der Vergleichsscheibe mit dem Bandmaß. Sieben Monate lang fortgesetzte, fast tägliche Übung verschaffte die angestrebte Sicherheit in der Ausführung dar Schätzungen.

Diese Beobachtungsmethode setzt voraus, daß für alle in Frage kommenden Abstände des Beobachters von der Vergleichsscheibe die scheinbare lineare Größe der Scheibe dem Abstande umgekehrt proportional ist oder ein anderer gesetzmäßiger Zusammenhang besteht. Es läßt sich durch Verwendung verschieden großer Scheiben bei gleicher Höhe des Gestirns leicht zeigen, daß diese Voraussetzungen für kleine Abstände nicht gelten[1]), und wir haben aus diesem Grunde die Scheibengrößen so gewählt, daß Entfernungen unter 15—20 m nur ausnahmsweise benutzt zu werden brauchten. Die Durchmesser der am meisten zur Verwendung gekommenen Scheiben waren $2r_1 = 40{,}0$ cm und $2r_2 = 29{,}8$ cm. Daß für größere Entfernungen die erste Voraussetzung erfüllt ist, zeigen die folgenden Beobachtungsreihen. Aus ihnen ist zu erkennen, daß sich die mit beiden Scheiben für dieselbe Gestirnhöhe gefundenen Entfernungen L_D (Beobachter: *D*) und L_U (Beobachter: *U*) wie die Durchmesser der Scheiben verhalten, daß also die Bedingung für die Verwendbarkeit der Methode

$$L_D : L_U = \text{konst.} = 2r_1 : 2r_2 = 40{,}0 : 29{,}8 = 1{,}342$$

mit hinreichender Annäherung Genüge getan wird.

In den Tabellen bedeutet ζ_z die Zenitdistanz des Gestirns und daher $\frac{\pi}{2} - \zeta_z = \varphi_z$ seine Höhe über dem Horizont.

---

1) Aus allen folgenden Ergebnissen ist der Schluß zu ziehen, daß auch für sehr große Entfernungen (~ 50 km) der Gesichtswinkel dem *Auge* nicht mehr das exakte Maß der scheinbaren Größe bildet. Ob darüber direkte Messungen vorliegen, ist uns nicht bekannt.

Tabelle 1.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_4$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Sonne	3,2° vorm.	31,95 m			2. Juni 1917
	3,8		23,60 m	1,35	
	7,3	34,10			
	7,9		25,80	1,32	
	13,2		29,50		
	13,8	40,85		1,38	
	26,3	46,40			Klar, nur Horizont
	26,6		33,50	1,38	[diesig
	37,3	48,25			
	38,4		36,45	1,32	
	61,5	56,05			In der Güimarmulde
	62,5		41,10	1,36	[ganz feiner Dunst
	73,6	61,00			
	75,6		48,20	1,26	
	83,7	61,00	48,50	1,26	
	53,9° nachm.	46,90			
	52,6		33,70	1,39	
	41,7		33,40		
	41,0	48,50		1,45	
	32,0	45,50	33,40	1,36	
	17,1	41,40	30,10	1,37	Haidingers Büschel
				Mittel	[deutlich
				= 1,350	

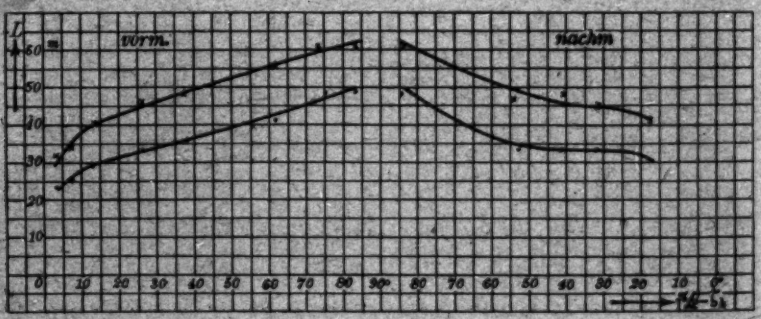


Fig. 2. Kurve 1.

Tabelle 2.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_a$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Sonne	5,6° vorm.		24,15 m		4. Juni 1917
	6,0	33,55 m		1,39	Horizont diesig
	16,2	41,50	29,70	1,40	
	28,3	46,00			
	29,2		34,00	1,35	Bis auf Horizont:
	40,0		38,70		[klar
	40,3	48,40		1,25	
	63,1	57,75			
	64,1		44,80	1,29	
	76,5	60,30			
	76,8		46,90	1,29	
	83,9	62,50	44,60	1,40	Schwach dunstig in
	62,6° nachm.		36,60		[der Glimarmulde
	62,0	49,20		1,34	
	48,2	48,70	35,60	1,36	
	35,2	44,60	33,40	1,33	
	17,8	37,15	27,70	1,34	Horizont wird klar
				Mittel = 1,340	

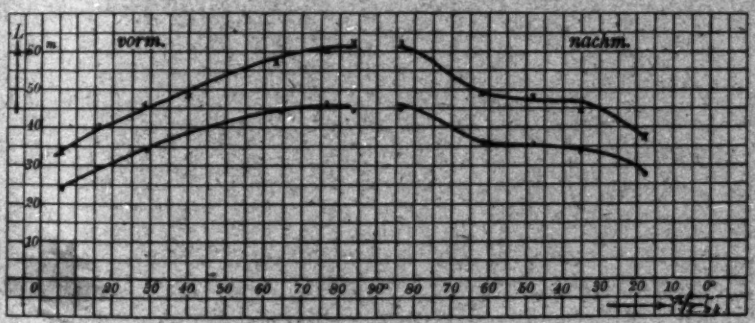


Fig. 3. Kurve 2.

Tabelle 2a.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_a$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Voll-	4,6°		26,10 m		4. Juni—5. Juni 1917
mond	5,1	34,75 m		1,33	Klare Nacht
	11,0		30,20		
	12,0	40,70		1,35	
	26,0	43,55	37,20	1,18	
	33,0	47,75	39,20	1,22	
	37,5	53,40	40,90	1,31	
	29,5	45,00	33,90	1,33	
	16,5	41,55	31,20	1,34	
				Mittel = 1,295	

Für geringere Entfernungen als 15 m haben uns besondere Untersuchungen gezeigt, daß sich $L_D : L_U$ dem Werte

$$\left(\frac{2r_1}{2r_2}\right)^2 = 1{,}80$$

nähert, woraus folgt, daß das Auge dann nicht mehr Durchmesser, sondern Flächen schätzt. Der Übergang von der ersten zur zweiten Potenz von $\left(\frac{2r_1}{2r_2}\right)$ geschieht langsam und ist stark von der individuellen Beschaffenheit des Auges und der Disposition des Beobachters abhängig. Beträgt schließlich der Abstand des Beobachters von der Vergleichsscheibe nur etwa 5 m, so ändert sich die scheinbare Größe bei weiterer Annäherung nicht mehr, d. h. die Methode versagt.

Eine große Anzahl von Beobachtungen, die in der Weise angestellt waren, daß derselbe Beobachter erst mit der einen Scheibe den Abstand L_D, dann mit der andern den Abstand L_U aufsuchte, mußten verworfen werden, da die Messungen keine Kohärenz zeigten und eine große Unsicherheit beim Schätzen vorhanden war, die nicht überwunden werden konnte. Jeder Beobachter arbeitete schließlich monatelang nur mit ein und derselben Scheibe ganz bestimmter Größe. Die Übung wurde mit dieser so weit getrieben, daß bei gleicher Sonnenhöhe, aber wechselnder Aufstellung im Gelände — so daß die vielleicht mögliche Erkennung der Entfernungen an irgendwelchen Merkmalen vereitelt war — die Abstände L bei Wiederholungen auf 30—50 cm gleich geschätzt wurden, was einem relativen Fehler einer Schätzung von 1—2% entspricht.

Um die Sicherheit und Gleichartigkeit der Schätzungen weiter zu erhöhen, kamen sie immer so zur Ausführung, daß das Auge durch das Blendglas hindurch fest auf das Gestirn gerichtet blieb und nur zum schätzenden Vergleich bei langsamen Vor- und Rückwärtsschreiten von Zeit zu Zeit ein kurzer Blick auf die Vergleichsscheibe geworfen wurde.

§ 4. Beobachtungsresultate an Sonne und Mond.

In den Tabellen 1—13 und den Kurven 1—13, sowie der Tafel der Mondmessungen Fig. 16 sind die Meßresultate von 14 günstigen Tagen und 6 Nächten niedergelegt, die in den letzten Monaten erhalten worden sind. $\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_k\right) = \varphi_k$

bedeutet die mit einem Busch-Jensenschen Pendelquadranten gemessene Höhe des Sonnen- bzw. Mondzentrums, L_D und L_U die jeweiligen von beiden Beobachtern für die verschiedenen Höhen gefundenen Abstände von den Vergleichsscheiben.

Tabelle 3.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,4°	—	29,70 m	7. Juli 1917
5,6	38,00 m	30,70	Sehr klar
10,0	43,90	33,60	
15,6	49,10	35,50	2° hohe Wolkenbank am
29,1	52,40	36,00	SO-Horizont
37,5	54,70	39,00	
59,5	59,15	40,70	
73,0	60,40	41,60	
84,1	64,60	44,70	

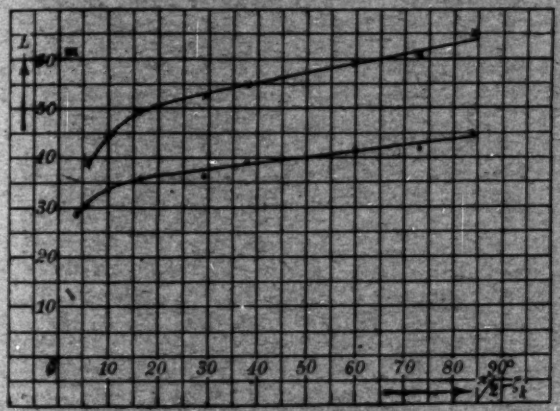


Fig. 4. Kurve 3.

Tabelle 4.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
3,7°	—	25,40 m	8. Juli 1917
6,8	37,60 m	30,00	Sonne geht stark elliptisch
10,6	43,30	33,70	auf
17,7	45,15	33,80	Horizont diesig
29,4	47,80	35,00	Himmel fleckig
38,3	54,00	36,40	
52,5	59,80	37,20	
65,6	59,10	38,20	
78,3	59,00	38,40	
84,0	60,10	38,00	

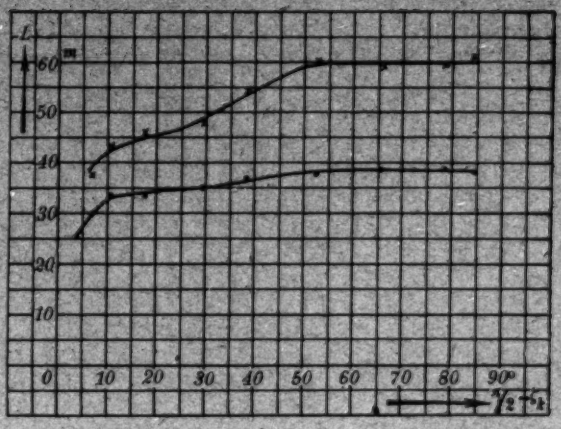


Fig. 5. Kurve 4.

Tabelle 5.

$\frac{\pi}{2} - \zeta$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,2°	39,70 m	27,25 m	9. Juli 1917
7,2	41,00	30,60	Klar
11,2	42,10	30,50	Mond tagsüber gut
17,8	46,80	32,50	sichtbar
28,2	48,60	33,20	
41,7	51,20	34,80	
51,4	52,90	36,40	
66,0	56,40	39,60	
79,0	59,40	44,90	
83,9	59,20	44,70	

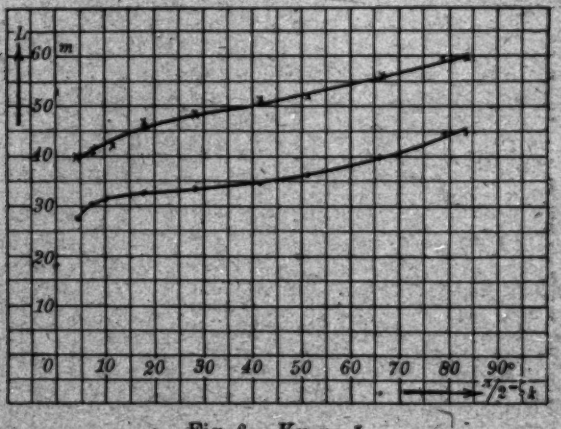


Fig. 6. Kurve 5.

Tabelle 6.

$\frac{\pi}{2} - \zeta$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,4°	39,50 m	27,60 m	10. Juli 1917
5,8	40,15	28,80	
10,5	42,60	30,50	
18,5	43,10	32,90	Tagsüber immer wachsende Sichtigkeit
25,8	45,90	33,20	
37,7	46,60	35,00	
53,4	51,00	36,00	
65,0	51,35	36,00	
83,7	53,60	43,70	

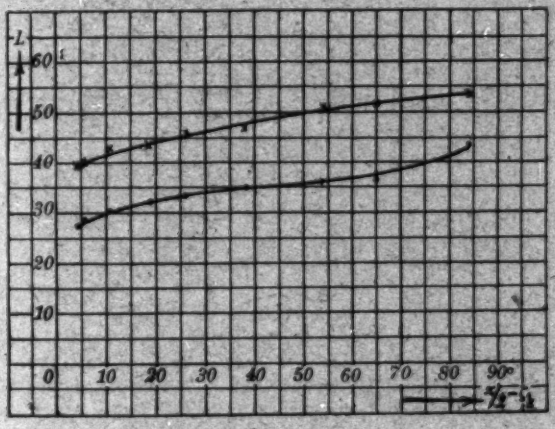


Fig. 7. Kurve 6.

Tabelle 7.

$\frac{\pi}{2} - \zeta$	L_D	L_U	$L_U \times 1{,}34$	Mittel aus L_D und $L_U \times 1{,}34$	$\frac{1}{\text{Mittel}} \times 10^3$	Bemerkungen
3,8°	29,60 m	24,70 m	33,1 m	31,4 m	3,19	11. Juli 1917
7,2	36,60	27,30	36,5	36,5	2,74	Südwetter
11,2	39,60	30,65	41,3	40,4	2,47	Sonne erscheint
20,3	42,20	30,80	41,4	41,8	2,39	weiß beim Auf-
29,5	45,20	34,45	46,1	45,6	2,19	gehen
45,0	47,60	35,20	47,3	47,4	2,11	Feine hohe Zirren
63,3	48,35	36,65	49,3	48,8	2,05	
76,6	51,15	39,90	53,5	52,3	1,91	
83,7	52,25	40,80	54,8	53,5	1,87	

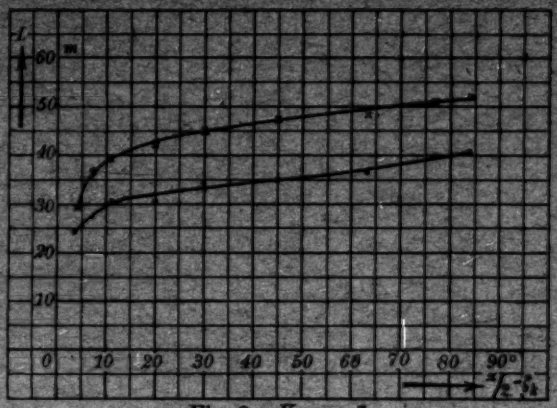


Fig. 8. Kurve 7.

Tabelle 8.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_2$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,3°	27,25 m	18,60 m	12. Juli 1917
4,2	35,50	28,80	Südwetter
8,0	36,80	—	Feine hohe Zirren
9,2	—	25,30	
13,4	38,00	30,80	
22,4	44,60	31,60	
31,4	44,80	33,40	
52,2	46,80	36,40	
68,5	48,50	36,70	Dicht über dem Meer
77,5	51,65	37,75	bildet sich eine Wolken-
83,6	52,15	40,90	schicht
39,9°	42,80 m	31,00 m	13. Juli 1917
51,3	45,10	33,10	Himmel weißlich. Fernsicht
76,7	47,80	35,90	verschleiert. Hohe feine
83,5	46,70	35,20	Zirren

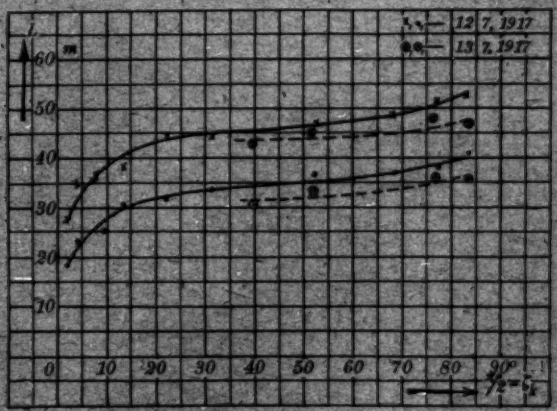


Fig. 9. Kurve 8.

Tabelle 9.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_h$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,5°	22,50 m	—	16. Juli 1917
4,7	—	21,70 m	Sonne geht elliptisch auf.
6,4	33,80	22,20	Himmel weißlich. Untere
11,6	36,60	30,00	Schichten aufklärend
21,0	39,30	32,00	
37,0	45,90	33,00	
50,9	46,40	34,60	
63,8	48,50	35,90	
77,0	51,60	36,90	
82,9	51,60	39,60	Aufklärend

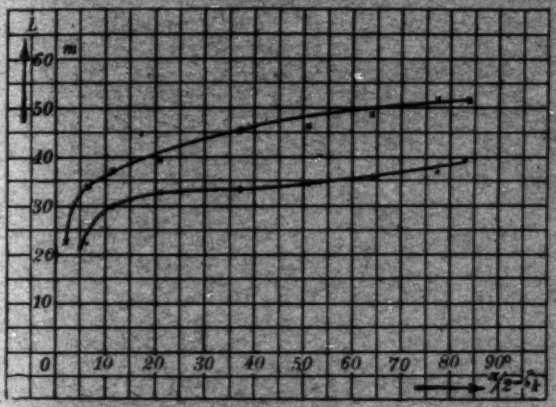


Fig. 10. Kurve 9.

Tabelle 10.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_h$	L_D	L_U	$L_U \times 1{,}34$	Mittel aus L_D und $L_U \times 1{,}34$	$\frac{1}{\text{Mittel}} \times 10^4$	Bemerkungen
1,6°	13,40 m	—	—	13,4 m	7,47	17. Juli 1917
2,4	—	15,60 m	20,9 m	20,9	4,79	Größere Sichtweite
3,5	23,25	—	—	23,2	4,30	als tags vorher
3,9	—	20,80	27,9	27,9	3,59	Spitzen von Gran
8,0	34,30	26,30	35,2	34,8	2,87	Canaria (etwa
12,0	39,50	28,50	38,3	38,9	2,57	100 km Entfernung)
21,0	45,05	31,10	41,8	43,4	2,31	sichtbar
36,0	45,35	34,10	45,9	45,6	2,19	Außer Wolkenbank
57,2	48,50	35,85	48,0	48,2	2,07	von 1° Höhe
71,2	50,40	36,95	49,5	49,9	2,00	wolkenfrei
80,3	50,70	39,20	52,7	51,7	1,94	
82,7	52,30	40,30	54,0	53,1	1,88	

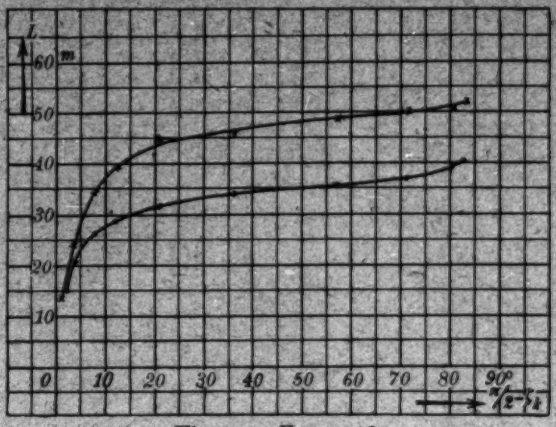


Fig. 11. Kurve 10.

Tabelle 11.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_2$	L_D	L_U	Bemerkungen
1,9°	18,75 m	—	18. Juli 1917
2,7	—	17,50 m	Sehr klar
3,4	—	18,10	Farbe des Himmels
3,8	22,60	—	gesättigt
7,6	32,70	23,60	
14,7	37,00	29,80	
21,3	40,70	29,40	
29,1	43,80	30,90	
39,5	46,80	33,80	
56,2	47,30	34,30	
71,0	49,30	35,10	
81,0	51,90	40,50	
82,6	53,50	36,50	

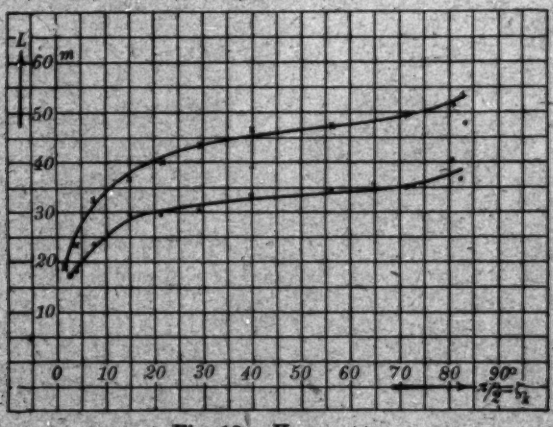


Fig. 12. Kurve 11.

Tabelle 12.

$\frac{\pi}{2} - \zeta$	L_D	L_U	Bemerkungen
1,0° vorm.	12,60 m	—	21. Juli 1917
1,9	—	14,50 m	Ort: Izaña, 2300 m ü. d. M.
4,0	35,55	—	$\bar{b}_p$ = 605 mm Hg
5,0	—	25,70	Sonne geht oval auf, daher
7,6	39,00	26,40	sind die frühen Werte
20,1	43,80	33,90	unsicher
36,5	46,60	34,20	Pik klar sichtbar. Gran
52,0	49,65	36,60	Canaria nicht sichtbar
64,6	52,80	38,20	Die unteren Schichten sind
77,9	53,70	36,60	deshalb dunstig anzunehmen
81,8	53,80	36,80	
72,3° nachm.	50,40	34,60	Tagesüber wachsende
56,4	43,40	32,20	Sichtigkeit
39,6	41,20	32,30	
23,3	38,70	31,30	
13,6	37,60	28,60	
5,6	36,65	27,10	
2,6	32,60	—	
2,0	30,00	—	
1,75	26,60	—	Sonne oval beim Untergang,
1,4	17,50	—	daher auch diese späten
0,5	10,40	—	Werte unsicher

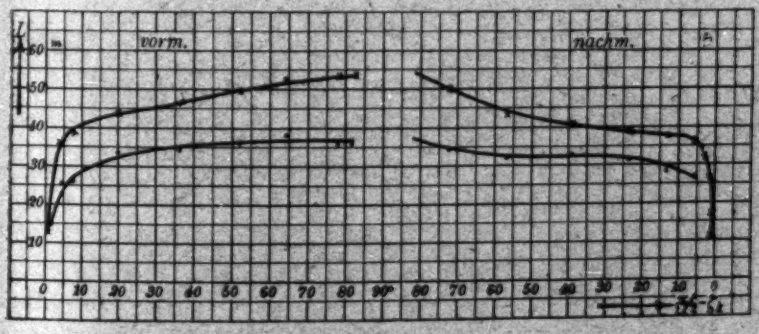


Fig. 13. Kurve 12.

Tabelle 13.

$\frac{\pi}{2} - \zeta$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,1° vorm.	11,30 m	—	22. Juli 1917
3,0	20,30	—	Ort: Izaña [1])
5,7	—	23,70 m	
6,4	38,20	30,00	Horizont im SO dunstig
17,7	43,30	32,20	N-Quadrant sichtig
28,0	47,90	34,80	Blau des Himmels gesättigt
38,6	49,60	35,80	
50,5	49,90	34,10	
63,4	49,70	36,10	Vereinzelte Kumulibildung
76,1	50,00	33,00	über dem Pik
81,8	49,20	34,00	
71,0° nachm.	—	32,70	
55,0	—	32,90	Haidingers Büschel bei ge-
43,2	—	32,30	sättigtem Blau deutlich
27,1	—	30,60	
16,4	—	30,80	
7,0	—	28,65	
6,0	—	26,70	

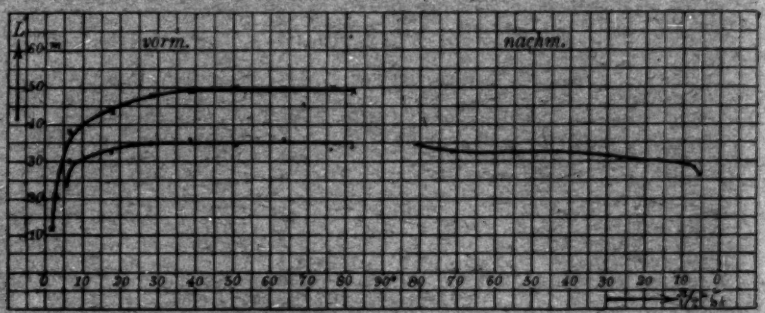


Fig. 14. Kurve 13.

§ 5. Durchdringungstheorie und ihre Prüfung an den Beobachtungen.

Wir wollen annehmen, daß die wahrgenommene Größenänderung eine physikalische Ursache besitzt, daß also *dem subjektiv als größer aufgefaßten Gestirn auch etwas objektiv Größeres zugrunde liegt.* Der vom Gestirn nach dem Auge konvergierende lichterfüllte Strahlenkegel schneidet aus dem lufterfüllten

1) Dem Direktor des Izaña-Observatoriums Sr. D. Francisco del Junco haben wir für die Gastfreundschaft zu danken, die es uns ermöglicht hat, diese Beobachtungen auszuführen.

Gewölbe einen leuchtenden Kegel, dessen Projektion auf eine zur Blickrichtung (Kegelachse) normale Ebene eine Kreisfläche ist. Diese Kreisfläche soll die Stelle sein, an der wir das Gestirn sehen.

Es sei HZH (Fig. 15) das vom Beobachter in O gesehene Himmelsgewölbe. $N_1 Q_1$ und $N_2 Q_2$ sind die in einem größten

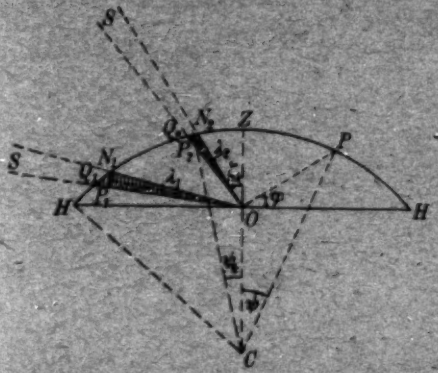


Fig. 15. Schnitt durch das Himmelsgewölbe.

Kreis der Kugelkalotte liegenden „vertikalen Durchmesser" zweier Durchdringungsstellen der Lichtkegel in zwei verschiedenen Höhen über dem Horizont, $N_1 P_1$ und $N_2 P_2$ sind deren Projektionen auf Ebenen, die senkrecht zu den entsprechenden Blickrichtungen stehen.

Denken wir uns den Kalottenbogen HZ in n gleiche Teile geteilt, so schneiden gleiche Winkel, die O zum Scheitel haben, in verschiedenen Höhen über H eine verschieden große Anzahl der n Teile ab. Nur für den Halbkreis über HOH ist deren Anzahl in allen Höhen gleich. Dem Zentriwinkel ψ_k sollen k solcher Teile, von Z aus gezählt, entsprechen. Ist der Zentriwinkel $HCZ = 2\psi$, so gilt

$$k : n = \psi_k : 2\psi.$$

Wird ψ_k wie ψ von Z aus gerechnet, so zählen auch die k in diesem Sinne. Rechnet man die Teile von H aus und bezeichnet sie mit k', so ist $n - k = k'$. Zwischen dem Zentriwinkel ψ des geschätzten Halbwertes ψ des Himmelgewölbes, der Höhe $\varphi_k = \frac{\pi}{2} - \zeta_k$ und dem zu dieser Höhe gehörigen Zentriwinkel ψ_k besteht die Beziehung

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = \cos 2\psi \cos \varphi_k,$$

wo ψ durch den für das betreffende Gewölbe (Kalotte) in Betracht kommenden Halbwertwinkel gegeben ist. Das aus dieser Gleichung für ein bestimmtes φ_k berechnete ψ_k in die vorangehende Beziehung eingesetzt, ergibt k und k'.

Eine bestimmte Anzahl Grade $\varphi_{k(1)} - \varphi_{k(2)}$ schneide $k'(1) - k'(2) = \Delta k'$ Teile ab. Im gleichen Längenmaß wie die $\Delta k'$ lassen sich die Projektionen $\Delta k_p'$ dieser Längen auf eine Ebene, die zur Blickrichtung senkrecht steht, ausdrücken. Da der projizierende Winkel $QNP = R - (\varphi_k + \psi_k)$ ist, so gilt

$$NP = NQ \cdot \sin(\varphi_k + \psi_k),$$
$$\Delta k_p' = \Delta k' \cdot \sin(\varphi_k + \psi_k).$$

Für zwei verschiedene Höhen über dem Horizont verhalten sich diese Projektionen wie ihre Abstände λ_1 und λ_2 von O

$$N_1P_1 : N_2P_2 = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Die vom Beobachter beim Schätzen der Gestirngrößen gemessenen Abstände L werden um so kleiner gemessen, je größer diese Projektionen sind, und zwar gilt nach dem vorangehenden 3. Abschnitt

$$N_1P_1 : N_2P_2 = L_2 : L_1$$

und weil

$$N_1P_1 : N_2P_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p},$$

so folgt

$$\lambda_1 : \lambda_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p} = L_2 : L_1.$$

Die letztere Beziehung wollen wir dazu benutzen, die gemessenen L mit denen $\left(= \frac{1}{\Delta k_p}\right)$ zu vergleichen, welche resultieren, wenn unsere Anschauung richtig ist, d. h. die Projektionen der Durchdringungsstellen ihrer Größe nach durch das gerade vorhandene reelle Himmelsgewölbe bedingt werden.

In der folgenden Tabelle 14 ist dieser Vergleich für einen schönen Tag (4./6. 1917) durchgeführt. Die $\Delta k'$ und $\Delta k_p'$ sind von 10 zu 10° berechnet, wobei $n = 1000$ angenommen ist. An diesem Tage war das Himmelsgewölbe durch einen Halbwert $\varphi = 32°$ charakterisiert. 32° entspricht genau dem Wert, den wir als Mittel einer großen Anzahl von Beobachtungen für einen hiesigen Sommertag angegeben haben.[1])

1) H. Dember und M. Uibe, 3. Bericht; Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 141. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

Tabelle 14.

φ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	L gerechnet[1]) $= \frac{1}{\Delta k_p'} \times 3430$	L gemessen: mit 40er Scheibe auf 29,8er umgerechnet	L gemessen: mit 29,8er Scheibe	L gemessen: Mittel
0—10°	185,1	142,4	24,0	25,0 m	24,0 m	24,5 m
10—20	157,5	123,6	27,8	29,0	28,3	28,7
20—30	133,4	108,5	31,5	32,0	32,8	32,4
30—40	113,4	96,5	35,5	35,3	36,9	36,1
40—50	98,2	87,5	39,2	38,9	40,1	39,5
50—60	87,0	80,9	42,4	41,2	42,8	42,0
60—70	79,2	76,2	44,8	43,8	44,8	44,3
70—80	74,2	73,2	46,7	45,1	45,9	45,5
80—90	72,0	71,9	47,7	—	—	—

Die Werte L_U und L_D beider Beobachter sind in der Tabelle durch Division der L_D mit 1,45 vereinigt.

Die Übereinstimmung der gerechneten und gemessenen Zahlen ist innerhalb der Schätzungsunsicherheit vollständig. *Hierdurch ist wahrscheinlich gemacht, daß an günstigen Tagen die Projektion des erleuchteten Luftkegels auf eine zur Blickrichtung senkrechte Ebene, die sich an der Grenze des sichtbaren Himmelgewölbes befindet, als Gestirn der Größe nach wahrgenommen wird.*

Zum gleichen Resultat führt die Diskussion der Mondbeobachtungen (vgl. Fig. 16). Sie kamen in derselben Weise zur Ausführung wie an der Sonne, nur wurden die Vergleichsscheiben nachts von einer Lampe durchscheinend erleuchtet. Die Lampe trug einen diffus zerstreuenden Schirm, so daß die Leinwandscheiben gleichmäßig hell erschienen.

Die am 4.—5. Juni ausgeführten Beobachtungen zeigen deutlich, wie in der ersten Hälfte der Nacht die beobachteten Werte sich mit Hilfe eines Gewölbes darstellen lassen, dessen Halbwert $\varphi = 33^0$ ist, die zweite Hälfte mit einem höheren. Geschätzt wurden bei einer Mondhöhe $\varphi_k = 37{,}5^0$ ein Halbwert von 33,4° und bei absteigendem Mond bei $\varphi_k = 29{,}5^0$ eine $\varphi = 35{,}7^0$. Der Tageshalbwert am 4./6. betrug 32°.

1) Der Zahlenfaktor, mit dem $\frac{1}{\Delta k_p'}$ hier und in folgenden Tabellen multipliziert ist, ist so gewählt, daß das Produkt mit dem Mittel der gemessenen L direkt verglichen werden kann.

Die Durchdringung des Mondlichtkegels liegt beim Aufgang des Mondes auf einem Gewölbe, das nur wenig höher ist als das Tagesgewölbe. Das der Vollmondnacht entsprechende Himmelsgewölbe tritt erst ein, nachdem die vom Sonnenlicht

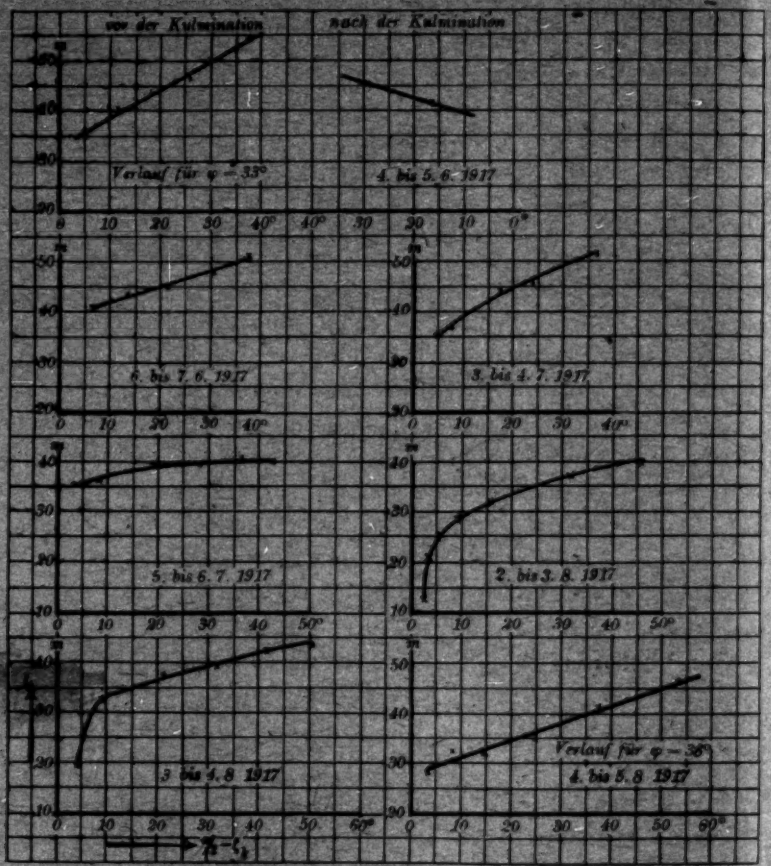


Fig. 16. Kurve 14.

hervorgerufene Dämmerung verschwunden ist. In der Nacht vom 4. auf 5./8. war der Halbwert des Gewölbes $\varphi = 36°$, und die Mondgrößen, die hier geschätzt wurden, entsprechen, wie der Verlauf der Kurve zeigt, diesem Wert. Der 4. Juni, 5. Juni und 4. August waren Tage mit geringem Dunst am Horizont, was sich in den Kurven durch den fast geradlinigen Verlauf und die geringe Steigung beim Mondaufgang kennzeichnet.

Tabelle 14a.

φ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	$\frac{1}{\Delta k_p'} \cdot 5170$	L gemessen	Bemerkungen
0—10°	178	141	36,6	35,8 m	4.—5. Juni 1917
10—20	154	124	41,7	41,3	Geschätzter Halbwert
20—30	114	110	47,0	47,0	$\varphi = 33{,}4°$; die Rechnung
30—40	89	99	52,1	52,4	ist für $\varphi = 38{,}0°$ durch-geführt

Tabelle 14b.

Δ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	$\frac{1}{\Delta k_p'} \cdot 4139$	L gemessen	Bemerkungen
0—10°	160	138	29,9	29,8 m	4.—5. August 1917
10—20	142	124	33,4	33,0	Halbwert für mittleren
20—30	128	114	36,3	36,4	Nachthimmel mit Mond-schein $\varphi = 36{,}7°$
30—40	114	104	39,8	39,8	
40—50	104	97	42,6	43,2	Die Rechnung ist für
50—60	95	91	45,5	46,7	$\varphi = 36{,}0°$ durchgeführt

In den vorstehenden Tabellen 14a und 14b sind für den 4.—5. Juni und 4.—5. August 1917 die berechneten $\frac{1}{\Delta k_p'}$ mit den gemessenen L zusammengestellt.

Trotzdem die Mondvergleichungen viel schwieriger sind als die Beobachtungen an der Sonne, ist die Übereinstimmung eine gute.

§ 6. Darstellung durch die Sichtweiten.

Die vorangehenden Ausführungen stützen sich auf die Annahme, daß das durch den Halbwert φ charakterisierte Himmelsgewölbe auch in der Nähe des Gestirns vorhanden sei. Im Bericht Nr. 6[1]) haben wir darauf aufmerksam gemacht, daß dies im allgemeinen nur an sehr klaren Tagen der Fall ist, da sonst durch die besonders in der Nähe der Sonne vermehrten Helligkeiten die Sichtweiten und damit die Gestalt des Himmels beeinflußt werden. Die Zahlen der Tabelle 4 vom 8. Juli 1917, einem unruhigen Tage, lassen deutlich erkennen, welchen Einfluß ein Kondensationsvorgang in der Atmosphäre auf die scheinbare Größe der Gestirne ausübt.

1) H. Dember und W. Uibe, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 391. 1917.

Dasselbe zeigen die Beobachtungen vom 13/7. (Tabelle 8). Bei beginnender Trübung, die mit dem Auge als solche nicht erkennbar zu sein braucht, wächst die scheinbare Größe an. Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht auch die Nachmittagskurve vom 21/7. 1917 (Tabelle 12 und Fig. 13), wo für die Entfernungen L am Nachmittag bei gleichen Sonnenhöhen kleinere Werte gemessen wurden als am Vormittage, was einer größeren scheinbaren Gestirngröße entspricht.

Die Projektionen (NP) der Durchdringungsstellen sind um so größer, desto weiter sie vom Beobachter entfernt sind,

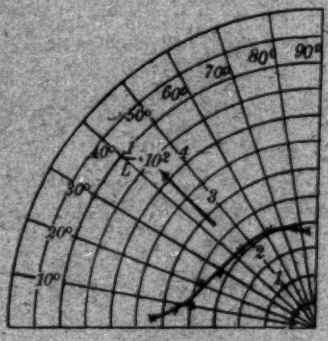


Fig. 17. Kurve 7a.

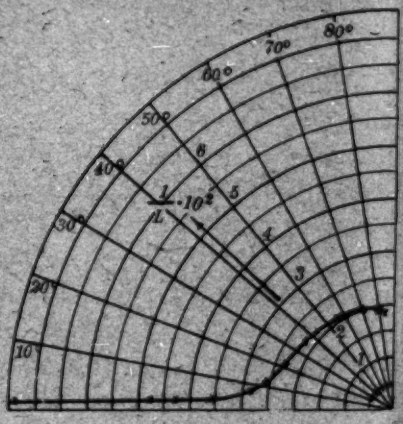


Fig. 18. Kurve 10a.

$\lambda_1 : \lambda_2 = \Delta h'_{1,p} : \Delta h'_{2,p}$, und da sich weiter verhält $\lambda_1 : \lambda_2 = L_1 : L_2$, so geben die reziproken Werte der gemessenen L als Radiivektoren unter dem Höhenwinkel φ_k von 0 aus abgetragen eine Bahn, auf der sich die Durchdringungsstellen bzw. ihre Projektionen abzeichnen. Diese so gezeichnete Bahn hat als Himmelsgewölbe in keinem Zeitpunkt bestanden und darf nicht mit der Form des Himmelgewölbes in einem bestimmten Zeitpunkt verwechselt werden. Diese Bahn ist nur die Verbindungslinie der Abstandsendpunkte von 0 der projizierten Durchdringungsstellen, oder sie ist nur der Ort, den die Durchdringungsstellen tagsüber eingenommen haben. In Fig. 17 und 18 (Kurve 7a und 10a) sind diese Bahnen mit Hilfe der Mittelwerte von $1/L$ der Tabellen 7 und 10 auf diese Weise dargestellt.

Diese Bahnen müssen — wenn unsere im vorigen Bericht und die hier entwickelten Anschauungen richtig sind — mit denjenigen identisch sein, welche man durch Zuhilfenahme der Sichtweiten errechnet, die durch photometrische Messungen bestimmt werden oder mit anderen Worten, es soll die Entfernung der projizierten Durchdringungsstelle NP von O, welche aus dem durch Schätzung gewonnenen Scheibenstand L bestimmt ist, mit derjenigen identisch sein, die sich aus der photometrisch gemessenen Sichtweite errechnet.

Zwischen den Sichtweiten S und R zweier Himmelsstellen und ihren Helligkeiten H_1 und H_2 besteht die Beziehung[1])

$$S : R = \sqrt{H_1} : \sqrt{H_2}.$$

Um vergleichbare Werte für die Sichtweiten zu bekommen, und um mit diesen die *jeweilige* Lage der projizierten Durchdringungsstellen des vom Gestirn ausgehenden, die sichtbare Atmosphäre durchschneidenden Lichtkegels zu erhalten, haben wir nicht die in der Nähe der Sonne gefundenen — jedesmal auf den Zenit als Einheit bezogenen — Helligkeiten allein benutzt, sondern die Helligkeiten in Sonnennähe auf eine mittlere Helligkeit des Gesamthimmels bezogen. Zur Auswertung dieser mittleren Helligkeit dienten in jedem Falle rund 45 photometrische Einzelmessungen[2]), die systematisch über dem ganzen Himmel verteilt worden waren. Die Wurzeln der so erhaltenen relativen Helligkeiten, als Sichtweiten vom Beobachtungspunkt O aus unter dem zugehörigen Höhenwinkel φ_k abgetragen, geben die gesuchte Bahn.

Nennen wir H_n die Helligkeit in der Sonnennähe und $\overline{H}_m$ das Mittel aus den Helligkeiten des Gesamthimmels, zur gleichen Zeit wie H_n gemessen, so ist die Sichtweite in der Nähe der Sonne

$$S = \sqrt{\frac{H_n}{\overline{H}_m}}.$$

Die Tabellen 15 und 16 geben die für die Bahnkonstruktion benutzten Helligkeits-Mittelwerte und die Kurven 15 und 16 ihre graphische Darstellung wieder. Die photometrischen

1) Vgl. Bericht Nr. 6, § 2. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. 395. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

2) M. Uibe, Leipz. Inaug.-Diss. 1919. Abhdlgn. d. math.-physikal. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 35. Nr. 6. 1918.

Messungen sind an zwei typischen Sommertagen 1916 ausgeführt.

Tabelle 15.

22. Juni 1916 Mittleres φ_k	Relat. Helligkeit 10° über der Sonne im Sonnenvertikal = H_s	$\sqrt{H_s}$	Mittlere Helligkeit des Gesamthimmels = $\overline{H_w}$	$\sqrt{H_w}$	$\sqrt{\frac{H_s}{H_w}} \times 1{,}50$[1])
4,0° vorm.	21,2	4,60	3,43	1,85	3,73
20,1	8,40	2,90	3,39	1,84	2,37
35,0	5,12	2,26	2,70	1,64	2,07
56,7	3,00	1,73	1,67	1,29	2,01
74,6	1,80	1,34	0,88	0,91	2,21
84,0	0,75	0,87	0,42	0,65	2,01
72,6 nachm.	1,50	1,22	0,82	0,89	2,04
54,6	2,65	1,63	1,64	1,28	1,91
35,3	6,20	2,49	2,46	1,57	2,37
22,8	8,90	2,98	2,81	1,68	2,66

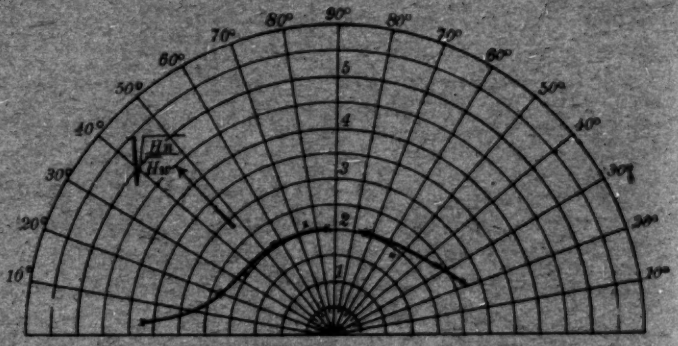


Fig. 19. Kurve 15.

Tabelle 16.

23. Juni 1916 Mittleres φ_k	Relative Helligkeit 10° über der Sonne im Vertikal = H_s	$\sqrt{H}$	Mittlere Helligkeit des Gesamthimmels = $\overline{H_w}$	$\sqrt{H_w}$	$\sqrt{\frac{H_s}{H_w}}$
0° vorm.	30,3	5,50	4,00	2,00	2,75
19,7	7,61	2,76	3,36	1,83	1,57
34,8	4,83	2,20	2,57	1,60	1,38
59,8	2,45	1,57	1,52	1,23	1,27
74,4	1,35	1,16	0,94	0,97	1,19
84,5	0,78	0,88	0,47	0,69	1,27

1) Der Faktor 1,50 ist so gewählt, daß ein Vergleich mit der Kurve auf Kurve Fig. 10a ohne weiteres möglich ist.

Ein Vergleich der Kurven 15 und 16 mit den aus den gemessenen L konstruierten 7a und 10a läßt den gleichen Charakter des Verlaufes erkennen.

Die photometrischen Messungen am 22. Juni 1916 (Tab. 15) und die Größenschätzungen am 17. Juli 1917 (Fig. 18) sind an zwei Tagen vorgenommen worden, die nach allen Bemerkungen des Beobachtungsjournals als gleich in bezug auf meteorologische Verhältnisse, vor allem auf Sichtigkeit der Luft, anzusehen sind. Hier ergibt sich nun quantitative Übereinstimmung der Kurven, wie es die folgende Tabelle 17 zeigt, wo die photometrisch gemessenen Sichtweiten ϱ mit den reziproken Werten der bei der Schätzung gefundenen L zusammengestellt sind.

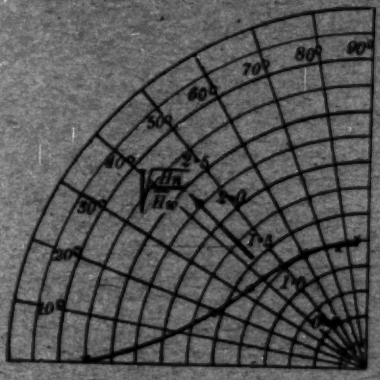


Fig. 20. Kurve 16.

Tabelle 17.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_h$	ϱ	$\frac{1}{L}$
5°	3,37	3,25
10	2,75	2,70
20	2,30	2,35
30	2,18	2,23
40	2,10	2,13
50	2,07	2,08
60	2,04	2,05
70	2,04	2,00
80	2,03	1,94

Diese quantitative Übereinstimmung gibt die Möglichkeit, aus photometrischen Messungen der Himmelshelligkeit, welche

die Sichtweite bestimmt, die vom Auge geschätzte Vergrößerung der Sonne zu berechnen.

§ 7. Ergebnis.

Den sichtbaren Größenänderungen von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont liegen physikalische Größen und Größenveränderungen zugrunde.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser Untersuchung verdanken wir Mitteln, welche die kartellierten Deutschen Akademien, sowie die Solvaystiftung zur Verfügung gestellt haben.

Güímar auf Teneriffa, August 1917.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

4. *Die reversible Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve*[1]; *von Richard Gans.*

§ 1. *Einleitung.* Vor einigen Jahren habe ich eine Größe definiert[2]), die ich reversible Permeabilität genannt habe. Ich habe dieselbe auf der jungfräulichen Magnetisierungskurve, dem aufsteigenden sowie dem absteigenden Hysteresisast gemessen und gefunden, daß ihr Wert, praktisch von der magnetischen Vorgeschichte unabhängig, eine reine Funktion der Magnetisierung ist. Diese Funktion habe ich später analytisch angeben können.[3])

Inzwischen sind die interessanten Untersuchungen von Steinhaus und Gumlich[4]) veröffentlicht worden, in denen ein Verfahren angegeben wird, eine von Hysteresis freie Magnetisierungskurve, die sogenannte ideale Magnetisierungskurve zu erzeugen.

Es schien mir von Interesse, zu sehen, ob auf dieser von den üblichen Magnetisierungskurven gänzlich verschiedenen Kurve die reversible Permeabilität auch denselben Wert als Funktion der Magnetisierung hat, weil im bejahenden Falle die von mir definierte Größe eine noch allgemeinere Bedeutung haben würde.

Zu dem Zwecke habe ich von vier Materialien, hartem Stahl, weichem Stahl, weichem Eisen und Nickel, die gewöhnliche und die ideale Magnetisierungskurve aufgenommen sowie

1) Vgl. auch R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Universidad Nacional de La Plata 2. S. 145. 1918.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 27. S. 1. 1908; 29. S. 301. 1909; 38. S. 1065. 1910; Verh. d. Deutschen phys. Ges. 12. S. 302. 1910; Phys. Zeitschr. 11. S. 988. 1910.

3) R. Gans, Phys. Zeitschr. 12. S. 1053. 1911.

4) W. Steinhaus u. E. Gumlich, Verh. d. D. Physik. Ges. 17, S. 369. 1915.

die reversible Permeabilität auf der jungfräulichen und auf der idealen Kurve beobachtet. Sie auch auf den Hysteresiskurven zu messen, war überflüssig, da ja bereits früher nachgewiesen war, daß jene Größe auf den Hysteresisästen denselben Wert hat, wie auf der Nullpunktskurve.

Die wichtigsten Ergebnisse der nachfolgenden Messungen sind, daß die ideale Kurve die von Steinhaus und Gumlich angegebene Form hat, insbesondere, daß diese Kurve im Nullpunkte senkrecht zur Abszissenachse steht, entsprechend einer unendlich großen Anfangspermeabilität, und zweitens, daß die reversible Permeabiltät, als Funktion der Magnetisierung, in der Tat genau denselben Verlauf auf der Nullpunktskurve wie auf der idealen Kurve hat, so daß praktisch die reversible Suszeptibilität $\varkappa_r$ in jedem erreichbaren Punkte der MH-Ebene einen bestimmten durch die Parametergleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varkappa_r}{3\varkappa_0} = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}, \\ \dfrac{M}{M_\infty} = \operatorname{Ctg} x - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

gegebenen Wert hat. In ihnen bedeutet $\varkappa_r$ die Anfangssuszeptibilität, M_∞ die Sättigungsmagnetisierung.

§ 2. *Die ideale Magnetisierungskurve.* Bekanntlich kann man ein ferromagnetisches Material durch abnehmende magnetische Wechselfelder entmagnetisieren, indem man mittels dieses Verfahrens die mehr oder weniger gerichteten Elementarmagnete in größtmögliche Unordnung bringt.

Überlagert man dagegen einem konstanten Magnetfelde ein auf Null abnehmendes Wechselfeld, so bleibt eine Magnetisierung übrig, die, wie Steinhaus und Gumlich gezeigt haben, eine eindeutige Funktion des Feldes H ist, unabhängig von der Art und Weise, wie H seinen Wert angenommen hat.

Um sie zu messen, bediente ich mich der magnetometrischen Methode, indem ich eine Magnetisierungsspule von 54 cm Länge und 2,94 cm innerem, 3,52 cm äußerem Durchmesser benutzte. Der Draht war hierbei auf einen Zylinder gewickelt, der aus zwei konzentrischen Glasröhren bestand, zwischen denen Wasser lief, um die Spule zu kühlen.

Die Spule hatte $n = 104{,}0$ Windungen pro Zentimeter, so daß das in ihrem Inneren erzeugte Magnetfeld den Wert

$$\frac{H}{i} = \frac{4\pi n}{10} = 130{,}7 \frac{\text{Gauss}}{\text{Ampere}}$$

besaß.

Diese Spule war mit einer Kompensationsspule in üblicher Weise in Serie geschaltet. Außerdem befanden sich im Stromkreise eine Akkumulatorenbatterie von 120 Volt, ein Präzisionsamperemeter, regulierbare Widerstände und ein Stromwender.

Schließlich haben wir noch eine Impedanz von kleinem Ohmschen Widerstande eingeschaltet, um zu verhindern, daß die Wechselströme der Entmagnetisierungsspule im Kreise der Magnetisierungsspule Ströme induzierten.

Im Inneren der Magnetisierungsspule befand sich das zu studierende ferromagnetische Material in der Form eines verlängerten Rotationsellipsoids.

Die Magnetisierungsspule war koaxial umgeben von einer Entmagnetisierungsspule von 59 cm Länge und 5,44 cm mittlerem Durchmesser; sie bestand aus 4 Lagen, und zwar befanden sich $n_0 = 22{,}20$ Windungen auf einem Zentimeter Länge, so daß die von einem Ampere erzeugte Feldstärke

$$\frac{H_0}{J_0} = \frac{4\pi n_0}{10} = 27{,}90 \frac{\text{Gauss}}{\text{Ampere}}$$

war. Diese Spule war mit einem Entmagnetisierungsapparat ähnlicher Konstruktion wie der von Steinhaus und Gumlich[1]) benutzte verbunden.

Die Messungen der Magnetisierung auf der idealen Kurve gestalteten sich nun folgendermaßen. Zuerst wurde das Ellipsoid entmagnetisiert, dann wurde in der Magnetisierungsspule ein schwacher Strom erzeugt, um das Ellipsoid zu magnetisieren. Dieser Strom ruft eine kleine Abweichung der Magnetometernadel hervor, die aber enorm zunimmt, wenn man dem konstanten Feld den Entmagnetisierungsprozeß über-

1) W. Steinhaus u. E. Gumlich, a. a. O. S. 375 u. E. Gumlich u. W. Rogowski, Ann. d. Phys. **34**. S. 245. 1911.

lagert. Dann verstärkt man das stationäre Feld, wendet von neuem das Entmagnetisierungsverfahren an und fährt so fort, bis man genügend Punkte der idealen Kurve beobachtet hat.

Die Feldstärken wurden natürlich wegen der endlichen Länge der Ellipsoide gemäß der Formel

$$H = \frac{4\pi n i}{10} - NM$$

korrigiert, wo N den Entmagnetisierungskoeffizienten bedeutet.

Die Ellipsoide waren dieselben wie die in Ann d. Phys. **33**, S. 1065 benutzten, jedoch hatten sich ihre magnetischen Eigenschaften im Laufe der Jahre etwas verändert.

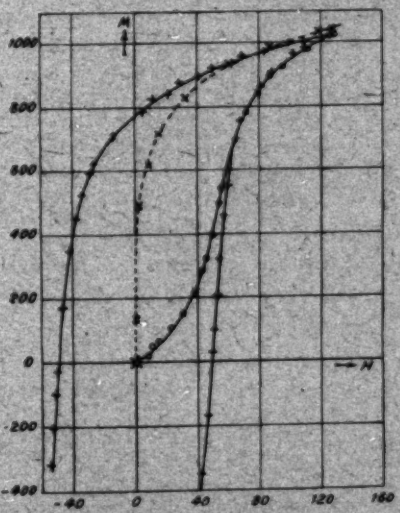
1. Gehärteter Remystahl.

Große Halbachse $A = 15{,}55$ cm; kleine Halbachse $B = 0{,}6625$ cm; Entmagnetisierungskoeffizient $N = 0{,}06496$; Volumen $V = 28{,}59$ cm³.

Nullpunktskurve.				Absteigender Hysteresiszast.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
52,97	14,11	3,44	10,67	1023	194,7	66,5	128,2
109,4	30,05	7,11	22,94	1001	173,6	65,0	108,6
213,6	51,48	13,88	37,60	965,6	145,5	62,72	83,2
319,5	65,73	20,75	44,98	931,3	122,0	60,49	61,5
496,3	86,38	32,23	54,15	893,5	98,79	58,03	40,76
694,8	110,9	45,13	65,77	840,7	75,41	54,61	20,80
840,5	133,9	54,59	79,31	788,3	56,58	51,21	5,37
921,0	154,7	59,83	94,87	705,2	31,62	45,80	− 14,18
977,9	175,0	63,52	111,5	616,2	13,07	40,02	− 26,95
1023	195,1	66,50	128,6	524,7	0,0	34,30	− 34,30
				449,3	− 9,147	29,18	− 38,33
20,83	9,147	1,353	7,794	348,4	− 19,34	22,63	− 41,97
69,45	20,25	4,511	15,74	− 28,94	− 52,28	− 1,88	− 50,40
151,0	40,64	9,812	30,83	− 204,0	− 66,18	− 13,25	− 52,93
281,3	61,67	18,27	43,40	− 461,0	− 87,56	− 29,94	− 57,62
392,3	75,26	25,49	49,77	− 698,2	− 110,6	− 45,35	− 65,25
540,9	92,51	35,14	57,37	− 861,8	− 136,8	− 55,98	− 80,82
780,9	122,3	50,72	71,6	− 959,8	− 164,9	− 62,34	− 102,6
895,2	145,2	58,15	87,1	− 1023	− 193,6	− 66,5	− 127,1
956,1	164,2	62,10	102,1				
1023	195,5	66,45	129,0				

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
−1023	−192,6	−66,4	−126,2	133,1	9,016	8,648	0,368
− 995,9	−163,9	−64,7	− 99,2	255,0	16,60	16,56	0,04
− 956,8	−131,0	−62,15	− 68,9	488,2	34,10	31,71	2,39
− 921,0	−109,5	−59,83	− 49,7	614,6	48,08	39,92	8,16
− 877,0	− 85,19	−56,97	− 28,22	716,3	61,75	46,52	15,23
− 827,1	− 65,34	−53,73	− 11,61	828,1	85,72	53,79	31,93
− 715,2	− 31,76	−46,45	+ 14,69	930,5	120,9	60,43	60,47
− 591,2	− 9,147	−38,40	29,25	985,4	150,5	64,00	86,5
− 519,3	0,0	−33,73	33,73	1037	185,8	67,38	118,4
− 401,2	+ 15,03	−26,05	41,08	1047	195,5	68,05	127,4
− 171,6	35,55	−11,15	46,70				
+ 98,97	57,37	+ 6,428	50,94				
319,2	75,14	20,73	54,41				
551,3	95,39	35,81	59,58				
757,0	117,0	49,17	67,8				
904,8	146,7	58,78	87,9				
980,4	173,6	63,68	109,9				
1023	196,8	66,45	130,4				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 1 dargestellt.



Gehärteter Remystahl.

⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 1.

2. Geglühter Remystahl.

$A = 16{,}04$ cm; $B = 0{,}660$ cm; $N = 0{,}06138$; $V = 29{,}32$ cm³.

Nullpunktskurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
98,12	15,81	6,03	9,78
383,4	38,03	23,54	14,49
778,5	68,08	47,79	20,29
1000,0	91,47	61,42	30,05
1139,0	127,1	69,92	57,18
1200,0	161,4	73,72	87,68
1247,0	196,3	76,60	119,7
48,35	9,15	2,97	6,18
269,1	29,27	16,52	12,75
600,5	53,32	36,86	16,46
902,4	78,41	55,40	23,01
1095	108,3	67,22	41,08
1180	142,7	72,44	70,26
1231	181,9	75,58	106,3

Absteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
1243	193,3	76,3	117,0
1222	172,5	75,01	97,5
1199	143,7	73,57	70,1
1173	125,3	72,02	53,3
1113	95,52	68,32	27,20
1052	71,61	64,59	7,02
958,8	52,66	58,86	− 6,20
440,3	15,68	27,03	− 11,35
201,9	0,0	12,40	− 12,40
68,3	− 9,147	4,191	− 13,34
− 51,2	− 16,07	− 3,144	− 12,93
− 338,2	− 36,59	− 20,76	− 15,83
− 585,5	− 52,93	− 35,94	− 16,99
− 926,6	− 80,63	− 56,89	− 23,74
− 1106	− 110,6	− 67,87	− 42,7
− 1200	− 153,5	− 73,72	− 79,8
− 1245	− 193,9	− 76,42	− 117,5

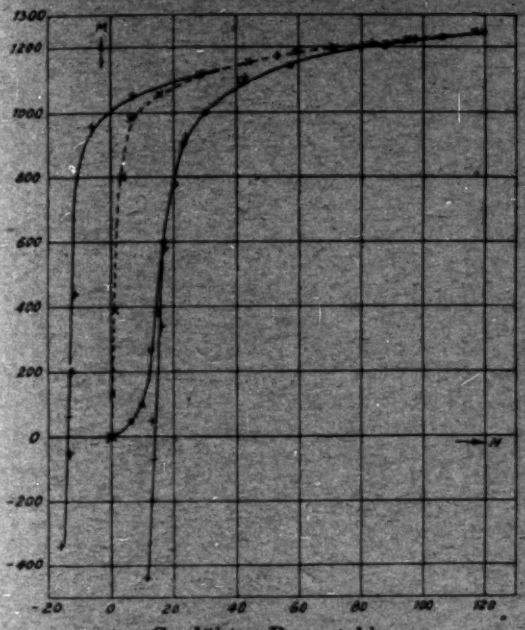
Aufsteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
− 1245	− 193,2	− 76,4	− 116,8
− 1214	− 158,1	− 74,56	− 83,5
− 1189	− 131,7	− 72,95	− 58,7
− 1149	− 105,9	− 70,52	− 35,4
− 1096	− 80,37	− 67,32	− 13,05
− 1037	− 62,59	− 63,65	+ 1,06
− 813,2	− 39,59	− 49,92	10,33
− 527,9	− 20,51	− 32,41	11,90
− 345,8	− 9,016	− 21,23	12,21
− 209,4	− 0,0	− 12,85	12,85
0,0	+ 13,46	0,0	13,46
+ 284,2	33,19	+ 17,45	15,74
482,7	46,51	29,64	16,87
789,6	69,13	48,48	20,65
1007	92,26	61,77	30,49
1147	126,5	70,36	56,1
1216	165,7	74,64	91,1
1247	194,7	76,60	118,1

Ideale Kurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
136,6	9,147	8,381	0,766
389,6	25,55	23,91	1,64
608,1	39,20	37,34	1,86
798,7	52,53	49,04	3,49
984,0	66,65	60,40	6,25
1053	80,31	64,66	15,65
1115	96,45	68,48	27,97
1149	114,6	70,55	44,0
1197	145,1	73,45	71,6
1225	170,4	75,19	95,2
1250	193,4	76,78	116,6

Die Resultate sind graphisch in Fig. 2 dargestellt.



Geglühter Remystahl.

⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 2.

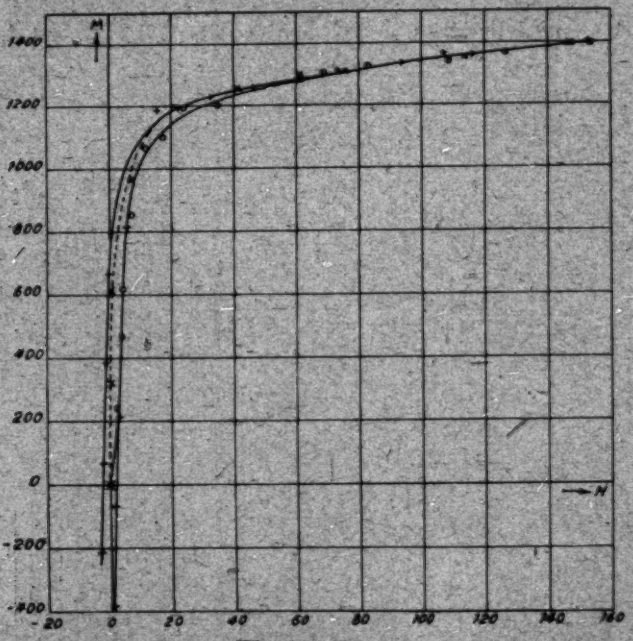
3. Weiches Eisen.

$A = 15{,}99$ cm; $B = 0{,}3995$ cm; $N = 0{,}02654$; $V = 10{,}69$ cm³.

Nullpunktskurve.				Absteigender Hysteresisast.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
212,0	9,018	5,627	3,391	1384	189,2	36,72	152,5
471,2	16,99	12,50	4,49	1360	152,3	36,09	116,2
851,3	30,06	22,59	7,47	1337	129,3	35,46	93,8
1102	46,79	29,23	17,56	1305	109,8	34,63	75,2
1203	67,05	31,95	35,10	1293	95,41	34,32	61,09
1281	95,81	34,01	61,80	1231	65,36	32,68	32,68
1337	144,2	35,46	108,7	1184	46,79	31,42	15,37
1395	190,3	37,03	153,3	667,4	17,26	17,71	− 0,45
				384,8	9,018	10,21	− 1,19
238,7	9,018	6,336	2,682	70,66	0,0	1,875	− 1,87
620,3	20,91	16,46	4,45	− 215,9	− 9,018	− 5,731	− 3,29
1067	39,99	28,30	11,69	− 817,4	− 27,84	− 21,69	− 6,15
1192	55,68	31,63	24,05	− 1293	− 95,81	− 34,33	− 61,48
1260	80,52	33,44	47,08	− 1317	− 110,2	− 34,94	− 73,3
1285	95,41	34,11	61,30	− 1364	− 143,0	− 36,20	− 106,8
1305	103,5	34,63	68,9	− 1403	− 190,1	− 37,22	− 152,9
1328	118,4	35,26	83,1				
1368	163,0	36,30	126,7				
1395	189,5	37,03	152,5				

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
−1403	−188,2	−37,22	−151,0	318,8	8,888	8,461	0,427
−1372	−151,5	−36,40	−115,1	614,1	17,12	16,29	0,83
−1326	−112,4	−35,20	− 77,2	1063	35,30	28,21	7,09
−1515	− 97,12	−34,90	− 62,22	1198	53,26	31,78	21,48
−1270	− 72,02	−33,69	− 38,33	1255	74,97	33,32	41,65
−1214	− 53,46	−32,22	− 21,24	1294	95,74	34,35	61,39
− 878,6	− 23,14	−23,33	+ 0,19	1307	110,1	34,68	75,41
− 400,5	− 8,758	−10,63	1,87	1352	150,0	35,88	114,1
− 82,45	0,0	− 2,189	2,189	1395	184,5	37,01	147,5
+ 218,3	+ 9,018	+ 5,793	3,225				
608,5	20,91	16,15	4,76				
988,8	35,94	26,24	9,70				
1261	79,47	33,47	46,00				
1309	104,0	34,73	69,3				
1337	125,1	35,46	89,6				
1379	156,9	36,61	120,3				
1398	188,7	37,11	151,6				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 3 dargestellt.



Weiches Eisen.

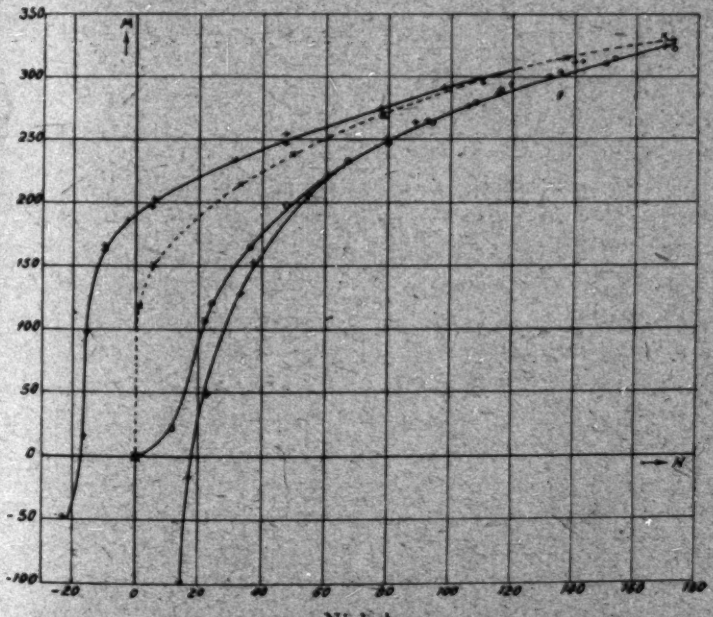
⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 3.

4. Nickel.

$A = 16{,}05$ cm; $B = 0{,}6606$ cm; $N = 0{,}06142$; $V = 29{,}38$ cm³.

Nullpunktskurve.				Absteigender Hysteresisast.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
34,04	15,81	2,090	13,72	324,2	189,5	19,91	169,6
164,8	46,39	10,13	36,25	310,6	159,0	19,07	139,9
209,0	67,97	12,84	55,13	294,1	128,5	18,06	110,4
247,1	95,15	15,18	79,97	276,4	95,54	16,97	78,57
278,7	125,3	17,12	108,2	246,7	62,61	15,16	47,45
298,5	150,0	18,33	131,7	233,9	46,52	14,36	32,16
322,3	192,2	19,80	172,4	196,8	17,39	12,09	5,30
				162,5	0,0	9,979	− 9,98
22,47	13,20	1,380	11,82	− 48,93	− 26,01	− 3,004	− 23,01
120,3	31,63	7,389	24,24	− 152,2	− 46,79	− 9,344	− 37,45
197,4	59,47	12,13	47,34	− 219,5	− 74,11	− 13,48	− 60,63
232,9	81,56	14,31	67,25	− 263,3	− 104,4	− 16,17	− 88,2
264,4	108,5	16,25	92,3	− 294,1	− 137,6	− 18,06	− 119,5
286,4	133,0	17,59	115,4	− 326,2	− 192,2	− 20,04	− 172,7
314,4	172,6	19,31	153,3				
323,9	189,5	19,90	169,6				



Nickel.

⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 4.

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
−326,9	−190,3	−20,07	−170,2	65,70	4,378	4,035	0,343
−312,5	−161,9	−19,20	−142,7	117,1	9,018	7,194	1,824
−306,8	−141,1	−18,85	−122,3	149,4	15,03	9,177	5,85
−293,1	−115,5	−18,00	− 97,5	213,9	46,39	13,14	33,25
−275,0	− 94,10	−16,89	− 77,21	237,1	64,04	14,56	49,48
−254,4	− 62,73	−15,63	− 47,10	269,7	94,75	16,57	78,18
−238,0	− 46,01	−14,62	− 31,39	298,5	129,0	18,33	110,7
−202,3	− 18,30	−12,43	− 5,87	313,9	155,8	19,28	136,5
−185,8	− 9,018	−11,41	+ 2,39	331,8	189,1	20,38	168,7
−166,6	0,0	−10,23	10,23				
− 97,86	9,149	− 6,011	15,16				
− 15,85	17,77	− 0,973	16,80				
+128,1	41,04	+ 7,87	33,17				
205,1	67,05	12,60	54,45				
248,9	94,88	15,29	79,59				
276,4	122,8	16,97	105,8				
303,6	153,8	18,65	135,2				
329,1	192,2	20,20	172,0				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 4 dargestellt.

§ 3. *Die reversible Permeabilität.* Um die reversible Permeabilität zu messen, benutzten wir eine Versuchsanordnung ähnlich der, welche wir in den eingangs zitierten Arbeiten verwandt hatten, so daß einige wenige Worte über dieselbe genügen werden.

Um die kleinen Variationen ΔH der Feldstärke zu erzeugen, war die Magnetisierungsspule von einer anderen Spule umgeben, welche mit einem Akkumulator, einem Widerstande und einem Kommutator zu einem Stromkreise vereinigt war.

Diese zweite Spule hatte die folgenden Abmessungen. Ihr innerer und äußerer Durchmesser waren 3,52 cm bzw. 3,80 cm. Die Windungszahl pro Zentimeter betrug $n' = 34{,}35$, so daß $4\pi n' = 431{,}6$ war.

Wendet man mittels des Kommutators die Richtung des schwachen Stromes, der durch diese Spule floß, so ändert sich ein wenig das starke von der Magnetisierungsspule erzeugte Feld.

Die Änderung ΔB der Induktion im Ellipsoid, die durch die Feldänderung ΔH hervorgerufen wurde, wurde ballistisch beobachtet mittels einer Spule, welche direkt auf das Ellipsoid gewickelt und mit einem ballistischen Galvanometer verbunden

war. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes wurde durch eine geeichte wechselseitige Induktion bestimmt.

Es möge noch ein kleiner Hilfsapparat beschrieben werden, der die Bequemlichkeit und Exaktheit der Messungen sehr vergrößerte.

Wegen der großen Galvanometerempfindlichkeit, die notwendig war, um die kleine durch ΔH hervorgerufene Änderung des magnetischen Induktionsflusses zu beobachten, ließ jede kleinste Schwankung des starken Stromes in der Magnetisierungsspule, die durch veränderliche Kontakte in den Schiebewiderständen entstand, das ballistische Galvanometer ausschlagen.

Ich vermied früher diese Störungen durch häufige und recht lästige Reinigung der Kontakte, zog es aber jetzt vor, die Unannehmlichkeit durch Anwendung des folgenden „Beruhigungsapparates" zu umgehen.

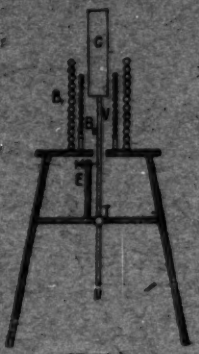


Fig. 5.

Im Innern einer Primärspule B_1 (Fig. 5) von 4 Lagen und 1096 Windungen befand sich koaxial eine Sekundärspule B_2 von 1200 Windungen. Beide waren auf einem Holzstativ montiert.

In ihrem Innern befand sich ein Zylinder C aus weichem Eisen, der mittels des Messingstabes $V\,V$ in Richtung seiner Achse verschiebbar und mittels der Druckschraube T in jeder Stellung fixierbar war. Diese Stellung konnte jederzeit reproduziert werden, da sie mit Hilfe des Zeigers M auf der Skale E ablesbar war.

Durch die Primärspule B_1, welche mit der Magnetisierungsspule in Serie geschaltet war, floß also der Magnetisierungsstrom, der, wie wir sagten, niemals bis zum Äußersten konstant blieb. Nun befand sich aber die Spule B_2 im ballistischen Stromkreise, und zwar der Spule, die unmittelbar auf das Ellipsoid gewickelt war, entgegengeschaltet, so daß jede Stromschwankung in diesen beiden Spulen Induktionen von entgegengesetztem Vorzeichen hervorrief. Es war leicht, mittels einiger Versuche die Stellung des Eisenzylinders zu finden, bei der sich die Schwankungen genau kompensierten.

Eine ideale Anordnung, die ich aber leider nicht ausführen konnte, da ich von jeder Materialsorte nur ein Ellipsoid hatte,

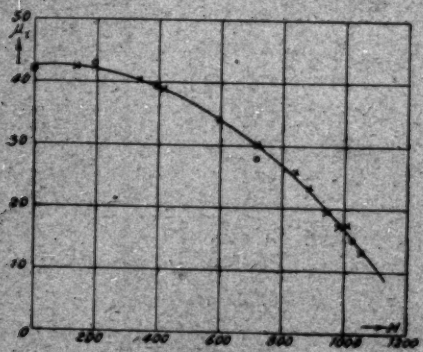
wäre die folgende gewesen. Der Beruhigungsapparat müßte als Primärspule B_1 eine Spule enthalten, die genau gleich der Magnetisierungsspule wäre; in ihr müßte sich ein dem zu studierenden Ellipsoid gleiches befinden, und beide Ellipsoide müßten von gleichen ballistischen Spulen umgeben sein. Letztere hätte man so in Serie zu schalten, daß eine Schwankung des Magnetisierungsstromes keinen Galvanometerausschlag hervorriefe. Über die Magnetisierungsspule sowie über B_1 wäre je eine Spule zu wickeln, deren Strom das Zusatzfeld ΔH erzeugt, diese aber müßten so in Serie geschaltet werden, daß ihre Induktionswirkungen sich im ballistischen Kreise summierten.

Die Beobachtungen ergaben die folgenden Resultate.

1. Gehärteter Remystahl.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	42,34	0,0	41,81
134,6	41,64	192,1	43,16
412,4	38,84	397,3	39,41
938,7	19,46	593,4	34,02
980,0	17,08	712,9	27,98
1054	12,97	1026	15,08
0,0	42,29		
0,0	42,50		
719,7	30,41		
841,4	25,69		
0,0	41,59		
337,8	40,25		
885,3	23,34		
1006	17,21		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 6 dargestellt.



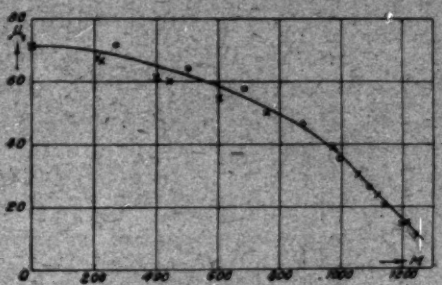
Gehärteter Remystahl. × Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 6.

2. Geglühter Remystahl.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	72,15	0,0	71,06
400,2	61,72	271,6	71,81
757,8	49,72	503,0	64,13
1054	29,89	687,3	57,94
1138	20,67	989,5	35,26
1200	14,72	873,2	46,40
1242	10,80	1091	26,32
0,0	70,66		
221,8	66,68		
0,0	70,61		
209,9	67,19		
441,7	60,03		
603,4	54,36		
0,0	70,66		
971,2	39,08		
1119	23,86		
1216	15,07		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 7 dargestellt.

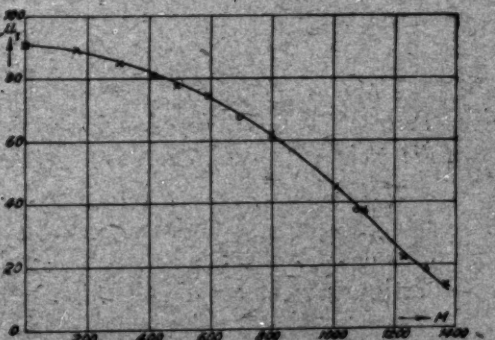


Geglühter Remystahl.
× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve
Fig. 7.

3. Weiches Eisen.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	92,83	0,0	92,02
307,8	85,04	417,0	81,25
592,8	74,61	693,4	67,28
1099	37,43	1073	37,83
1228	22,63	1302	17,96
1367	13,76		
0,0	89,62		
164,9	89,74		
490,8	77,49		
798,7	62,13		
1010	45,21		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 8 dargestellt.

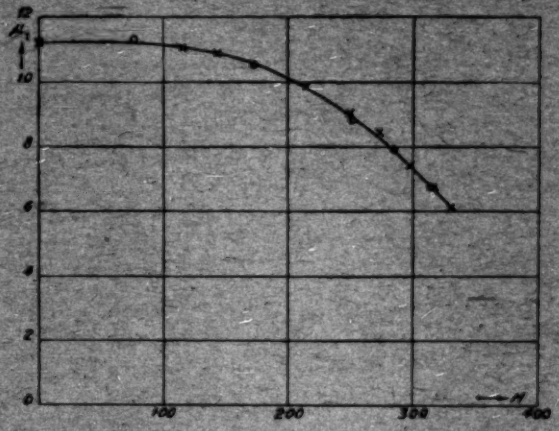


× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve
Fig. 8. Weiches Eisen.

4. Nickel.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	11,20	0,0	11,18
115,1	11,05	76,78	11,32
143,9	10,89	172,2	10,53
216,1	9,845	251,6	8,812
248,9	9,014	284,6	7,900
272,8	8,418	314,4	6,741
297,9	7,432		
317,3	6,778		
329,5	6,169		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 9 dargestellt.



Nickel.

× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 9.

Aus den Messungen geht klar hervor, daß *die reversible Permeabilität auf der idealen und der Nullpunktskurve genau die gleiche Funktion der Magnetisierung ist.*

Nur der geglühte Remystahl fügt sich nicht diesem Gesetze, doch haben wir schon früher[1]) den Verdacht geäußert, daß das Material, aus welchem das betreffende Ellipsoid gefertigt war, nicht homogen ist.

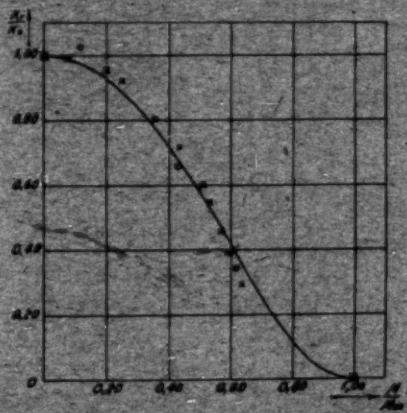
1) R. Gans, Ann. d. Phys. **33**. S. 1092. 1910.

§ 4. *Magnetisch korrespondierende Zustände.* Zum Schluß wollen wir noch das durch Gleichung (1) ausgedrückte quantitative Gesetz für die Abhängigkeit der reversiblen Permeabilität von der Magnetisierung prüfen.

Es ergaben sich die folgenden Tabellen und Kurven.

1. Gehärteter Remystahl (vgl. Fig. 10).

Ideale Kurve.				Nullpunktskurve.			
M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1667}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{41{,}00}$	M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1667}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{41{,}00}$
0,0	41,18	0,0	1,004	0,0	40,81	0,0	0,9954
134,6	40,64	0,0807	0,9910	192,1	42,16	0,1153	1,028
337,8	39,25	0,2026	0,9572	397,3	38,41	0,2383	0,9369
412,4	37,84	0,2474	0,9230	593,4	33,02	0,3560	0,8054
719,7	29,41	0,4317	0,7171	712,9	26,98	0,4277	0,6582
841,5	24,69	0,5048	0,6022	1026	14,08	0,6155	0,3434
885,3	22,34	0,5310	0,5449				
938,7	18,46	0,5631	0,4502				
980,0	16,08	0,5879	0,3921				
1006	16,21	0,6034	0,3954				
1054	11,97	0,6324	0,2919				



Gehärteter Remystahl $M_\infty = 1667$; $4\pi\varkappa_0 = 41{,}00$
× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 10.

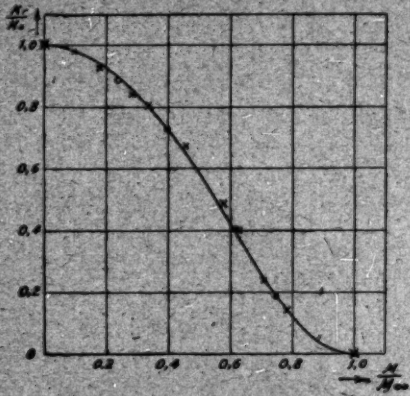
Die in den Figuren gezeichnete Kurve ist die theoretische, die Kreuze und Kreise entsprechen den Beobachtungen auf der idealen bzw. jungfräulichen Kurve. Der Punkt

$$\frac{M}{M_\infty} = 1\,; \quad \frac{\varkappa_r}{\varkappa_0} = 0$$

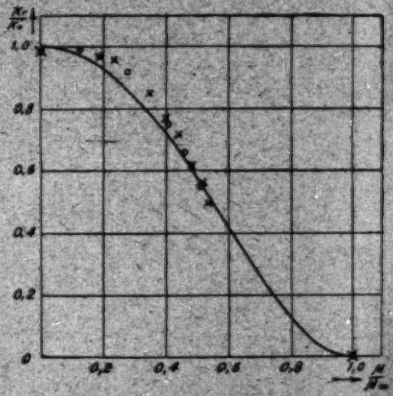
ist mit in die Figur eingezeichnet, er entspricht der bekannten Tatsache, daß die Suszeptibilität im Sättigungszustande Null ist.

2. Weiches Eisen (vgl. Fig. 11).

Ideale Kurve.				Nullpunktskurve.			
M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1750}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{91{,}00}$	M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1750}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{91{,}00}$
0,0	90,22	0,0	0,9914	0,0	91,02	0,0	1,000
164,9	88,74	0,0942	0,9752	417,7	80,25	0,2386	0,8820
307,8	84,04	0,1759	0,9237	693,4	66,28	0,3962	0,7285
490,8	76,49	0,2804	0,8406	1073	36,83	0,6132	0,4048
592,8	73,61	0,3387	0,8091	1302	16,95	0,7439	0,1863
798,7	61,13	0,4564	0,6717				
1010	44,21	0,5772	0,4859				
1099	36,43	0,6281	0,4004				
1228	21,63	0,7018	0,2378				
1367	12,76	0,7811	0,1403				



$M_\infty = 1750$; $4\pi\varkappa_0 = 91{,}00$
× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve
Fig. 11. Weiches Eisen.



$M_\infty = 620$; $4\pi\varkappa_0 = 10{,}40$
× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve
Fig. 12. Nickel.

3. Nickel (vgl. Fig. 12).

Ideale Kurve.				Nullpunktskurve.			
M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{620}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{10{,}40}$	M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{620}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{10{,}40}$
0,0	10,20	0,0	0,9804	0,0	10,18	0,0	0,9790
115,1	10,05	0,1857	0,9663	76,78	10,32	0,1239	0,9922
143,9	9,89	0,2321	0,9510	172,2	9,53	0,2777	0,9164
215,1	8,845	0,3485	0,8506	251,6	7,812	0,4058	0,7513
248,9	8,014	0,4015	0,7705	284,6	6,900	0,4590	0,6634
272,8	7,418	0,4400	0,7134	314,4	5,741	0,5071	0,5521
297,9	6,432	0,4805	0,6184				
317,3	5,778	0,5118	0,5556				
329,5	5,169	0,5315	0,4971				

Während das weiche Eisen in hervorragender Weise der Theorie entspricht, zeigen die härteren Materialien, wie Stahl und Nickel, kleine Abweichungen, jedoch sind diese so unbedeutend, daß man praktisch die ganze reversible Permeabilitätskurve aus der Anfangspermeabilität und der Sättigungsmagnetisierung berechnen kann.

La Plata, 1. November 1917, Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

5. *Die Trägheitsmomente der Magnetonen;* [1] *von R. Gans.*

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich eine Formel für die spezifische Suszeptibilität diamagnetischer Körper [(a. a. O., Formel (60)] in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke und Temperatur abgeleitet.

Diese Beziehung vereinfacht sich noch auf Grund der im hiesigen Institut angestellten experimentellen Untersuchungen des Hrn. H. Isnardi[3]), welche zeigten, daß die Suszeptibilität tatsächlich nicht vom Felde abhängig ist, woraus man nach meiner Theorie den Schluß ziehen kann, daß die drei Hauptträgheitsmomente der Magnetonen einander gleich sind. So nimmt die Formel für die spezifische Suszeptibilität χ die Form an

$$\chi = -N\frac{e^2}{4m^2}J, \tag{1}$$

wo N die Anzahl Magnetonen im Gramm, $e/m = 1{,}77 \cdot 10^7$ die in elektromagnetischem Maß gemessene spezifische Ladung des Elektrons, J das Trägheitsmoment des Magnetons bezüglich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Achse bedeutet.

Nimmt man an, daß jedes Atom nur *ein* Magneton enthält, so ist das Produkt aus N und dem Atomgewicht A die Anzahl Atome im Grammatom, d. h. die bekannte Avogadrosche Zahl

$$N_0 = NA = 6{,}175 \cdot 10^{23}. \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit A, so erhält man

$$A\chi = -N_0\frac{e^2}{4m^2}J \tag{3}$$

oder

$$J = -2{,}067 \cdot 10^{-38} A\chi. \tag{4}$$

1) Vgl. R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nacional de La Plata 1. S. 383. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. 49. S. 149. 1916.

3) H. Isnardi, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nacional de La Plata.

Es läßt sich also das Trägheitsmoment aus der Atomsuszeptibilität $A\chi$ berechnen.

In der folgenden Tabelle haben wir auf Grund der von Owen[1]) bestimmten Magnetisierungskonstanten die Werte von J in absolutem Maß ausgewertet.

Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{40}$ in g cm²	Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{40}$ in g cm²
Be	9,1	1,00	1,88	Zr	90,6	0,45	8,43
B	11,0	0,7	1,59	Ag	107,9	0,20	4,46
C (Diamant)	12,0	0,49	1,22	Cd	112,4	0,18	4,18
Si	28,3	0,13	0,761	Jn	114,8	0,11	2,61
P	31,0	0,90	5,77	Sn (Grauzinn)	119,0	ca. 0.35	ca. 8,61
S	32,07	0,49	3,25	Sb	120,2	0,82	20,4
Cu	63,57	0,085	1,12	Te	127,5	0,32	8,43
Zn	65,37	0,155	2,09	J	126,9	0,36	9,45
Ga	69,9	0,24	3,46	Cs	132,8	0,10	2,75
Ge	72,5	0,12	1,80	Au	197,2	0,15	6,12
As	75,0	0,31	4,81	Hg	200,0	0,19	7,86
Se	79,2	0,32	5,24	Tl	204,0	0,24	10,1
Br	79,92	0,40	6,61	Pb	207,1	0,12	5,14
Sr	87,62	0,2?	3,62?	Bi	208,0	1,40	60,2

Es ist bemerkenswert, daß fast alle Trägheitsmomente von derselben Größenordnung sind.

Die Trägheitsmomente paramagnetischer Magnetonen[2]) sind wesentlich größer; es ergab sich nämlich für Platin $67{,}7 \cdot 10^{-40}$ und für wasserfreies Mangansulfat $12{,}4 \cdot 10^{-40}$.

Ebenso sind die Trägheitsmomente des HCl- und des H_2O-Moleküls viel größer, für die Bjerrum[3]) $5{,}4 \cdot 10^{-40}$ bzw. 0,96 und $2{,}21 \cdot 10^{-40}$ fand.

La Plata, 1. März 1917. Instituto de Fisica.

---

1) M. Owen, Ann. d. Phys. **37**. S. 664. 1912.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **50**. S. 163. 1916.

3) N. Bjerrum, Nernst-Festschrift S. 90, 1912; Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **16**. S. 640. 1914; vgl. auch Verh. d. Solvay Congresses, deutsche Ausgabe von Eucken S. 405, 1911.

(Eingegangen 23. August 1919)

6. *Bemerkung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“; von R. Gans.*

Kürzlich veröffentlichte ich[1]) eine theoretische Untersuchung über die Fortpflanzung des Lichts in einem inhomogenen Medium, welche im wesentlichen die Ergebnisse hatte, daß das Licht sich ohne Reflexion fortpflanzt, daß es aber Totalreflexion gibt.

Ferner zeigte ich, daß überall die Regeln der geometrischen Optik über die Richtung des Strahles gelten außer in der Nähe der Ebene, in der die Totalreflexion eintritt. Hier ist der Einfallswinkel kleiner, als es dem Snelliusschen Brechungsgesetze entspricht, und hier kann auch nicht von einem Umbiegen des Strahls gesprochen werden, sondern er kehrt mit einem Knick von endlichem Winkel um.

Nun hat Lord Rayleigh[2]) schon früher einen Aufsatz über den Durchgang von Schallwellen durch ein geschichtetes Medium publiziert, der mir leider infolge der schlechten argentinischen Bibliotheksverhältnisse entgangen war, und von dem ich erst im November 1915 durch einen Separatabdruck Kenntnis erhielt, den der Verfasser mir zusandte.[3])

Sonst hätte ich natürlich nicht verfehlt, die Arbeit Lord Rayleighs zu zitieren, ja ich hätte sogar, trotzdem es sich bei ihm um ein akustisches, bei mir um ein elektromagnetisches Problem handelte, manches seiner Resultate direkt verwenden können.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**. S. 709. 1915.

2) Lord Rayleigh, Proc. of the Royal Soc. (A) **86**. S. 207. 1912.

3) In diesem Zusammenhang sei auch eine Arbeit von J. Boussinesq, C. R. **129**. 1899 erwähnt, welche auch Lord Rayleigh entgangen zu sein scheint. Der Verf. steht auf dem Boden der elastischen Lichttheorie und geht auf das interessante Problem der Totalreflektion gar nicht ein.

In der Diskussion der Einzelheiten ging ich über Lord Rayleigh in einigen Punkten hinaus und griff die Aufgabe insofern allgemein an, als er *aus mathematischen Gründen* die Dichte als lineare Funktion der Koordinate betrachtete, während ich durch einen Kunstgriff, der dem des Helmholtzschen Orgelpfeifenproblems ähnlich ist, zu einer solchen beschränkenden Annahme nicht gezwungen war.

Schließlich glaubt Lord Rayleigh, die Totalreflexion in inhomogenen Medien sei natürlicher als eine Art Brechung (Umbiegen des Strahls) aufzufassen (a. a. O., S. 224). Mit dieser Meinung kann ich mich wegen des von mir gefundenen Knicks, den der Strahl erleidet, nicht einverstanden erklären. Es tritt eine wirkliche Unstetigkeit infolge von Reflexion auf.

La Plata, 30. Nov. 1915. Instituto de Fisica.

(Eingegangen 23. August 1919.)

7. *Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie;* *von R. Gans.*

Planck[1]) hat in seiner Arbeit über die physikalische Struktur des Phasenraumes gezeigt, in welcher Weise der Phasenraum in Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit zerlegt werden kann. Mittels dieser Resultate und der Ergebnisse einer früheren Untersuchung[2]) kann man die für die Thermodynamik wichtigen Funktionen für den Fall von Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden berechnen.

Die Durchführung dieses Problems und der Vergleich der Endformeln mit der Erfahrung ist deshalb von Interesse, weil die schwingungsfähigen Teilchen in den praktisch untersuchten Körpern sicherlich häufig nicht lineare Vibratoren waren, sondern mehr Freiheitsgrade hatten.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Zustandssumme

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-\frac{U_n}{kT}} \tag{1}$$

einführt, in der T die absolute Temperatur, U_n die mittlere Energie eines Teilchens im $n$ten Elementargebiet, p_n das Verhältnis der Größe des $n$ten zum nullten Elementargebiet bedeutet.

Aus der Funktion Z berechnen sich alle thermodynamisch wichtigen Funktionen, wie die freie Energie F und die Energie U nach den folgenden Gleichungen[2]) (N Anzahl der Oszillatoren)

$$F = -NkT \ln Z, \tag{2}$$

$$U = -Nk \frac{d \ln Z}{d \frac{1}{T}}. \tag{3}$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. (4) 50. S. 385. 1916 (im folgenden zitiert als „Planck I").

2) M. Planck, Verh. d. Deutschen phys. Ges. 17. S. 407. 1915 (im folgenden zitiert als „Planck II").

I. Lineare Oszillatoren.

Um die für Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden gültigen Resultate mit den bekannten Formeln für lineare Oszillatoren vergleichen zu können, stellen wir letztere noch einmal kurz zusammen.

Nach Planck[1]) gilt für geradlinige Oszillatoren der Schwingungszahl ν

$$p_n = 1; \quad \overline{U_n} = h\nu\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \tag{4}$$

so daß, wenn wir die Abkürzung

$$\frac{h\nu}{kT} = x \tag{5}$$

einführen, die Substitution von (4) in (1) Z ergibt. Wir wollen diesem Wert aber und ebenso der freien Energie, sobald sie sich auf lineare Oszillatoren bezieht, den Index Null geben. So erhalten wir

$$Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)x} = \frac{1}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}}, \tag{6}$$

also nach (2)

$$\frac{F_0}{N h\nu} = -\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{\ln 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}}{x}. \tag{7}$$

Die Funktionen sind in Tab. 1 niedergelegt worden.

Tabelle 1.

$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$	Z_0	$-\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{F_0}{N h\nu}$
0,00	∞	∞	$-\infty$
0,10	5,000	4,992	− 8,041
0,12	4,167	4,158	− 5,937
0,14	3,571	3,560	− 4,535
0,16	3,125	3,112	− 3,547
0,18	2,778	2,764	− 2,823
0,20	2,500	2,484	− 2,274
0,30	1,667	1,643	− 0,8266
0,4	1,250	1,217	− 0,2458
0,5	1,000	0,9596	+ 0,0412
0,6	0,8333	0,7854	0,2013
0,7	0,7143	0,6590	0,2977

1) M. Planck II.

Tabelle 1. (Fortsetzung.)

$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$	Z_0	$-\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{F_0}{Nh\nu}$
0,8	0,6250	0,5630	0,3591
0,9	0,5556	0,4871	0,3997
1,0	0,5000	0,4255	0,4273
1,2	0,4167	0,3313	0,4603
1,4	0,3571	0,2626	0,4774
1,6	0,3125	0,2105	0,4870
1,8	0,2778	0,1699	0,4923
2,0	0,2500	0,1379	0,4949
2,5	0,2000	0,0826	0,4986
3,0	0,1667	0,0499	0,4996
3,5	0,1429	0,0302	0,4998
4,0	0,1250	0,0183	0,4998
5,0	0,1000	0,0067	0,4999
∞	0,0000	0,0000	0,5000

II. Oszillatoren von zwei Freiheitsgraden.

Ein Massenpunkt bewege sich in einer bestimmten Ebene unter dem Einfluß einer quasielastischen Kraft mit der Schwingungszahl ν. Bedeuten u und v die Integrale der Energie und des Flächensatzes, so gilt nach Planck I, S. 396, Formel (21), (22), (24) und (25), wenn $dG = dg\,dg'$ das Element des Phasenraumes ist,

$$g = \frac{u}{2\nu} - \pi v, \tag{8}$$

$$g' = 2\pi v, \tag{9}$$

so daß

$$= \overline{U_{n,n'}} \frac{\iint u\,dg\,dg'}{\iint dg\,dg'} = \nu \frac{\iint (2g + g')\,dg\,dg'}{\iint dg\,dg'} \tag{10}$$

wird. Hier läuft g von nh bis $(n+1)h$ und g' von $n'h$ bis $(n'+1)h$.

Daraus folgt

$$\overline{U_{n,n'}} = \nu h\left[2n + 1 + n' + \tfrac{1}{2}\right], \tag{11}$$

so daß aus Gleichung (1) folgt

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-x\left(2n+1+n'+\frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x} \cdot \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\left(n'+\frac{1}{2}\right)x} \tag{12}$$

oder nach (2) und (5)

$$\frac{F}{Nh\nu} = -\frac{\ln Z}{x} = 2\,\frac{\ln 2\,\mathfrak{Sin}\,2\frac{x}{2}}{2x} + \frac{\ln 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{2}}{x},$$

d. h. nach (7)

$$F(T, \nu) = F_0(T, 2\nu) + F_0(T, \nu). \tag{12'}$$

In Worten: *Ein Oszillator von zwei Freiheitsgraden der Schwingungszahl ν ist energetisch vollkommen äquivalent zwei linearen Oszillatoren, von denen der eine die Schwingungszahl ν, der andere die Schwingungszahl 2ν hat.*

Das ist aber ein Ausdruck der Nernst-Lindemannschen Formel[1]), die zwar praktisch erprobt, bisher aber nicht theoretisch begründet war, jedoch ist zu beachten, daß die Übereinstimmung der Nernst-Lindemannschen Formel und unserer nur gilt, solange man die Schwingungszahl frei wählen kann, diese also nicht etwa durch optische Messungen oder nach Lindemann durch den Schmelzpunkt festliegt; denn Nernst und Lindemann haben den Anschluß an die Erfahrung durch die Annahme gleich vieler linearer Resonatoren der Schwingungszahlen ν und $\nu/2$ erzielt, d. h. ihr ν entspricht unserem 2ν.

III. Oszillatoren von drei Freiheitsgraden.

Ein Massenpunkt bewege sich im Raum unter dem Einfluß eines quasielastischen Kraftzentrums. Auch für diesen Fall hat Planck[2]) die Struktur des Phasenraums bestimmt.

Bezeichnen u und v wieder die Integrale der Energie und des Flächensatzes, so gilt wie bei zweidimensionalen Oszillatoren

$$\begin{cases} g = \dfrac{u}{2\nu} - \pi v, \\ g' = 2\pi v, \end{cases} \tag{13}$$

und da das Volumenelement des Phasenraumes

$$dG = dg \cdot dg'^2 \tag{14}$$

1) W. Nernst u. F. A. Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochemie 17. S. 817. 1911.

2) M. Planck, I, S. 406.

ist, so berechnet sich

$$\overline{u_{n,n'}} = \frac{\iint u\, dg\, dg'^2}{\iint dg\, dg'^2} = \nu \frac{\iint (2g + g')\, dg\, dg'^2}{\iint dg\, dg'^2} \tag{15}$$

Über g ist von nh bis $(n+1)h$, über g' von $n'h$ bis $(n'+1)h$ zu integrieren, so daß

$$\overline{u_{n,n'}} = \nu h \left[2n + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1} \right]. \tag{16}$$

Da ferner

$$p_{n,n'} = 2n' + 1 \tag{17}$$

ist, so ergibt (1) die Zustandssumme

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' + 1)\, e^{-x\left[2n + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1}\right]}, \tag{18}$$

die ohne weiteres in das Produkt

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \tag{19}$$

zerfällt, wo

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x(2n+1)} = \frac{1}{2 \operatorname{Sin} x}, \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{aligned} Z_2 &= \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' + 1)\, e^{-x \frac{2}{3} \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1}} \\ &= 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2})\, e^{-x\left[n' + \frac{1}{2} + \frac{1}{12(n' + \frac{1}{2})}\right]} \end{aligned} \right. \tag{21}$$

ist.

Die Bedeutung von Z_1 ergibt sich sofort durch Vergleichung mit (6); es ist die Zustandssumme eines linearen Oszillators der Schwingungszahl 2ν.

Die Berechnung von Z_2 nach (21) ist sehr einfach für große Werte von x; für kleinere x ist es besser, die Gleichung (21) umzuformen.

Setzen wir

$$\frac{1}{12(n' + \frac{1}{2})} = \alpha, \tag{22}$$

so wird

$$Z_2 = 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2})\, e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \alpha)} = 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2})\, e^{-x(n' + \frac{1}{2})}$$
$$- 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2}) \left[e^{-x(n' + \frac{1}{2})} - e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \alpha)} \right].$$

Nun ist

$$e^{-\delta} - e^{-\varepsilon} = 2e^{-\frac{\delta+\varepsilon}{2}} \operatorname{Sin}\frac{\varepsilon-\delta}{2}, \tag{23}$$

also

$$Z_2 = 2\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} - 4\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)x} \operatorname{Sin}\frac{\alpha x}{2}.$$

Ist x so klein, daß

$$\operatorname{Sin}\frac{\alpha x}{2} = \frac{\alpha x}{2}$$

gesetzt werden kann, so wird mit Berücksichtigung von (22)

$$Z_2 = 2\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{6}\sum_0^\infty e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

und mit erneuter Anwendung der Formel (23)

$$\left\{\begin{aligned} Z_2 = {} & 2\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{6}\sum_0^\infty e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} \\ & + \frac{x^2}{3}\sum_0^\infty \frac{\alpha}{4} e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Die Auswertung der ersten beiden Summanden gelingt leicht, so daß wir für kleine Werte von x schließlich erhalten

$$Z_2 = \frac{\operatorname{Cof}\frac{x}{2}}{2\operatorname{Sin}^2\frac{x}{2}} - \frac{x}{12\operatorname{Sin}\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{3}\sum_0^\infty \frac{\alpha}{4} e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)}. \tag{25}$$

Die hier auftretende Größe $\alpha/4$ hat als Funktion von n' nach (22) folgende Werte.

Tabelle 2.

n'	$\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{48(n'+\frac{1}{2})}$	n'	$\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{48(n'+\frac{1}{2})}$
0	0,04167	6	0,00320
1	0,01389	7	0,00278
2	0,00833	8	0,00245
3	0,00595	9	0,00219
4	0,00463	10	0,00198
5	0,00379		

So läßt sich Z_2 für kleine x nach (25) und für große x nach (21) berechnen, und es ergibt sich folgende Tabelle.

Tabelle 3.

x	Z_1	$-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x} - \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$
0,0	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞
0,2	49,92	− 9,77	5,000	− 15,09	7,5
0,4	12,41	− 3,150	2,500	− 4,945	3,75
0,6	5,477	− 1,417	1,667	− 2,273	2,5
0,8	3,309	− 0,748	1,250	− 1,232	1,875
1,0	2,191	− 0,3921	1,000	− 0,6764	1,5
1,5	0,8206	+ 0,0660	0,6667	+ 0,0401	1,0
2,0	0,4362	0,2074	0,5000	0,2670	0,75
2,5	0,2603	0,2692	0,4000	0,3685	0,6
3,0	0,1662	0,2991	0,3333	0,4193	0,5
4,0	0,07565	0,3226	0,2500	0,4619	0,375
5,0	0,03692	0,3299	0,2000	0,4772	0,3
10	0,00127	0,3333	0,1000	0,4912	0,15
∞	0,00000	0,3333	0,0000	0,5000	0,0

Nach (2) und (19) ist

$$(26)\qquad \frac{F}{Nh\nu} = -\frac{\ln Z}{x} = -\frac{\ln Z_1}{x} - \frac{\ln Z_2}{x} = \frac{F_1}{Nh\nu} + \frac{2F_2}{Nh\nu}.$$

Da nun, wie wir bereits auf Grund der Gleichung (20) sahen,

$$(27)\qquad F_1 = -Nh\nu\frac{\ln Z_1}{x}$$

die freie Energie eines linearen Oszillators der Schwingungszahl 2ν darstellt, so können wir

$$-Nh\nu\frac{\ln Z_2}{x}$$

als die freie Energie der beiden anderen Freiheitsgrade deuten. Die Hälfte hiervon, d. h.

$$F_2 = -\frac{Nh\nu}{2}\frac{\ln Z_2}{x}$$

ist der auf jeden dieser beiden Freiheitsgrade fallende Teil.

Deshalb haben wir in der 3. und 4. Kolonne der obigen Tabelle

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_1}{x} = \frac{F_2}{Nh\nu}$$

als Funktion von

$$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$$

berechnet und haben nun zu sehen, ob auch dieser Teil der freien Energie mit der von linearen Oszillatoren identisch ist.

Vergleichen wir unsere Funktion

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x}$$

mit der in Tabelle 1 berechneten Funktion $-\frac{\ln Z_0}{x}$, so sehen wir auf den ersten Blick, daß die beiden Funktionen nicht identisch sind, da ja für $x = \infty$ (d. h. $T = 0$) erstere den Wert $\frac{1}{3}$, letztere den Wert $\frac{1}{2}$ hat.

Wohl aber ist

$$\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x} - \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$$

als Funktion von

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

fast völlig identisch mit $-\frac{\ln Z_0}{x}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$, wie das Diagramm beweist, in welchem diese Funktion als Kurve eingezeichnet, jene durch Kreise nach den in Tab. 3, Kolonne 5 und 6 ermittelten Werten markiert ist.

Die physikalische Bedeutung dieser mathematischen Transformation erkennen wir aus folgender Überlegung.

Bezeichnen wir für den Augenblick die Funktion

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x}$$

in ihrer Abhängigkeit von $\frac{1}{x}$ durch $V_2\left(\frac{1}{x}\right)$ und ebenso $-\frac{\ln Z_0}{x}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$ durch $V_0\left(\frac{1}{x}\right)$, so lehrt uns unser Diagramm, daß sehr genähert

$$\frac{3}{2}\left[V_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\right] = V_0\left(\frac{3}{2x}\right) \tag{28}$$

ist, d. h. es gilt

$$V_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{3}V_0\left(\frac{3}{2x}\right) + \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}. \tag{29}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $Nh\nu$, berücksichtigen, daß

$$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$$

ist, und führen die Bezeichnung

$$\frac{2}{3}v = v' \tag{30}$$

ein, so wird mit großer Näherung

$$F_2(T, v) = F_0(T, v') + NkT \ln \frac{3}{2\sqrt{2}}. \tag{31}$$

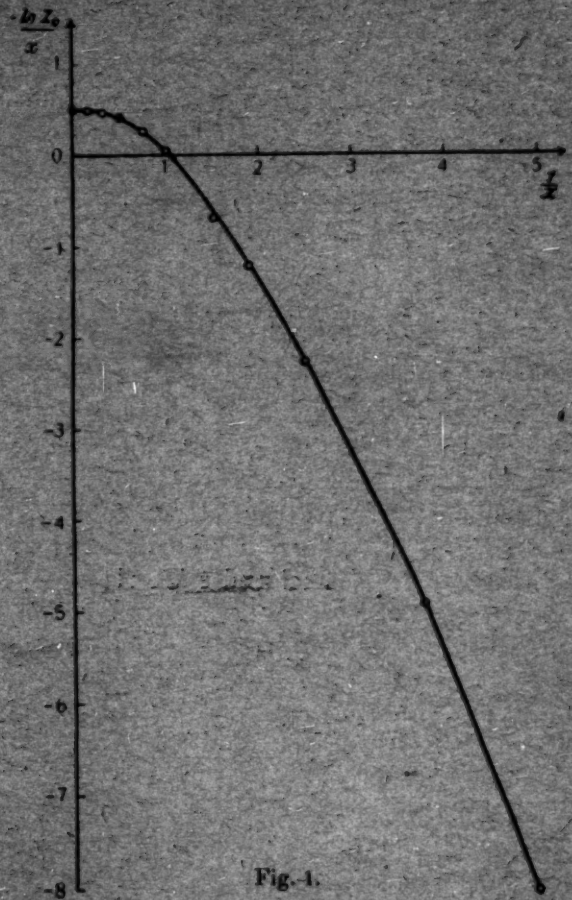


Fig. 1.

Nun ist eine freie Energie nach der klassischen Thermodynamik nur bis auf eine additive lineare Funktion der Temperatur bestimmt. Sehen wir deshalb also vom zweiten Summanden rechts in der Gleichung (31) ab, so sagt uns diese Beziehung, daß der Teil der freien Energie, den wir jetzt be-

trachten, identisch ist mit der eines linearen Oszillators der Schwingungszahl $\nu' = \frac{2}{3}\nu$.

Nach (26) und der Bemerkung, die wir an (27) anknüpften, ist also *ein Oszillator von drei Freiheitsgraden mit der Schwingungszahl ν energetisch zu ersetzen durch drei lineare Oszillatoren, von denen einer die Schwingungszahl 2ν, die anderen beiden jeder die Schwingungszahl $\frac{2}{3}\nu$ haben.*

Zum Schluß möge noch eine Bemerkung über die Berechtigung der Annäherung dieses Resultates gesagt werden. Erstens liegen in dem Diagramm die Kreise nicht ganz exakt auf der Kurve, zweitens wissen wir, daß in der modernen Thermodynamik, welche den dritten Hauptsatz, das Nernstsche Wärmetheorem, mit berücksichtigt, nicht nur $\lim_{T=0} F = 0$ werden muß, sondern auch

$$\lim_{T=0} \frac{dF}{dT} = 0.$$

Dieser letzteren Bedingung genügt die Näherungsformel (81) nicht.

Wohl aber ist Gleichung (81) und der aus ihr folgende Äquivalenzsatz *praktisch* völlig genügend und beschreibt die komplizierteren Vorgänge durch Zurückführung auf die bekannten Erscheinungen an linearen Oszillatoren in *einfacher* Weise.

La Plata, 15. Januar 1917. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

8. *Der gegenseitige Induktionskoeffizient von Rechtecken und Quadraten;*

von A. Esau.

Die große Bedeutung, die „geschlossene" Antennenformen (Braunsche Rahmenantennen) für Empfangszwecke der drahtlosen Telegraphie in ihrer neuesten Entwicklung erlangt haben, läßt den Wunsch berechtigt erscheinen, Formeln für die Berechnung der Selbst- und gegenseitigen Induktionskoeffizienten derartiger Gebilde zu besitzen.

Während die Rechnung für kreisförmigen Spulenquerschnitt bereits früher[1]) durchgeführt worden ist, fehlt es an Formeln für rechteckigen und quadratischen Querschnitt, der den praktischen Anordnungen fast ausschließlich zugrunde gelegt worden ist.

Die Ableitung der Formel für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier aus mehreren Windungen bestehenden derartigen Spulen setzt zunächst die Kenntnis jenes Koeffizienten von einfachen Rechtecken voraus, die verschieden groß sind, wofür ich in der Literatur eine Formel nicht habe finden können.

Die von Neumann[2]) und Martens[3]) angegebenen Ausdrücke sind für den vorliegenden Zweck nicht anwendbar, da sie entweder gleich große, symmetrisch in parallelen oder verschieden große in der gleichen Ebene gelegene Rechtecke voraussetzen.

Die beiden erwähnten Formeln werden übrigens in dem jetzt abzuleitenden Ausdruck, wie die Untersuchung ergeben wird, als spezielle Fälle enthalten sein.

---

1) B. Strasser, Ann. d. Phys. 17. S. 768. 1905; A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 14. S. 271. 1919.

2) Neumann, Allgem. Gesetze der reduzierten Ströme, Abh. d. Berl. Akad. 1845.

3) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 29. S. 959. 1909.

Ableitung der Formel.

Wir setzen voraus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen $a + 2c$ und $b + 2c$, die in zwei parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüber liegen (vgl. Fig. 1).

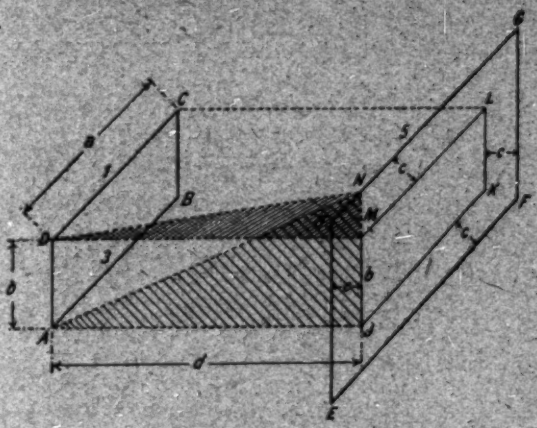


Fig. 1.

Ihr gegenseitiger Induktionskoeffizient M setzt sich zusammen aus zwei Teilen, von denen der eine, M_h, den horizontalen, der andere, M_v, den vertikalen Seiten seine Entstehung verdankt

$$M = M_h + M_v.$$

M_h ist, wenn man den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der Seiten 1 und 5 mit M_{15}, den von 3 und 5 mit M_{35} bezeichnet, gleich der doppelten Differenz $M_{15} - M_{35}$:

$$M_h = 2(M_{15} - M_{35}).$$

M_{15} bedeutet den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier parallelen Geraden von den Längen a und $a + 2c$ und dem Abstand h, der nach Martens sich darstellen läßt in der Form

$$M_{15} = 2\left\{ S_0 \ln \frac{S_0 + \sqrt{h^2 + S_0^2}}{h} - s_0 \ln \frac{s_0 + \sqrt{h^2 + s_0^2}}{h} + \sqrt{h^2 + s_0^2} - \sqrt{h^2 + S_0^2} \right\}.$$

Die Größen s_0, S_0 und h haben die folgenden Bedeutungen:

$$s_0 = c; \quad S_0 = a + c; \quad h = \sqrt{c^2 + d^2}$$

(folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck DNM, in dem $MN = c$, $DM = d$ und $DN = h$ ist).

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichung für M_{15} erhalten wir

$$M_{15} = 2\left\{\begin{array}{l} a \ln \dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ \quad + c \ln \dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}}{c+\sqrt{2c^2+d^2}} \\ \quad - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

Bei M_{35} haben wir für s_0, S_0 und h zu setzen:

$$s_0 = c; \quad S_0 = a + c; \quad h = \sqrt{(b+c)^2+d^2}$$

(folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck AJN mit den Seiten $AJ = d$, $AN = h$ und $NJ = b + c$).

$$M_{35} = 2\left\{\begin{array}{l} a \ln \dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2}}{\sqrt{(b+c)^2+d^2}} \\ \quad + c \ln \dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2}}{c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2}} \\ \quad - \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} + \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

Damit wird

$$M_h = 4\left\{\begin{array}{l} a \ln \dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ + c \ln \dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(c+\sqrt{2c^2+d^2})} \\ + \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \\ \quad - \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

M_v entsteht aus der vorhergehenden Formel, wenn man a und b miteinander vertauscht:

$$M_v = 4\left\{\begin{array}{l} b \ln \dfrac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ + c \ln \dfrac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(c+\sqrt{2c^2+d^2})} \\ + \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \\ \quad - \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

Nach Einsetzen der für M_h und M_v gefundenen Ausdrücke in die Gleichung

$$M = M_v + M_h$$

erhalten wir für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Rechtecke die allgemeine Formel:

$$M = 4\left\{\begin{aligned} &a \ln \frac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ &+ b \ln \frac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ &+ c \ln \frac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})} \\ &\qquad \frac{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(\sqrt{2c^2+d^2}+c)^2}{} \\ &+ 2\left[\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2}\right. \\ &\qquad \left. - \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c+d^2}\right] \end{aligned}\right\}$$

Nachdem wir die allgemeine Formel gefunden haben, wollen wir auf die in ihr enthaltenen speziellen Fälle näher eingehen.

1. $a \gtrless b;\ c = 0;\ d > 0.$

Setzt man $c = 0$, d. h. haben beide Rechtecke die gleichen Seitenabmessungen, so erhalten wir für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten den Ausdruck

$$M = 4\left\{\begin{aligned} &a \ln \frac{a+\sqrt{a^2+d^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2+d^2}} \cdot \frac{\sqrt{b^2+d^2}}{d} \\ &\qquad + b \ln \frac{b+\sqrt{b^2+d^2}}{b+\sqrt{a^2+b^2+d^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+d^2}}{d} \\ &+ 2\left[\sqrt{a^2+b^2+d^2} - \sqrt{a^2+d^2} - \sqrt{b^2+d^2} + d\right] \end{aligned}\right\}$$

Das ist die Neumannsche Formel.

2. $a \gtrless b;\ d = 0;\ c \gtrless 0.$

Wird $d = 0$, so rücken die beiden Rechtecke in eine Ebene. Der gegenseitige Induktionskoeffizient wird dann

$$M = 4\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2}}{a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}}\cdot\dfrac{b+c}{c} \\ \quad + b\ln\dfrac{b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2}}{b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}}\cdot\dfrac{a+c}{c} \\ + c\ln\dfrac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2})}{(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2})(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2})} \\ \quad\cdot\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2})(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2})}{c^2(1+\sqrt{2})^2} \\ + 2\left[\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}-\sqrt{(a+c)^2+c^2}\right. \\ \quad \left.-\sqrt{(b+c)^2+c^2}+c\left\{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right\}\right] \end{array}\right.$$

3. $a = b;\ c \gtrless 0;\ d > 0.$

Wir setzen jetzt $a = b$ und kommen damit zu den praktisch wichtigen Formeln für die gegenseitige Induktion zweier in parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüberliegenden Quadrate mit den Seitenlängen a und $a + c$.

Es wird hierfür

$$M = 8\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{a+c+\sqrt{2(a+c)^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}} \\ + c\ln\dfrac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(a+c+\sqrt{2(a+c)^2+d^2})(\sqrt{2c^2+d^2}+c)} \\ + \sqrt{2(a+c)^2+d^2}+\sqrt{2c^2+d^2}-2\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \end{array}\right.$$

4. $a = b;\ c = 0;\ d > 0.$

Für gleich große Quadrate im Abstand d läßt sich der gegenseitige Induktionskoeffizient schreiben in der Form

$$M = 8\left[a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+d^2}}{a+\sqrt{2a^2+d^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+d^2}}{d}+\sqrt{2a^2+d^2}-2\sqrt{a^2+d^2}+d\right]$$

Dieser Ausdruck läßt sich aus der vorhin angeführten Neumannschen Formel ableiten, wenn man dort $a = b$ setzt.

5. $a = b;\ c \gtrless 0;\ d = 0.$

Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier in einer Ebene gelegenen Quadrate, deren Abstand c ist, wird

$$M = 8\left\{\begin{array}{l} (a+c)\ln\dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2}}{c}+c\ln\dfrac{c+\sqrt{(a+c)^2+c^2}}{a+c} \\ -2\sqrt{(a+c)^2+c^2}+(a+c)\left[\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right] \end{array}\right.$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit dem von Martens gefundenen.

Umgestaltung der allgemeinen Formel.

Die soeben abgeleiteten Formeln gelten für beliebige Werte des Abstandes der Spulen und ihrer Abmessungen.

Führt man aber die Beschränkung ein, daß die Verhältnisse c/a und d/a kleine Werte annehmen, was immer dann der Fall sein wird, wenn der Abstand klein und die Abmessungen der Figuren nicht wesentlich voneinander verschieden sind, so kann man die für quadratischen Windungsquerschnitt geltende Formel (4) — und auf diese wollen wir uns im folgenden beschränken — noch erheblich vereinfacht werden.

Zu diesem Zweck entwickeln wir in ihr die Wurzel- und logarithmischen Ausdrücke nach Potenzen von c/a und d/a und erhalten für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten die Formel

$$M = 8\,a\left\{r + s\frac{c}{a} + t\frac{c^2}{a^2} + u + \frac{d^2}{a^2}\sqrt{2\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} - \ln\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} - \frac{c}{a}\ln\left(\sqrt{2\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} + \frac{c}{a}\right)\right\}$$

Hierin sind die Größen r, s, t und u zur Abkürzung für folgende Ausdrücke gesetzt worden

$$r = \sqrt{2} - 2 + \ln\frac{2}{1+\sqrt{2}} = -0{,}774,$$

$$s = \sqrt{2} - 1 + \ln\frac{2}{1+\sqrt{2}} = +0{,}226,$$

$$t = 0{,}75,$$

$$u = \frac{1-\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} = -0{,}043.$$

Spezialfälle.

1. $c = 0;\ d > 0$.

Die obige Formel geht für den Fall gleich großer, im Abstande d voneinander gelegenen Quadrate über in die folgende

$$M = 8\,a\left\{\ln\frac{a}{d} + r + \frac{d}{a} + u\frac{d^2}{a^2}\right\}$$

oder nach Einführung der Werte für r und u

$$M = 8\,a\left\{\ln\frac{a}{d} - 0{,}774 + \frac{d}{a} - 0{,}043\frac{d^2}{a^2}\right\}$$

Diese Formel ist von mir benutzt worden bei der Ableitung der Formel für den Selbstinduktionskoeffizienten von Spulen mit quadratischem Windungsquerschnitt.[1])

2. $c \gtrless 0$; $d = 0$.

Liegen die beiden Quadrate in einer Ebene, so wird

$$M = 8a\left\{\ln\frac{a}{c} + r + \frac{c}{a}\left(\ln\frac{a}{c} + s + \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) + t\frac{c^3}{a^3}\right\}$$

oder anders geschrieben

$$M = 8a\left\{\ln\frac{a}{c} - 0{,}774 + \frac{c}{a}\left(\ln\frac{a}{c} + 0{,}759\right) + 0{,}75\,\frac{c^3}{a^3}\right\}.$$

Gültigkeitsbereich der Reihenformel.

Da bei der Reihenentwicklung alle die Glieder nicht berücksichtigt wurden, deren Potenzen über die zweite hinausgehen, so ist ohne weiteres klar, daß die erhaltenen Formeln bei größeren Werten der Argumente c/a und d/a versagen müssen.

Ihr Gültigkeitsbereich bleibt beschränkt, wie durch Vergleich mit der exakten Formel nachgewiesen werden kann, auf Werte der Verhältnisse c/a und d/a, die unterhalb von 0,25 liegen. Die Abweichungen bei 0,3 betragen etwa $1\,^0/_0$.

Vereinfachung der Berechnung.

Um die Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüberliegenden Quadrate und den Seitenlängen a und $a + 2c$ einfacher zu gestalten (schreiben wir die allgemeine Gleichung 3) in der Form

$$M = aS,$$

wo

$$S = 8\left\{\ln\frac{1+\frac{c}{a}+A}{1+\frac{c}{a}+B}\cdot\frac{D}{C} + \frac{c}{a}\ln\frac{1+\frac{c}{a}+A}{1+\frac{c}{a}+B}\cdot\frac{\frac{c}{a}+A}{\frac{c}{a}+E} + B + E - 2A\right\}$$

gesetzt worden ist.

1) A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 14. S. 271. 1919.

Die Wurzelausdrücke A, B, C, D und E haben dann die folgenden Werte

$$A = \sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{d^2}{a^2}}, \qquad D = \sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)^2+\frac{d^2}{a^2}},$$

$$B = \sqrt{2\left(1+\frac{c}{a}\right)^2+\frac{d^2}{a^2}}, \qquad E = \sqrt{2\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{a^2}}$$

$$C = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{a^2}},$$

Die Größe S_0 ist für eine Reihe von Wertsystemen c/a und d/a nach der allgemeinen Formel (3) berechnet worden und kann der folgenden Tabelle entnommen werden.

$$S = f\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right).$$

$\frac{d}{a}$ =	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	4,0
$\frac{c}{a}$ = 0,0		13,02	8,264	3,224	1,016	0,202	0,028
0,1	14,74	12,12	8,832	3,688	1,312	0,264	0,036
0,2	10,70	9,904	8,232	4,232	1,576	0,360	0,056
0,5	6,40	6,256	5,872	4,264	2,136	0,600	0,112
1,0	3,968	3,936	3,856	3,384	2,328	0,952	0,208
2,0	2,320	2,296	2,256	2,176	1,888	1,184	0,416
4,0	1,232	1,248	1,256	1,232	1,200	1,200	0,568

Den Verlauf der Kurven $S = f\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right)$ zeigen die nachstehenden Figuren.

In Fig. 2 sind die Kurvenscharen eingetragen, die sich ergeben, wenn man bei konstant gehaltenen Werten $\frac{c}{a}$ S als Funktion von d/a auffaßt, während Fig. 3 den Verlauf $S = f\left(\frac{c}{d}\right)$ bei konstanten Werten d/a zeigt. Man ersieht aus ihnen, daß für jeden Wert c/a die Kurve $S = f\left(\frac{a}{d}\right)$ ein Maximum besitzt, das um so ausgeprägter ist, je kleiner d/a gewählt wird. Mit wachsendem c/a wird dieses Maximum flacher und flacher und rückt außerdem mehr und mehr nach Stellen größerer Werte des d/a hin. Für Fig. 3 gilt das Entsprechende.

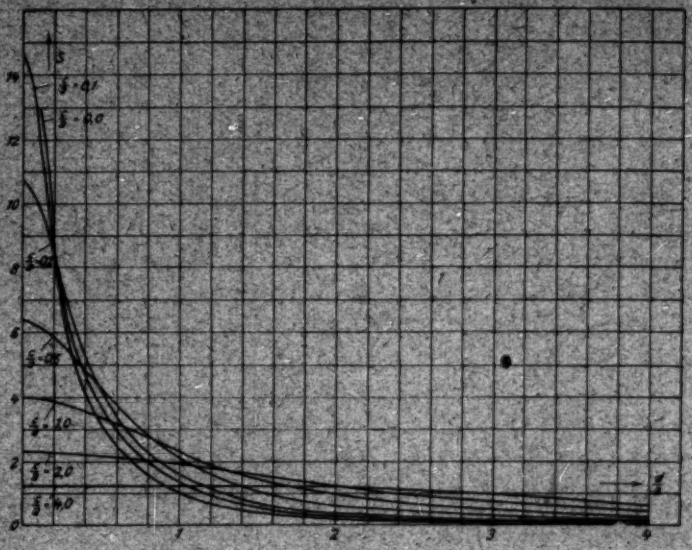


Fig. 2.

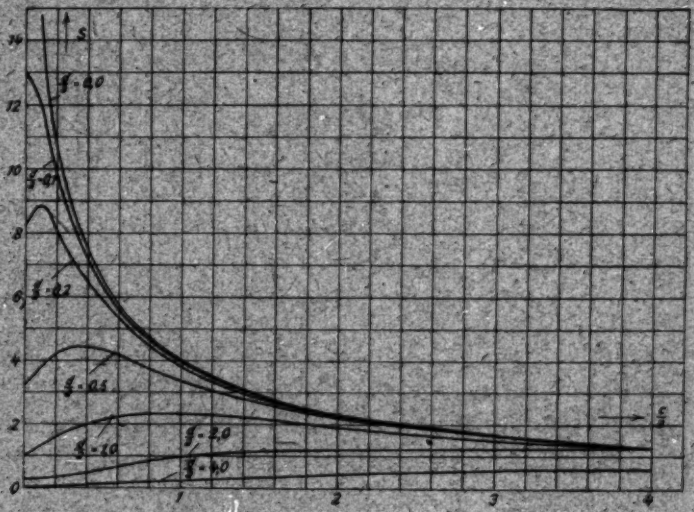


Fig. 3.

Berechnung des Koppelungskoeffizienten K.

Unter der Annahme, daß die beiden Quadrate zwei miteinander gekoppelten Schwingungskreisen angehören und daß sie die einzigen in den Kreisen vorhandenen Selbstinduktionen

sind, läßt sich ihr Koppelungskoeffizient K auf sehr einfache und schnelle Weise bestimmen. Der Koppelungskoeffizient ist definiert durch die bekannte Beziehung

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{oder} \quad K^0/_0 = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \times 100.$$

Setzen wir hierin $M = a\,S$ und für die Selbstinduktionskoeffizienten L_1 und L_2 der beiden Quadrate, wie sich aus meiner früheren Arbeit über den gegenseitigen Induktionskoeffizienten häufig vorkommender Leiterformen[1]) ergibt

$$L_1 = a\,S' \quad \text{bzw.} \quad L_2 = a'\,S'',$$

so wird

$$K = \sqrt{\frac{a}{a'}}\,\frac{\sqrt{S}}{S'\,S''}.$$

Die Größen S, S' und S'' lassen sich aus der vorhergehenden und folgenden Tabelle für jedes beliebige Wertsystem c/a und d/a entnehmen.

Tabelle für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten von Quadraten.

$S' = f\left(\frac{a}{\varrho}\right)$ $\qquad L = a\,S'$ $\qquad$ (ϱ = Drahthalbmesser)

$\frac{a}{\varrho}$	S'	$\frac{a}{\varrho}$	S'
20	20,18	800	49,30
40	25,52	1000	51,08
60	27,90	2000	56,62
80	30,97	4000	62,16
100	32,73	6000	65,41
200	38,23	8000	67,70
400	43,76	10000	69,49
600	47,00		

Die Berechnung soll nun für ein bestimmtes Beispiel durchgeführt werden.

Die beiden Quadrate sollen die Seitenlängen $a = 100$ cm und $a' = 300$ cm besitzen, ihr Drahtdurchmesser sei $2\varrho = 0{,}1$ cm.

Zu berechnen ist der Kuppelungskoeffizient für die Entfernungen 10 cm und 100 cm.

Es ist also

$$\frac{c}{a} = 1, \quad \frac{d}{a} = 0{,}1 \quad \text{bzw.} \quad 1{,}0, \quad a = 100 \text{ cm},$$

$$a' = a + 2c = 300 \text{ cm}. \quad 2\varrho = 0{,}1 \text{ cm}.$$

1) A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie. 15. 1920.

Aus der Tabelle erhalten wir

$$\mathfrak{L} = 3{,}936 \quad \text{bzw.} \quad 2{,}328,$$
$$S = 56{,}62,$$
$$S' = 65{,}41$$

und

$$K = \frac{3{,}936}{\sqrt{3 \cdot 56{,}62 \cdot 65{,}41}} = 3{,}73\,\%,$$

bzw.

$$K = \frac{2{,}328}{\sqrt{3 \cdot 56{,}62 \cdot 65{,}41}} = 2{,}2\,\%.$$

Die Koppelung in 10 cm Entfernung beträgt also 3,73%, in 1 m Entfernung 2,2%.

Zusammenfassung.

Es wird eine Formel abgeleitet für die Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen einander gegenüberliegenden Rechtecke von ungleicher Größe.

Die allgemeine Formel enthält eine Reihe von speziellen Fällen, die unter anderem die Neumannsche Formel für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen liegenden gleich großen Rechtecke und die Formel von Martens für zwei in einer Ebene liegende Quadrate ergeben. Unter der Annahme, daß die Verhältnisse

$\frac{\text{Abstand}}{\text{Seitenlänge}}$ und $\frac{\text{Differenz der Seitenlängen}}{\text{kleinste Seitenlänge}}$ kleiner sind als 0,25,

wird eine für die Rechnung sehr einfache Näherungsformel abgeleitet. Aus berechneten Tabellen und Kurven kann man für jeden beliebigen Wert der obigen Verhältnisse den zugehörigen Wert des gegenseitigen Induktionskoeffizienten entnehmen und unter Hinzunahme der für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten mitgeteilten Tabelle auf sehr einfache Weise den Koppelungskoeffizienten bestimmen.

Berlin, den 9. Sept. 1919.

Laboratorium der Ges. für drahtlose Telegraphie (Telefunken) Berlin.

(Eingegangen 28. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur [illegible]

Werkstätten für Feinmechanik und Optik, [illegible]

Spezialität: [illegible]

Rotierende ölgedichtete Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.

Vakuummeter (Patent, rein direkter Messung), D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Universal-Öl-Luftpumpen, D.R.P.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren bis [illegible] Funkenlänge

Diplomiert

Paris-Paris

Inhalt.

1. Helge Bahlin. Eine neue Anordnung für röntgenkinematographische Untersuchungen von Explosivstoffen. (Hierzu Taf. I.) 431
2. P. Ehrenfest. Wieviel Zeit spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Fundamenten der Physik? 440
3. Richard Gans. Das Verhalten Hertzscher Gitter 447
4. Richard Gans und Ricardo Gans (Buenos Aires). Die Form ultramikroskopischer Partikelchen 466
5. Reinhard Seeliger. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kathodenstrahlungen im homogenen Felde . 471

Die Redaktion der Annalen wird von den umstehend genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Rat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 2.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzusenden und in den Korrekturen nur solche Druck- für die ursprüngliche Form nicht zu vermehren.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag Barth bezogen werden können.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls mehrere gewünscht werden, so muß die bei Rücksendung der ersten Korrektur an die Druckerei dieser gerichtete Bestellung erfolgen. Alle weiteren Mitteilungen bezüglich des Sonderdruckes sowie auch an die Verlagsbuchhandlung sind stets an diese zu richten.

Autorenkorrekturen, die für die Annalen bestimmte Abhandlungen oder Übersetzungen derselben betreffen, können nur gegen Erstattung der Kosten und Vergütung der Zeitversäumnis gemacht werden.

Die Autorenkorrekturen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung der Abänderungen und besonders sparsam bemessenen Zahl an den Verlag zurückzusenden. Die für Korrekturen, welche nicht als Druckfehler anzusehen sind, in der Regel der Manuskripte nicht gemachten Ausgaben fallen, in der Regel der Manuskripte nicht gemachten Ausgaben,

1920. № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver*[1]; *von Helge Bohlin.*

(Hierzu Tafel I.)

Während die von v. Laue[2]) und W. H. und W. L. Bragg[3]) gegründeten Methoden zur Bestimmung des Atomgitters Kenntnis von dem Kristallsytem des zur Untersuchung vorliegenden Materials und größere ausgebildete Kristalle erfordern, erreicht das von Debye und Scherrer[4]) angegebene Verfahren dasselbe Ziel, auch wenn die kristallographischen Verhältnisse des Stoffes von vornherein vollkommen unbekannt sind. Da weiter keine großen Kristalle beim letzteren Verfahren notwendig und sonst die experimentellen Anordnungen sehr einfach sind, dürfte wohl diese Methode einer allgemeineren Anwendung fähig sein.

In der vorliegenden Mitteilung wird nun eine neue Anordnung beschrieben, welche dem Grundgedanken nach sich der Methode von Debye und Scherrer anschließt, deren Vorzug vor allem aber in einer größeren Meßgenauigkeit begründet ist. Hier soll zunächst die Methode auseinandergesetzt werden. Ferner werden einige Beispiele für ihre Verwendung angeführt, in einer späteren Abhandlung soll dann über weitere nach diesem Verfahren gemachte Kristallgitterbestimmungen berichtet werden.

Das Prinzip der Debye-Scherrer-Methode ist bekanntlich folgendes: In einem Aggregat von sehr kleinen Kristall-

1) Die Methode ist vor kurzem unabhängig von Hrn. H. Seemann angegeben; vgl. hierzu seine Nachschrift bei der Korrektur Ann. d. Phys. 59. S. 464. 1919.

2) W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue, Sitzungsber. München 1912. S. 303; zusammenfassende Darstellung: M. v. Laue, Encycl. d. Math. Wiss. V$_3$. S. 457. 1919.

3) W. H. u. W. L. Bragg, X-Ray and crystal structure, London 1915. Zeitschr. f. anorg. Chem. 90. 1915.

4) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916; 18. S. 291. 1917.

körnern, die vollkommen regellos geordnet sind, kommen die Kriställchen, und somit die Netzebenen in allen möglichen Orientierungen vor. Ein solches Pulver, zu einem dünnen Stab gepreßt, wird von einem Bündel monochromatischen Röntgenlichtes durchstrahlt. Wenn ein Kristallkorn zufälligerweise so liegt, daß die von Bragg eingeführte Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin \varphi, \tag{1}$$

worin d den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Netzebenen, φ den Winkel zwischen der Richtung dieser Netzebenen und dem einfallenden Strahl, λ die Wellenlänge der Röntgenstrahlung und n eine kleine ganze Zahl bedeutet, erfüllt ist, so reflektiert es den einfallenden Strahl, in allen anderen Fällen nicht. Weil nun wegen der verschiedenen Lagen der Kristallkörner alle möglichen Winkel φ vorhanden sind, wird der einfallende Strahl in verschiedene, bestimmte Richtungen abgelenkt, von denen jede einem bestimmten Netzebenenabstand entspricht. Dieser Ablenkungswinkel ist natürlich nicht auf eine Ebene beschränkt, sondern der Strahl wird in allen möglichen Richtungen abgelenkt, die mit der Einfallsrichtung den Winkel 2φ bilden, beschreibt also um den einfallenden Strahl als Achse einen Kegel mit dem halben Öffnungswinkel 2φ. Um diese Ablenkungswinkel zu bestimmen, brachten Debye und Scherrer ein Kristallstäbchen in der Mitte einer zylinderförmigen Kamera an, an deren Wand ein Film ausgespannt war. Da, wo die Kegelflächen den Film schneiden, entstehen also gekrümmte Linien; durch Bestimmung des Abstandes dieser Linien vom Treffpunkt des direkten Strahles mit dem Film können die Ablenkungswinkel ermittelt werden.

Ist die einfallende Strahlung hart genug, um das Stäbchen vollkommen zu durchdringen, so wird die Breite der Interferenzlinie ungefähr gleich der Dicke des Stabes, also gleich 1 bis 2 mm. Diese Breite der Linien bringt natürlich eine gewisse Ungenauigkeit der Messung mit sich, besonders bei kleinen Winkeln, wodurch die mathematische Auswertung erheblich erschwert werden kann, namentlich wenn linienreiche Aufnahmen vorliegen.

Wenn infolge Absorption die Strahlung nur bis zu einer gewissen Tiefe in die zerstreuende Substanz eindringt, müssen an den ausgemessenen Winkeln nicht unbedeutende Korrektionen vorgenommen werden, wie A. J. Bijl und N. H. Kolk-

meyer[1]) nachgewiesen haben. Nach ihnen muß von dem durch die Ausmessung erhaltenen Werte von $\sin^2\varphi$ der Betrag

$$\frac{r}{4R}\sin 2\varphi\left[\frac{R}{d}+\cos 2\varphi+\sqrt{\frac{R^2}{d^2}+\frac{R}{d}\cos 2\varphi+1}\right]$$

subtrahiert werden, worin r den Radius des zirkulären Querschnittes des Stabes, R den Radius der Kamera und d den Abstand zwischen dem Zentrum der Kamera und der Eintrittsöffnung des Strahlenbündels bedeuten soll. In den von Bijl und Kolkmeijer gemachten Aufnahmen kann diese Korrektion für kleinere Ablenkungswinkel bis zu 14% betragen.

Die nachfolgend beschriebene Methode ist frei von einer solchen Korrektion. Die Anordnung ist folgende:

Das Kristallpulver wurde so gepreßt, daß eine Fläche zylindrischer Krümmung entsteht von demselben Radius, wie die ebenfalls zylinderförmige Kamera. Fig. 1 zeigt einen schematischen Grundriß der Kamera. Durch den Spalt S tritt ein divergentes monochromatisches Röntgenstrahlenbündel ein, trifft die zerstreuende Substanz K, an der es abgelenkt wird, in demselben Sinn wie bei der Debye-Scherrer-Anordnung. Greifen wir also einen Strahl aus diesem Bündel heraus und betrachten die Reflexion an einer bestimmten Netzebene (Abstand d), so wird der Strahl um einen Winkel 2φ aus seiner Einfallsrichtung abgelenkt nach der Gleichung (1). Alle Strahlen des Bündels werden — Reflexion an derselben Netzebene vorausgesetzt — um denselben Winkel 2φ abgelenkt, treffen also, wie aus einer einfachen geometrischen Überlegung zu ersehen ist, in einem Punkte A zusammen, wo ein scharfes Bild von dem Punkte S zu erwarten ist. Eine andere Netzebene (Abstand d_1) lenkt die einfallenden Strahlen um den Winkel $2\varphi_1$ ab, erzeugt also im Punkte B ein anderes Spaltbild usw. Durch die Anwendung der gekrümmten Reflexionsfläche wird also eine Art fokusierender Wirkung erreicht. Ist die Länge des Zirkelbogens $SKA = l$ und der Radius der Kamera R bekannt, so läßt sich der Ablenkungswinkel 2φ berechnen nach der Gleichung:

$$2\varphi = \frac{l}{2R}. \tag{2}$$

1) A. J. Bijl u. N. H. Kolkmeyer, Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen at Amsterdam. 21. S. 494 u. 501. 1919.

Im unteren Teil der Fig. 1 ist eine Vertikalprojektion der Kamera angedeutet. Hier bedeutet $S_1 S_5$ den Spalt, $M_1 F_1 H N$ die Projektion des „Spiegels" K und $F_1 G_1 I H$ die der Kamerawand $F A B G$. Jeder von den einfallenden Strahlen $S_1 D_1$,

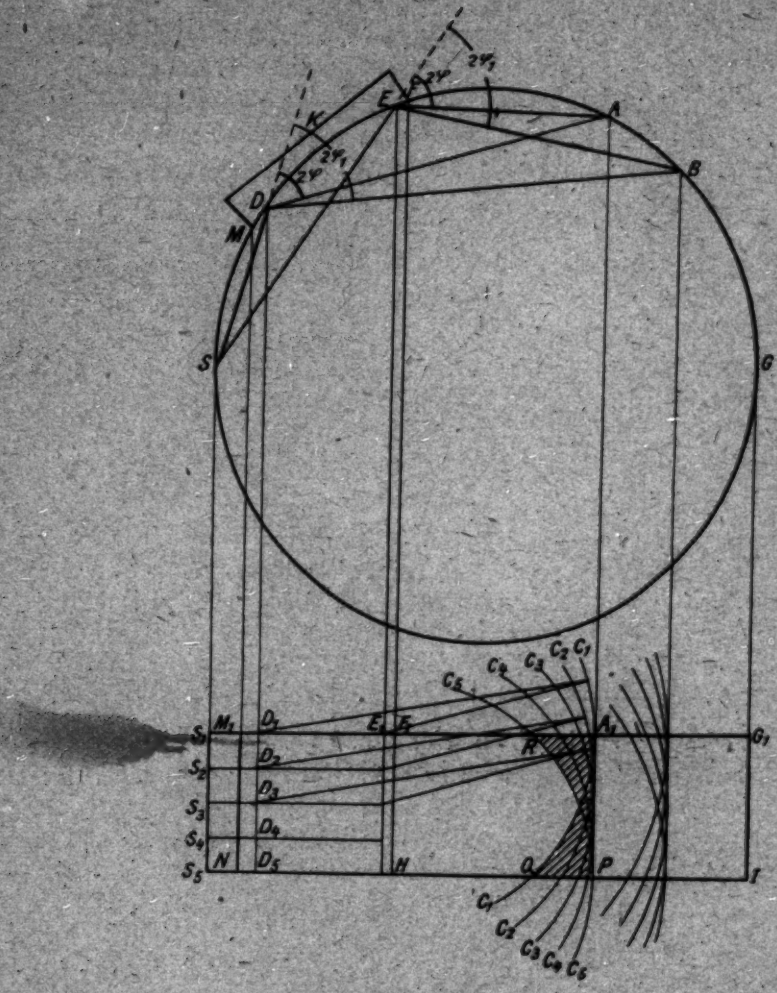


Fig. 1.

$S_2 D_2$ usw. wird, wie oben gesagt, um den Winkel 2φ abgelenkt und beschreibt um die Einfallsrichtung einen Kegel, der als Schnittlinie zwischen diesem Kegel und dem zylinderförmigen Film zu erkennen ist (Kurven C). Alle diese Kurven haben

eine gemeinsame Tangente $A_1 P$, deren Lage dem Punkte A entspricht. Beim Überlagern aller Kurven C entsteht also ein Bild auf dem Film von der in Fig. 1 angedeuteten Form des schraffierten Gebietes $R A_1 P Q$ mit einer scharfen nach Gleichung (2) definierten Kante $A_1 P$. Die genaue Gestalt der Kurven C und somit die Form und Breite des Interferenzbildes läßt sich natürlich ohne größere Schwierigkeiten berechnen, ist aber von nebensächlichem Interesse. Die Hauptsache ist, daß die Kante des Bildes scharf und geometrisch definiert ist.

Die Breite des Interferenzbildes ist, wie aus der Konstruktion Fig. 1 hervorgeht, von den Dimensionen des „Spiegels" K abhängig und um so kleiner, je kleiner die Höhe $M_1 N$ desselben gemacht wird. Weiter nimmt die Breite der Linie ab mit wachsendem Abstande der Linie vom „Spiegel", bis der Ablenkungswinkel $2\varphi = 90^0$ wird, wo eine gerade Linie von der Breite des Spaltes zu erwarten ist. Für Ablenkungswinkel größer als 90^0 wächst wieder die Breite der Linien und die scharfe Kante liegt von da ab auf der entgegengesetzten Seite.

Größere *Spaltbreite* gibt auch eine größere Breite der Linie, jedoch ohne die ursprüngliche Lage der Linienkante zu beeinflussen, wie aus Fig. 2 hervorgeht. Die scharfe Bildkante A entspricht stets der Spaltkante S, weshalb aufs sorgfältigste dafür gesorgt werden muß, daß diese in die richtige Lage (Innenfläche der Kamerawand) eingefügt wird. Obgleich die Breite der Interferenzlinie nicht auf die Meßgenauigkeit einwirkt, muß sie doch innerhalb gewisser Grenzen gehalten werden, weil bei zu großer Breite die scharfe Kante einer Linie von dem diffusen Teil der folgenden verdeckt werden kann.

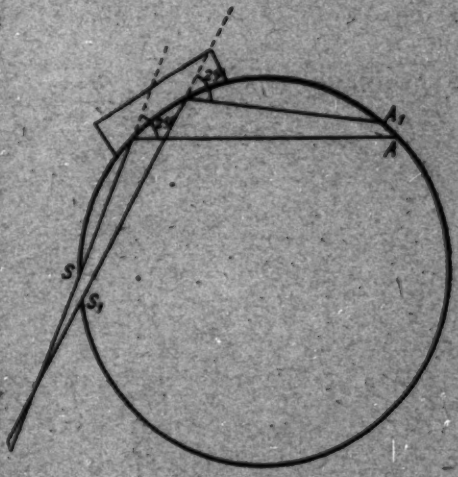


Fig. 2.

Die Eindringungstiefe der Strahlung in die Kristallmasse ist ebenfalls ohne Einwirkung auf die Lage der scharfen Kante der Linie, wie aus Fig. 3 hervorgeht. Hier bedeuten die gestrichelten Linien den Weg der von Kristallteilchen im Inneren der Kristallmasse reflektierten Strahlen.

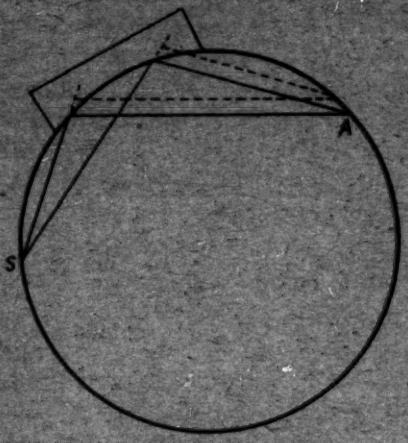


Fig. 3.

Die Aufnahme Nr. 1 bestätigt die oben gegebene Auseinandersetzung. Sie wurde mit Aluminiumpulver als reflektierende Substanz gemacht. Die Spaltbreite war ungefähr 1 mm. In den folgenden Aufnahmen wurde nur ein schmaler,

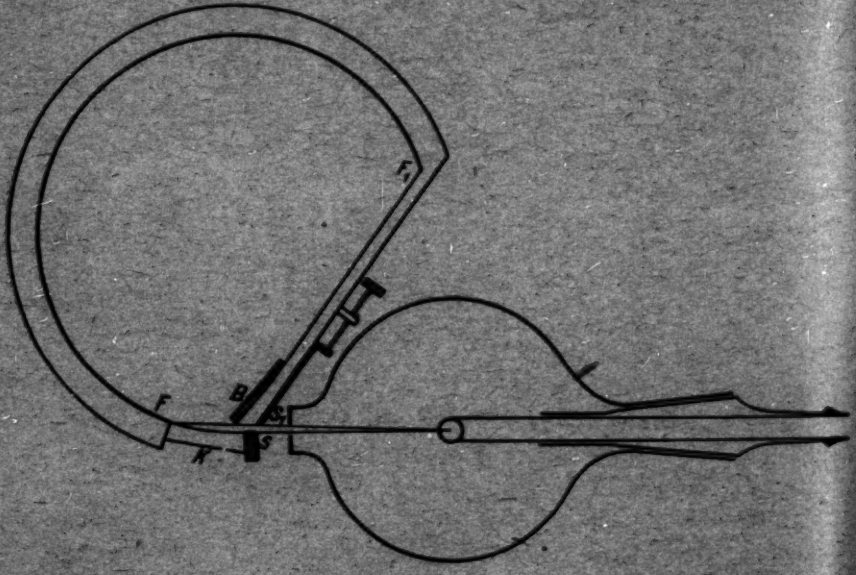


Fig. 4.

der Höhe des Spiegels entsprechender Filmstreifen verwendet, da nur dieses Stück des Bildes zur Ausmessung dienen kann.

Kamera und Röntgenröhre sind in ihrer gegenseitigen Lage in Fig. 4 dargestellt. $S S_1$ ist der Spalt aus Blei, dessen eine Kante S_1 mit einer Schraube verschiebbar ist, B eine Blende, die verhindern soll, daß die Strahlung vom Spalte direkt den Film $F F_1$ trifft. Im Punkte F wurde ein feiner Strich auf den Film gemacht, von wo aus die Lagen der Interferenzlinien gemessen wurden. Die Länge des Bogens $F K S$

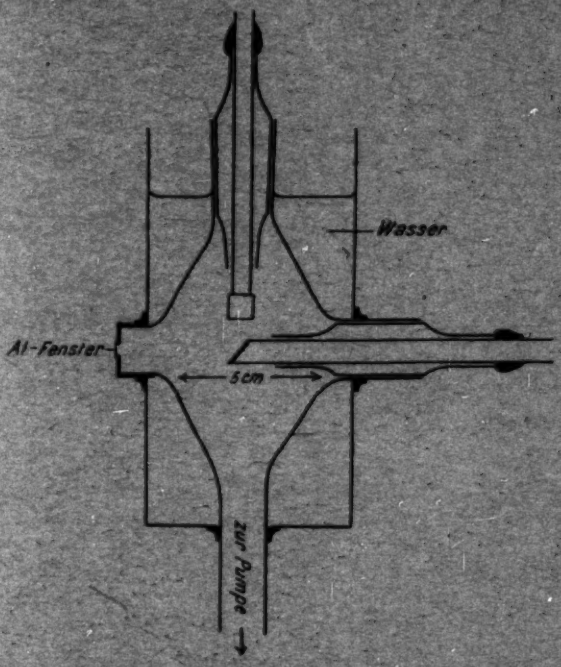


Fig. 5.

beträgt 22,4 mm, der Radius der Kamera 40,2 mm. Die Spiegel wurden mit einem Stempel von rechtwinkligem Querschnitt und zylindrisch gekrümmter Endfläche (Radius gleich dem Radius der Kamera) hydraulisch gepreßt.

Als Strahlungsquelle wurde eine Röntgenröhre mit Glühkathode und Kupferantikathode verwendet (Fig. 5). Um den Abstand Antikathode—zerstreuende Substanz so klein wie angängig zu machen, wurden die Dimensionen der Röhre möglichst reduziert (der Durchmesser der Kugel ungefähr 5 cm). Die Strahlung trat durch ein Aluminiumfenster von 0,05 mm

Dicke aus der Röhre heraus. Kathode und Antikathode waren in Glasschliffen mit Siegellack eingekittet. Die Glühspirale der Kathode bestand aus 0,2 mm dickem Wolframdraht, von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Berlin bezogen. Die Röhre wurde mit Kühlwasser umgeben, außerdem wurde sowohl Kathode als Antikathode mit fließendem Wasser gekühlt. Die Stromstärke durch die Röhre konnte bis 30 M.A. gesteigert werden bei einer Spannung von ungefähr 15000 Volt. Während des Betriebes war die Röhre dauernd mit der Vakuumpumpe verbunden (Diffusionspumpe nach Gaede). Die Belichtungszeiten betrugen im allgemeinen 2 Stunden. Es wurde Röntgenfilm von der Firma O. Perutz, München, verwendet.

Drei Aufnahmen. (Vgl. Tafel I.)

1. Thorium.

Die Aufnahme Nr. 2 ist mit Thoriumpulver als reflektierender Substanz gemacht. Durch einen unvorhergesehenen Zufall hatte der Brennfleck während der Belichtung dieser Aufnahme die Kante der Antikathodenfläche getroffen, wo die Kupferplatte an Messing gelötet war.

Tabelle 1.

Cu_α-Strahlung		Cu_β-Strahlung			Zn_α-Strahlung		
l	$\sin\varphi$	l	$\sin\varphi$	Cu_α/Cu_β	l	$\sin\varphi$	Cu_α/Zn_α
41,5	0,256	37,4	0,229	1,114	38,5	0,238	1,076
48,1	0,295	43,0	0,265	1,113	44,5	0,274	1,077
70,0	0,422	62,4	0,379	1,112	64,7	0,392	1,077
83,5	0,497	74,4	0,447	1,112	77,1	0,462	1,076
87,5	0,518	79,1	0,473	1,100	80,9	0,483	1,076
102,5	0,596						
114,9	0,656				105,1	0,609	1,078
118,4	0,671				108,5	0,625	1,073
133,2	0,737				121,9	0,689	1,072
143,4	0,779						

Es war deshalb zu vermuten, daß eine neue Wellenlänge, die des Zinks, hinzukam, welches auch eine einfache Untersuchung bestätigt. Das Diagramm würde sich dann aus drei Serien von Linien zusammensetzen mit den Wellenlängen

$$Cu_\alpha = 1{,}54, \quad Cu_\beta = 1{,}39, \quad Zn_\alpha = 1{,}43 \text{ Å.-E.},$$

von denen Cu_α die größte, Cu_β die kleinste Intensität besitzt. (Zn_β ist, wie aus dem Folgenden zu sehen ist, zu schwach, um

auf dem Film sichtbar zu werden.) Diese Zusammensetzung der Strahlung stört indessen nicht die Berechnung, liefert im Gegenteil eine wertvolle Kontrolle.

Wenn die drei Arten der Strahlung an derselben Netzebene reflektiert vorkommen, müssen nach Gleichung (1) die zugehörigen Werte von $\sin\varphi$ sich wie die betreffenden Wellenlängen verhalten. Wir suchen also zuerst unter Berücksichtigung der Intensitäten in der Reihe von beobachteten Größen von $\sin\varphi$ je zusammengehörige Werte, für welche das Verhältnis $1{,}54/1{,}39 = 1{,}108$ besteht. So wurden die in den Kolumnen 2 und 4 der Tab. 1 stehenden Werte von $\sin\varphi$ ausgesondert, von denen je zwei in derselben Horizontalreihe stehenden das in der Kolumne 5 berechnete Verhältnis ergeben. Die Werte in der Kolumne 2 entsprechen also der Cu_α-Strahlung, die in der Kolumne 4 der Cu_β-Strahlung. In derselben Weise wurden die Zn_α-Linien identifiziert; die entsprechenden Werte von $\sin\varphi$ sind in der Kolumne 7 wiedergegeben. Wenn aus den Mittelwerten der gefundenen Verhältnisse in den Kolumnen 5 und 8 Cu_β und Zn_α berechnet werden, erhält man, wenn Cu_α gleich 1,54 gesetzt wird: $Cu_\beta = 1{,}38$ und $Zn_\alpha = 1{,}43$, was mit den oben angeführten Werten der Wellenlängen gut übereinstimmt.

Weil alle beobachteten Linien in der Tab. 1 untergebracht sind, und die Konstanz der Verhältnisse Cu_α/Cu_β und Cu_α/Zn_α nichts zu wünschen übrig läßt, können wir die Einteilung der Linien als zuverlässig ansehen und jede von den drei Serien benutzen, um das Atomgitter zu ermitteln. — In den Kolumnen 1, 3 und 6 der Tab. 1 sind außerdem die Abstände l der Linien von der Spaltkante S (Fig. 4) angegeben.

Für Thorium ist nach Brögger[1]) eine reguläre Struktur zu erwarten. Die beobachteten Werte von $\sin\varphi$ würden sich in diesem Falle nach der Gleichung[2]):

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \tag{3}$$

berechnen lassen, wo h_1, h_2, h_3 die kristallographischen Indizes derjenigen Netzebene bedeuten, die die Strahlung unter dem Winkel φ reflecktiert und a die Kantenlänge des kubischen Elementarbereiches des Atomgitters ist. Wie man aus der

1) W. C. Brögger, Zeitschr. f. Krystall. 7. S. 442. 1883.
2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916.

Tab. 2 ersieht, ist dieses wirklich der Fall. Darauf deuten die konstanten Verhältnisse

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

hin. Hieraus läßt sich also a berechnen. Man findet als Wert für a den drei Strahlungskomponenten entsprechend

$$5{,}13\cdot10^{-8};\quad 5{,}11\cdot10^{-8};\quad 5{,}11\cdot10^{-8}\,\text{cm},$$

eine Übereinstimmung, die als recht gut zu bezeichnen ist.

Wenn das spezifische Gewicht des Thoriums gleich 11 gesetzt wird, erhält man für das Gewicht des Elementarwürfels $1510\cdot10^{-24}$ g. Das absolute Gewicht des Thoriumatoms ist $232\cdot1{,}66\cdot10^{-24}\,\text{g} = 385\cdot10^{-24}$ g. Der Elementarbereich enthält also 4 Atome.

Wir haben also die kubische Struktur des Thoriums bestätigt und weiter festgestellt, daß es von 4 ineinander geschalteten kubischen Gittern mit der Kantenlänge a aufgebaut ist. Es bleibt noch übrig zu ermitteln, in welcher Weise diese 4 Gitter ineinander geschaltet sind.

Aus Kolumne 1 der Tab. 2 geht hervor, daß nur Netzebenen mit ungemischten Indizes Interferenzlinien erzeugen. Dieses deutet darauf hin, daß das Gitter ein flächenzentriertes ist. Der Strukturfaktor S[1]) wird für diesen Fall

$$S = 1 + e^{\pi i(h_1+h_2)} + e^{\pi i(h_1+h_3)} + e^{\pi i(h_2+h_3)},$$

verschwindet also, wenn nicht die Indizes entweder alle gerade oder alle ungerade sind. Nach Debye[2]) ist die Intensität J einer Interferenzlinie mittels des Ausdruckes

$$J = K\frac{(1+\cos^2 2\varphi)\,n\,|S|^2}{\sin^2\varphi} \tag{4}$$

zu berechnen, wo K ein Proportionalitätsfaktor und n die sogenannte Kombinationszahl ist, d. h. die Zahl der Netzebenen, die zur Bildung einer Interferenzlinie zusammenwirken.

---

1) M. v. Laue, a. a. O.
2) P. Debye, Phys. Zeitschr. 18. S. 483. 1917.

Tabelle 2.

h_1	h_2	h_3	Cu_α-Strahlung				Cu_β-Strahlung				Zn_α-Strahlung			
			$\sin\varphi$	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.	$\sin\varphi$	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.	$\sin\varphi$	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.
1	1	1	0,256	0,149	*sst*[1])	21	0,229	0,132	*s – m*	28	0,238	0,138	*m*	27
2	0	0	0,295	0,148	*st*	12	0,265	0,132	*s*	15	0,274	0,138	*s*	14
2	2	0	0,422	0,150	*st*	10	0,379	0,134	*s*	12	0,392	0,139	*s*	11
3	1	1	0,497	0,150	*st*	12	0,447	0,135	*s*	17	0,462	0,139	*s*	14
2	2	2	0,518	0,150	*m*	4,0	0,473	0,136	*ss*	5	0,483	0,139	*ss*	4
4	0	0	0,596	0,149	*ss*	1,8								
3	3	1	0,656	0,150	*m – st*	10					0,609	0,140	*s*	8
4	2	0	0,671	0,150	*s – m*	5,3					0,625	0,140	*s*	6,5
4	2	2	0,737	0,150	*s*	4,8					0,689	0,140	*ss*	5
3	3	3	0,779	0,150	*s – m*	6,8								
5	1	1												

1) Die Bezeichnung der geschätzten Intensitäten ist folgende: *sst* = sehr stark, *st* = stark, *m* = mittel, *s* = schwach, *ss* = sehr schwach.

In der Tab. 2 sind die nach dieser Formel berechneten relativen Intensitäten zum Vergleich mit den beobachteten angegeben. Weil auch in dieser Hinsicht eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung vorliegt, können wir also feststellen, daß das Atomgitter von Thorium ein kubisches, flächenzentriertes mit der oben ermittelten Kantenlänge a ist.

In der 4. Gruppe des periodischen Systems, die hinsichtlich des Raumgitters die am besten ausgeforschte ist, sind also jetzt fünf Elemente untersucht worden, nämlich: C[1]), Si[2]), Sn[3]), Pb[4]), Th.

2. Nickel.

Aufnahme Nr. 8 ist mit Nickelpulver als zerstreuender Substanz gemacht. Dieses Bild wurde von reiner Kupferstrahlung erzeugt. Die Cu_β-Linien sind nicht auf der Platte zu sehen, wahrscheinlich wegen der recht starken kontinuierlichen Schwärzung derselben.

Über die Kristallform des Nickels liegen nur ganz unbestimmte Angaben vor, nach welchen dieselbe kubisch wäre.[5]) Schon die Einfachheit des Diagramms läßt auch eine kubische Struktur vermuten. Wie eine nähere Untersuchung ergibt, lassen sich die Werte von $\sin\varphi$ nach der Gleichung (3) berechnen, was aus dem konstanten Verhältnis

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

hervorgeht (Tab. 3).

Tabelle 3.

l	$\sin\varphi$	h_1 h_2 h_3	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	Intensität beob.	ber.
61,8	0,375	1 1 1	0,217	*s s t*	8,8
72,1	0,434	2 0 0	0,217	*s t*	4,2
106,5	0,616	2 2 0	0,218	*s t – m*	3,4
129,7	0,723	3 1 1	0,218	*s t*	4,8
137,4	0,755	2 2 2	0,218	*s*	1,4

1) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 18. S. 291. 1917.
2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916.
3) A. J. Bijl u. N. H. Kolkmeyer, a. a. O.
4) L. Vegard, Phil. Mag. 32. S. 65. 1916.
5) J. A. Ewing u. W. Rosenhain, Trans. Roy. Soc. London 1900 193 A. S. 353.

Auf dieselbe Weise, wie im vorigen Falle, erhalten wir hier $a = 3{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm. Setzen wir das spezifische Gewicht des Nickels gleich 8, 8, erhalten wir für das Gewicht des Elementarkubus $388 \cdot 10^{-24}$ g. Das absolute Gewicht des Nickelatoms beträgt $97{,}4 \cdot 10^{-24}$ g. Ein Elementarbereich des Gitters enthält also 4 Atome. Weil keine gemischte Indizes vorkommen, andererseits aber die beobachteten Linien allen überhaupt möglichen ungemischten Indizes angehören, die innerhalb des Beobachtungsgebietes fallen, schließen wir, daß wir es auch in diesem Falle mit einem flächenkonzentrierten Gitter zu tun haben. Dieses wird auch durch die Übereinstimmung der nach Formel (4) berechneten Intensitäten mit den beobachteten bestätigt.

Das Atomgitter des gewöhnlichen (α)-Nickels ist also ein flächenzentriertes kubisches mit der Kantenlänge

$$a = 3{,}53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Unter den bis jetzt hinsichtlich des Raumgitters untersuchten Elementen haben die in der folgenden Tabelle zusammengestellten kubische flächenzentrierte Gitter. In der zweiten Reihe ist die Kantenlänge des Elementarwürfels angegeben.

Al[1])	$4{,}07 \cdot 10^{-8}$ cm
Ni (α)	3,53 „
Cu[2])	3,61 „
Ag[3])	4,06 „
Sn (grau)	6,46 „
Au[4])	4,07 „
Pb	4,91 „
Th	5,12 „

8. Magnesium.

(Aufnahme 4.) Nach demselben Verfahren wie bei Thorium beschrieben, wurden die von den beiden Strahlungskomponenten Cu_α und Cu_β herrührenden Linien getrennt. Es ergab sich dann, daß diejenigen Linien, die in der Tab. 4 mit a', b', c', d', f', h', j' bezeichnet sind, β-Linien sind, reflektiert an den-

1) P. Scherrer, Phys. Zeitschr. **19.** S. 23. 1918.
2) W. H. Bragg, Phil. Mag. **28.** S. 355. 1914.
3) L. Vegard, Phil. Mag. **31.** S. 83. 1916.
4) L. Vegard, Phil. Mag. **32.** S. 65. 1916.

selben Netzebenen, wie die α-Linie a, b, c, d, f, h, j. Die übrigen sind alle α-Linien, deren entsprechende β-Linien zu schwach sind, um auf dem Film sichtbar zu werden.

Tabelle 4.

	l	$\sin^2\varphi$ beob.	ber.	$h_1 h_2 h_3$	n	Intensität beob.	ber.
a'	39,9	0,0605					
b'	42,6	0,0687					
a	44,2	(0,0739); 0,0755[1])	0,0755	110 (100)	1	m	2,3
c'	45,4	0,0779					
b	47,6	(0,0853); 0,0860[1])	0,0860	002	1	st	2,0
c	50,6	(0,0960); 0,0967[1])	0,0970	111 (101)	2	sst	3,4
d'	58,9	0,128					
d	66,1	0,160	0,162	112 (102)	2	$st-m$	1,8
f'	70,8	0,183					
e	72,5	0,191	0,193	003	1	ss	0,7
h'	77,9	0,218					
f	79,5	0,226	0,227	1–10 (120)	1	$m-s$	0,6
g	83,4	0,247	0,248	1–11 (121)	2	ss	1,0
j'	84,6	0,253					
h	87,5	0,268	0,269	113 (103)	2	m	0,9
i	93,4	0,302	0,302	220, 200	3	ss	1,1
j	95,1	0,313	0,313	1–12 (212)	2	m	0,8
k	97,2	0,324	0,324	201, 221	6	m	2,3
l	100,6	0,344	0,344	004	1	s	0,3
m	108,0	0,387	0,388	222, 202	6	s	1,8
n	113,3	0,420	0,420	1–13, 114 (123)	4	s	0,9
o	125,8	0,498	0,496	203, 223	6	s	1,2
p	134,7	0,554	0,550	131 (231)	4	s	0,7
q	138,1	0,575	0,571	1–14 (124)	2	ss	0,4
r	145,4	0,619	0,615	132 (232)	4	s	0,7

Schon die große Anzahl der Linien dieser Aufnahme deutet auf ein Gitter von niedrigerer Symmetrie als in den oben besprochenen Fällen. Eine ähnliche Untersuchung zeigt auch, daß die Gleichung (3) nicht die beobachteten Linien wiedergeben kann. Der Berechnung müssen dann die von Debye und Scherrer zusammengestellten[2]), für ein beliebiges Kristallsystem geltenden Formeln zugrunde gelegt werden. Nach

1) Aus der Linie 2. Ordnung ermittelt. Weil die eine Ecke des Films bei dieser Aufnahme von der Kamerawand sich losgelöst hatte, sind die ersten Linien etwas schräg.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 18. S. 291. 1917. A. Johnsen u. O. Toeplitz, Phys. Zeitschr. 19. S. 47. 1918.

diesen lassen sich die Werte von $\sin^2\varphi$ berechnen aus der homogenen quadratischen Form

$$(5)\quad \begin{cases} 4\sin^2\varphi = k_{11}h_1^2 + k_{22}h_2^2 + k_{33}h_3^2 + 2k_{12}h_1h_2 \\ \qquad\qquad + 2k_{13}h_1h_3 + 2k_{23}h_2h_3, \end{cases}$$

wo $h_1\,h_2\,h_3$ die kristallographischen Indizes der Netzebene bedeuten, die unter dem Winkel φ die Strahlung reflektiert, und die Konstanten k das Kristallsystem charakterisieren. Es ist also die Aufgabe, diese Konstanten so zu bestimmen, daß die quadratische Form die beobachteten Werte von $\sin^2\varphi$ gibt wenn (kleine) ganze Zahlen für die veränderlichen $h_1\,h_2\,h_3$ eingesetzt werden. Sind die Konstanten k ermittelt, so lassen sich die das Elementarbereich bestimmenden Stücke, die Kantenlängen a, b, c und die Winkel α, β, γ, welche diese miteinander bilden, nach den folgenden Formeln berechnen:

$$(6)\quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{\lambda^2(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)}{K}, \\ b^2 = \dfrac{\lambda^2(k_{33}k_{11} - k_{31}^2)}{K}, \\ c^2 = \dfrac{\lambda^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}{K}, \\ \cos\alpha = \dfrac{k_{31}k_{12} - k_{23}k_{11}}{\sqrt{(k_{33}k_{11} - k_{31}^2)(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}}, \\ \cos\beta = \dfrac{k_{12}k_{23} - k_{31}k_{22}}{\sqrt{(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{k_{23}k_{31} - k_{12}k_{33}}{\sqrt{(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)(k_{33}k_{11} - k_{31}^2)}}. \end{cases}$$

Hier ist

$$K = k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{23}^2 - k_{22}k_{31}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{23}k_{31}k_{12};$$

λ bedeutet die benutzte Wellenlänge.

Nach Arbeiten von Des Cloizeau[1]), Ditscheiner[2]) und Hlawatsch[3]) ist für Magnesium eine hexagonale Struktur zu erwarten. Wenn wir als Elementarbereich eines hexagonalen Gitters ein gerades Prisma mit rhombischer Grundfläche ansehen, deren Seiten den Winkel 60° und 120° miteinander

1) A. Des Cloizeau, Bull. soc. min. d. Fr. Par. 1880. 3. S. 111.
2) L. Ditscheiner, Sitzungsberichte d. Akad. Wien. 105 (II b). S. 597. 1896.
3) C. Hlawatsch, Zeitschr. f. Krystall. 32. S. 497. 1900.

bilden, so vereinfacht sich die Formel (5) zu:

$$(7) \qquad x\,(h_1^2 + h_2^2 - h_1 h_2) + y\,h_3^2 = \sin^2\varphi\,,$$

worin $x = \frac{k_{11}}{4}$ und $y = \frac{k_{33}}{4}$ zwei mit den Beobachtungen zu berechnende Größen sind.

Die drei ersten Formeln unter (6) werden für diesen Spezialfall:

$$a^2 = b^2 = \frac{\lambda^2}{3x}\,; \qquad c^2 = \frac{\lambda^2}{4y}\,.$$

Nach einer Methode, die von Johnsen und Toeplitz[1]) beschrieben ist, wurden jetzt a und β so bestimmt, daß sich die beobachteten Werte von $\sin^2\varphi$ aus der Gleichung (7) berechnen ließen. Es zeigte sich, daß, wenn

$$8) \qquad x = 0{,}0755 \quad \text{und} \quad y = 0{,}0215$$

gesetzt wird, die Gleichung (7) sich mit großer Genauigkeit den beobachteten Werten anschließt.

In den Spalten 3 und 4 der Tab. 4 sind die beobachteten und berechneten Werte von $\sin^2\varphi$ zum Vergleich angeführt; daneben stehen die Indizes der Netzebenen. Die Übereinstimmung ist überraschend gut, indem die größten Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Werten von $\sin^2\varphi$ ungefähr 1% betragen.

Aus den Formeln (8) berechnet sich jetzt

$$a = b = 3{,}23 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}; \qquad c = 5{,}25 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}.$$

Diese Gestalt des Elementarbereiches entspricht einem Raumgitter von gerade übereinander in dem Abstande c gelagerten Atomschichten, von dem in Fig. 6 angegebenen Bau. Diese Tatsache steht in gutem Einklang mit den von Hlawatsch an ausgebildeten Magnesiumkristallen ausgeführten kristallographischen Messungen. Für die dihexagonal-bipyramidalen Kristalle findet er das Achsenverhältnis $a : c = 1 : 1{,}624$, während die hier ermittelten Maße des Elementarbereiches $a : c = 1 : 1{,}625$ geben.

Es bleibt noch übrig zu ermitteln, wieviele solche Gitter ineinander gestellt sind. Wenn das spezifische Gewicht des Magnesiums gleich 1,7 gesetzt wird, erhält man als Gewicht

1) A. Johnsen u. O. Toeplitz, a. a. O.

des Elementarbereichs $80{,}7 \cdot 10^{-24}$ g. Das wirkliche Gewicht eines Magnesiumatoms beträgt $40{,}3 \cdot 10^{-24}$ g. Ein Elementarbereich muß also *zwei* Magnesiumatome enthalten.

Schwierigkeiten treten indessen auf, wenn es gilt zu entscheiden, wie diese zwei Gitter gegeneinander verschoben sind. Am nächsten liegt es, an eine Verschiebung längs der *hexagonalen* (*c*-)*Achse* zu denken. Daß eine solche nicht (was am einfachsten scheint) $c/2$ sein kann, geht daraus hervor, daß in diesem Falle alle Interferenzlinien mit ungeraden h_3 verschwinden müßten; mehrere solche sind aber vorhanden, wie aus der

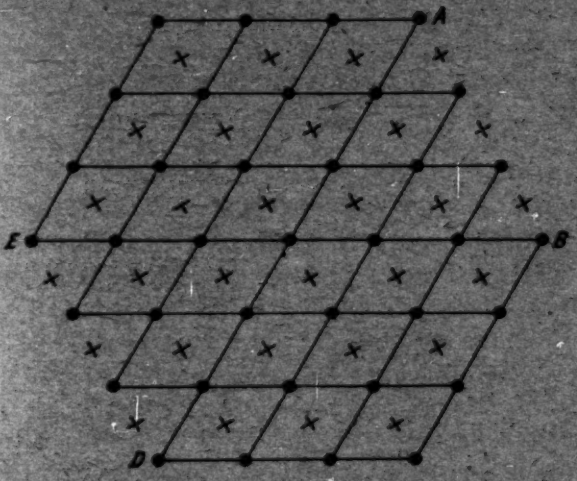


Fig. 6.

Tab. 4 zu ersehen ist. Eine gegenseitige Verschiebung um ungefähr $^1/_6$ von der *c*-Achse würde mit der Tatsache gut übereinstimmen, daß die Linie *e* (003) bedeutend schwächer ist, als *l* (004), würde aber ein sehr unwahrscheinliches Bild vom Raumgitter ergeben.

Als unmöglich erweist sich das Anbringen des zweiten Atoms im *Zentrum* des Elementarkörpers. Es würde das Ausfallen von allen Interferenzlinien, deren Indizessumme ungerade ist, bedeuten.

Eine gegenseitige Verschiebung in der *Basisebene* (Ebene der Fig. 6) würde kein Verschwinden von vorhandenen Linien zur Folge haben. In diesem Falle wird die größte Symmetrie

erreicht, wenn das zweite Atom in der Mitte von der Basisfläche des Elementarbereiches angebracht wird. Dieses würde, wie aus der Figur zu ersehen ist, bewirken, daß zwei gegenüberliegende Prismaflächen ($A\,B$ und $D\,E$) dichter mit Atomen besetzt werden würden, als die anderen vier Flächen derselben Art. Möglicherweise spricht für eine solche Anordnung die von Hlawatsch beobachtete Tatsache, daß die Magnesiumkristalle oft längs einer Nebenachse verlängert sind. In der Tab. 4, Kolumne 8, sind die Intensitäten der Linien dieser Anordnung der beiden Gitter entsprechend nach Formel (4) berechnet. Der Strukturfaktor wird für diesen Fall

$$S = 1 + e^{\pi i (h_1 + h_2)},$$

woraus hervorgeht, daß alle Netzebenen, für welche $h_1 + h_2$ eine ungerade Zahl ist, nicht reflektieren. Diese Indizeskombinationen sind in der Tabelle eingeklammert. In der Spalte 6 sind die Kombinationszahlen der verschiedenen Indizestriplets angegeben.

Wahrscheinlich hat außerdem ein anderer Faktor auf die Intensitätsverteilung eingewirkt. Eine mikroskopische Untersuchung des Metallpulvers zeigte, daß dieses aus sehr dünnen Blättchen bestand von der ungefährlichen Dicke $^1/_{100}$ mm, deren Fläche aber eine Ausdehnung von mehreren Zehnteln Millimeter haben konnte. Nach Hlawatsch ist die Basisfläche der hexagonalen Säulen eine bevorzugte Spaltungsfläche. Die Anordnung der Kristallkörner ist nun wegen der Gestalt der Teilchen keine vollkommen regellose, was im Diagramm vor allem dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Intensität der Reflexion an der Basisfläche (002) größer wird, als berechnet, während die von den Prismaflächen (110) entsprechend schwächer ausfällt. In welchem Maße der erwähnte Umstand auf die Intensitäten einwirkt, läßt sich aus diesem einzelnen Falle nicht beurteilen. Jedenfalls scheint es möglich, die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Intensitäten dadurch zu erklären.

Um sich die Unstimmigkeit zu erklären, wäre es auch möglich, anzunehmen, daß das Metall zweiatomig sein würde. Für einen solchen Fall würden wohl die gewöhnlichen für punktförmige Zerstreuungszentra abgeleiteten Formeln nicht ausreichen, um die Intensitätsverteilung des Interferenzbildes zu be-

rechnen. Eine geplante Untersuchung von mehreren Elementen der zweiten Gruppe des periodischen Systems, wo analoge Raumgitter zu erwarten sind, wird voraussichtlich die Frage betreffs Verschiebung der beiden Gitter endgültig entscheiden können.

Zusammenfassung.

1. Es wurde eine neue Anordnung ausgearbeitet, nach welcher mittels einer zylinderförmig gekrümmten Zerstreuungsfläche aus gepreßtem Kristallpulver Interferenzlinien erzeugt werden, deren eine Kante scharf ist und sich geometrisch definieren läßt, weshalb eine Erhöhung der Meßgenauigkeit gegenüber der bisherigen Methode ermöglicht wird.

2. Es wurde gezeigt, daß die Schärfe und Lage der Linienkante unabhängig sind von der *Spaltbreite* und der *Eindringungstiefe* der Strahlung.

3. Es wurde mittels Aufnahmen nach der beschriebenen Methode die Raumgitter von Th, Ni und Mg ermittelt. Als Resultat ergab sich, daß Th und Ni flächenzentrische kubische Gitter besitzen. Mg ist aus zwei ineinander geschalteten einfachen hexagonalen Gittern aufgebaut.

Hrn. Professor Dr. F. Krüger bin ich für das große Interesse, das er für meine Arbeit gezeigt hat und für das bereitwilligste Zurverfügungstellen aller notwendigen Hilfsmittel zu großem Dank verpflichtet.

Ebenfalls möchte ich Hrn. Dr. Freiherrn von der Osten-Sacken für manche wertvolle Ratschläge danken.

Für die Arbeit standen auch Mittel der Jagorstiftung zur Verfügung, wofür auch hier der beste Dank ausgesprochen sei.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

2. *Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?*[1])

von P. Ehrenfest.

„Warum hat unser Raum gerade drei Dimensionen?[1]) oder anders gefragt: „Welche *singulären*[2]) Vorkommnisse unterscheiden die Physik des R_3 vor der in den übrigen R_n?" — So gestellt, sind die Fragen vielleicht sinnlos, jedenfalls fordern sie zur Kritik heraus. Denn „ist" der Raum?, „ist" er dreidimensional? Und vollends die Frage nach dem „warum". Auch: was muß man unter „der" Physik des R_4 oder R_7 verstehen?

Ich werde nicht versuchen, diesen Fragen eine minder anstößige Form zu geben. Glückt es, nur erst mehr und mehr singuläre Eigenschaften des R_3 aufzufinden, dann wird schließlich von selber deutlich werden, welche „vernünftige" Frage sich zu der gefundenen Antwort konstruieren läßt.

§ 1. Schwerkraft und Planetenbewegung.

Was die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper betrifft, so kann man feststellen, daß ein charakteristischer Unterschied zwischen R_3 und R_2 einerseits und allen höheren R_n anderseits besteht, was die Stabilität der Kreisbahn be-

1) Auszug aus der gleichnamigen Abhandlung in Versl. d. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam **26**. S. 105. 1917 (Sitzung v. 26. V. 1917) = Proceedings **20**. S. 200. — Die interessante Bemerkung, die H. Weyl kürzlich über die Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt gemacht hat (Gravitation u. Elektrizität. Sitzungsber. preuß. Ak. **26**. S. 474 oben. 1918; Neue Erweiterung der Relativtheorie. Ann. d. Phys. **59**. S. 133 Mitte. 1919), veranlaßt mich, hier noch einmal meine Bemerkungen zusammenzustellen, obwohl ich mir dessen bewußt bin, daß sie sehr elementar sind und einzeln genommen den meisten gut bekannt sein dürften. Aber ich hoffe eben, daß vielleicht andere dann einen Anlaß finden werden, reicheres und besseres Material zu dieser faszinierenden Frage vorzulegen.

2) Vgl. hierzu „Schlußbemerkung 1".

trifft. Während im R_3 die Bewegung bei einer Störung im Endlichen bleibt, wenn die Energie nicht zu groß ist und dies im R_2 sogar für jeden beliebigen endlichen Betrag der Energie der Fall ist, sind *im R_4, R_5, R_6 usw. die Kreisbahnen zwar natürlich auch noch möglich, aber bei jeder noch so kleinen Störung läuft der Planet längs einer Spirale in den Zentralkörper oder ins Unendlichferne.*

Das Anziehungsgesetz im R_n setzen wir $\varkappa \frac{Mm}{r^{n-1}}$; dazu gehört für $n > 2$ eine potentielle Energie:

$$(1) \qquad V(r) = -\varkappa \frac{Mm}{(n-2)r^{n-2}}.$$

Dies entspricht natürlich der Annahme:

a) daß die Kraft nach dem Zentrum gerichtet und nur Funktion von r ist;

b) daß auch im R_n für die Schwerkraft das Theorem von Gauss über die Kraftlinienströmung gelten soll.

Man erhält so die Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x_h}{dt^2} = -\varkappa \frac{Mm}{r^{n-1}}\frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \ldots n).$$

Die Bahn ist eben. Einführung von Polarkoordinaten r, φ gibt für Energie und Flächensatz:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) = E, \qquad mr^2\dot\varphi = \Theta.$$

Elimination von $\dot\varphi$ gibt:

$$(2) \qquad \dot r = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V}{m} - \frac{\Theta^2}{m^2r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2},$$

wo A, B, C Konstanten sind, von denen die erste und letzte von den Beginndaten der Bewegung abhängt, insofern sie die Totalenergie E und die Konstante des Flächensatzes Θ enthalten. Damit r bei der Bewegung zwischen zwei positiven Werten hin und her pendle, ist nötig, daß $\dot r$ reell ist und abwechselnd positive und negative Werte annimmt, also muß die Größe unter der Wurzel positiv sein zwischen zwei Werten von r, für die sie Null ist. Die Diskussion der Fälle, worin das vorkommt, läßt sich leicht geometrisch geben, indem man die Kurven $y = Ar^2$ und $y = Br^{4-n}$ zeichnet, hieraus die Summenkurve skizziert und nachsieht, wie sie von $y = c^2$

geschnitten wird.[1]) Entsprechend läßt sich auch der Fall $n = 2$ behandeln, wo (1) ersetzt werden muß durch:

$$V = \varkappa M m \lg r, \tag{1'}$$

also (2) durch

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\alpha r^2 - \beta r^2 \lg r - \gamma^2}, \tag{2'}$$

wo

$$\alpha = \frac{2E}{m}, \qquad \beta = 2\varkappa M, \qquad \gamma^2 = \frac{\mathfrak{G}^2}{m^2}.$$

Das Resultat der Diskussion ist:

n	Kreisbahnen	Bewegungen zwischen zwei positiven Werten von r	Bewegung nach Unendlich
4, 5 ...	instabil	unmöglich!	möglich
3	stabil	möglich [geschlossene Bahn]	möglich
2	stabil	möglich [ungeschlossene Bahn]	unmöglich!

Bemerkungen:

1. Es sei bei dieser Gelegenheit an das Theorem von J. Bertrand (1873) erinnert[2]): Die Bahnen eines materiellen Punktes, beschrieben unter Einfluß einer Zentralkraft, die nur Funktion des Abstandes ist, sind nur dann geschlossen, wenn die Kraft entweder proportional mit dem Abstand oder umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes ist.

2. Bemerkenswert ist, daß die Planetenbewegungen die den elliptischen entsprechen, auch im *nichteuklidischen* R_3 geschlossen sind, falls man nur die Gleichungen der Mechanik und das Anziehungsgesetz zugleich diesem Raum anpaßt.[3])

3. Man wird sich natürlich auch fragen, was aus dem Bohrschen *Atommodell* wird im R_n für $n \neq 3$. Modifiziert man das Gesetz der elektrischen Anziehung so wie das der

1) Vgl. die Figuren in Koninkl. Akad. van Wetensch. Amsterdam a. a. O. „Aanhangsel I".

2) J. Bertrand, C. R. 77. S. 846. 1873.

3) H. Liebmann, Nichteukl. Geometrie (Samml. Schubert. 2. Aufl. 1912. S. 207).

Schwere und behält: a) die Quantisierung des Flächenmoments, b) den Ansatz $\nu = \frac{E' - E}{h}$ bei, so sieht man alsbald, wie scharf *das Bohrsche Modell gerade auf den R_3 paßt*: Für $n = 4$ erhält man eine ganz arge Degeneration.[1]) Für $n = 2$ erhält man Spektralserien mit Häufungsstelle im Unendlichen, weil ja im R_2 unendlich viel Energie nötig ist, um das Elektron ins Unendliche zu werfen. Für $n > 4$ sind vor allem natürlich höchstens die Kreisbahnen zu brauchen. Im Gegensatz zum R_3 liegen hier die Bahnen wachsender Quantenzahl stets dichter und dichter beim Kern, und damit im Zusammenhang haben auch hier wieder die Spektralserien ihre Häufungsstellen im Unendlichen.[2])

§ 2. Dualität zwischen elektrischem und magnetischem Feld im R_n.

Im R_n wird das elektrische Feld durch n-Komponenten bestimmt, das magnetische Feld durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Kennzahlen. Nur für $n = 3$ fallen diese beiden Anzahlen zusammen und besteht also die weitgehende Dualität zwischen den beiden Feldern.

In der Tat seien $x_2 \ldots x_n$ und $x_0 = ict$ die $n+1$ Koordinaten der Raum-Zeit-Welt und $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ die Komponenten des retardierten Potentials (entsprechend dem Viererpotential in der zum R_3 gehörigen Relativitätstheorie), so entsprechen die $\frac{n(n-1)}{2}$-Komponenten der Rotation:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \qquad (h, k = 1, \ldots n)$$

dem *magnetischen* Feld und die n-Komponenten:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \ldots n)$$

dem elektrischen Feld.

Analoges ist bekanntlich zu sagen betreffs Translations-Rotationsgeschwindigkeit, Kraft-Drehmoment.

§ 3. Die Wellenausbreitung im R_n.

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2} = 0$$

1) a. a. O., „Aanhangsel II".
2) a. a. O., Ebenda.

haben im ξ für $n = 3$ folgende Eigenschaft: Hat man im Moment $t = 0$ überall $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ außer in einem kleinen Gebiet γ, dann ist in jedem späteren Moment t (wenn nur nicht zu klein genommen wird) noch überall $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ außer in einer dünnen Schale zwischen zwei Oberflächen (vgl. Figur), die — falls γ klein genug ist, angenähert zwei konzentrische Kugeln sind um γ.

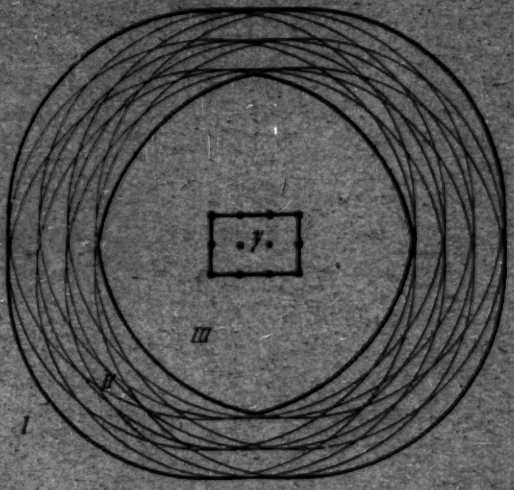


Fig. 1.

Im R_2 ist es bekanntlich[1]) anders: Bei der Wellenausbreitung auf einer Membran hat man außer einer Störung in dem Ring, der II entspricht, auch noch eine (schwächere) Störung im ganzen inneren Gebiet III.

Alle R_{2n+1} verhalten sich in dieser Beziehung wie der R_3, alle R_{2n} analog wie der R_2 (in dieser letzteren kann man also nicht das Prinzip von Huygens anwenden).[2-3]) Aber unter

1) Vgl. z. B. Rayleigh, Theory of sound Ch. XIV. § 275.

2) Vgl. Duhem, Hydrodynamique T. I. Paris, Hermann Volterra, Acta Math. 1894; Hadamard, Bull. soc. franç. de phys. 1906 (dort andere Literatur, auch die älteren Arbeiten von Hadamard); Acta math. 31. S. 333. 1908; Leç. sur la propag. des Ondes (Paris Hermann 1903) Chap VII § 3.

3) Diese Tatsache steht rechnerisch in Beziehung zu der folgenden Tatsache: Die Formel für das Volumen einer Kugel im R_p enthält für

den R_{2n+1} zeichnet sich R_3 durch eine Eigenartigkeit aus, die evident wird, wenn man das retardierte Potential berechnet[1]), d. h. das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_s^2} = \varrho .$$

Für R_3 erhält man:

$$\varphi = \frac{1}{c_2}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \,\frac{[\varrho]}{r} .$$

Für R_5:

$$\varphi = \frac{1}{3c_5}\int\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{\frac{[\varrho]}{r^3} + \frac{\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right]}{r^2}\right\} .$$

Für R_7:

$$\varphi = \frac{1}{5c_7}\int\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{\frac{[\varrho]}{r^5} + \frac{1}{c}\,\frac{\left[\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right]}{r^4} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\left[\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}\right]}{r^3}\right\} .$$

Hierin sind:

$$c_3 = 4\pi, \quad c_5 = \frac{8}{3}\pi^2, \quad c_7 = \frac{11}{15}\pi^3$$

die Oberflächen der Einheitskugel im R_3, R_5, R_7 und die Symbole

$$[\varrho], \quad \left[\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right], \quad \left[\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}\right]$$

bedeuten, daß man die Werte zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ (die „retardierten" Werte) nehmen muß. Man sieht: *im Gegensatz zu R_3 werden im R_5 und R_7 usw. die retardierten Potentiale nicht nur durch ϱ, sondern auch noch durch dessen Differentialquotienten nach der Zeit bestimmt.* Dabei ist noch zu bemerken, daß für große Werte von r, also bei der eigentlichen Aus-

---

$p = 2n$ und $p = 2n + 1$ die Zahl π in *derselben* Potenz n. Die analytische Beziehung zwischen beiden Tatsachen tritt in Evidenz, wenn man die Wellengleichung z. B. mit Hilfe von Fourierintegralen integriert. Man stößt dann schließlich auf ein Integral über die $(p-1)$te Potenz von einem Quadratwurzelausdruck. Der Integrand wird also rational, wenn $p = 2n + 1$, irrational, wenn $p = 2n$. Das gleiche findet statt bei Berechnung des Kugelvolumens.

1) Vgl. a. a. O., Anhangsel IV, eine einfache Ableitung der Lösungen für die R_{2n+1}.

strahlung, es jeweils gerade auf den höchsten Differentialquotient von ϱ ankommt, weil er durch die kleinste Potenz von r dividiert ist. Ein „Elektron" mit scharf begrenzter Ladung würde also im R_5, R_7 ... durch seine Bewegung Felder mit hohen Singularitäten ausstrahlen!

Schlußbemerkungen: 1. Wir haben hier nur solche Beziehungen betrachtet, bei denen der R_3 eine *singuläre* Stellung gegenüber den anderen R_n einnimmt. Darüber hinaus ist es natürlich oft sehr instruktiv, sich deutlich zu machen, wie an so vielen Punkten der Physik die Dreizahl der Dimensionen eingreift, ohne daß bei Übergang auf den R_n der R_3 gerade singuläres Verhalten zeigt: z. B. sind die *4* im Strahlungsgesetz von Stefan Boltzmann und die *3* im Verschiebungsgesetz von W. Wien: $\varrho = \nu^3 f(\nu/T)$ im R_n durch $(n+1)$ und n zu ersetzen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen einatomiger Gase $c_p/c_v = 1^2/_3$ durch $1 + 2/n$ usw.

2. Man wird so veranlaßt, bei jeder in der Physik auftretenden, von den Maßeinheiten unabhängigen universellen Konstanten *versuchsweise* nach einem Zusammenhang mit der Dreidimensionalität des Raumes zu fragen (oder der Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt). Man denke z. B. an die Rolle der Zahl 8 (und 10?) im periodischen System der chemischen Elemente [vgl. Borns „kubisches Atommodell"[1])]; den Exponenten 2 in der Formel von Balmer.

3. Aber es greift noch eine andere ganze Zahl in jeden Winkel der Physik ein: *der Exponent „zwei" des Theorems von Pythagoras.* Oder anders ausgedrückt: die homogen *quadratische* Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_h \sum_k g_{hk}\, dx_h\, dx_k$$

hat eine überherrschende Bedeutung gegenüber allen anderen homogenen Formen. — Läßt sich an diesem *zwei* nichts mehr fragen und begreifen?

Leiden, August 1919.

1) Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **20**. S. 230. 1918.

(Eingegangen 31. August 1919.)

3. *Das Verhalten Hertzscher Gitter; von R. Gans.*

J. J. Thomson[1]) und H. Lamb[2]) haben sich mit der Theorie Hertzscher Gitter beschäftigt, und G. H. Thomson[3]) und Schaefer und Laugwitz[4]) konnten durch ihre Beobachtungen beweisen, daß die Thomsonsche Theorie im Widerspruch mit der Erfahrung ist, während die Lambsche befriedigend den Tatsachen gerecht wird.

Eine Annahme bei den mathematischen Berechnungen war die gewesen, daß die Leitfähigkeit der Gitterdrähte unendlich groß sei, was berechtigt ist, wenn die Drähte z. B. aus Kupfer sind und einen nicht zu kleinen Radius haben.

Um den Materialeinfluß zu erforschen, haben Schaefer und Laugwitz[5]) Gitter aus sehr feinen Drähten (von 0,0125 mm Durchmesser) konstruiert, deren Leitfähigkeit durch geeignete Auswahl des Materials innerhalb weiter Grenzen variierte, und haben das Reflektionsvermögen und die Durchlässigkeit für Hertzsche Wellen gemessen, konnten aber ihre experimentellen Resultate nicht mit der Theorie vergleichen, weil es noch keine Theorie des Verhaltens Hertzscher Gitter von endlicher Leitfähigkeit gab.

Beim Studium verschiedener Methoden zur Messung der magnetischen Permeabilität ferromagnetischer Körper für sehr schnelle Schwingungen habe ich mich auch mit der Gittertheorie beschäftigt und gelegentlich das Reflektions- und Absorptionsvermögen sowie die Durchlässigkeit der von Schaefer und Laugwitz benutzten Gitter numerisch berechnet.

---

1) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. S. 425.

2) H. Lamb, Proceedings of the London Math. Soc. **29.** S. 523. 1898.

3) G. H. Thomson, Straßburger Dissert. u. Ann. d. Phys. **22.** S. 365. 1907.

4) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **21.** S. 587. 1906.

5) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **23.** S. 951. 1907.

Diese Ergebnisse sollen im Folgenden mitgeteilt werden. Leider standen mir die Arbeiten von J. J. Thomson und von Lamb nicht zur Verfügung. Deshalb mußte ich die Lambschen Formeln, die sich auf Drähte von unendlicher Leitfähigkeit beziehen, und die die Grundlage unserer Überlegungen bilden werden, von neuem ableiten. Hierbei kam mir die Lambsche Theorie[1]) der Ausbreitung akustischer Wellen durch Gitter wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem elektromagnetischen Problem zustatten.

Nach Beendigung der vorliegenden Arbeit fand ich, daß Schaefer und Reiche[2]) sich auch mit Gittertheorie beschäftigt haben, aber sie beschränken sich auf den Fall, daß die Gitterkonstante groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, während für das Studium Hertzscher Wellen gerade der entgegengesetzte Fall von Interesse ist.

Außerdem behandelt von Ignatowsky[3]) die Theorie der Gitterbeugung, und zwar in sehr allgemeiner Weise. Deshalb sind seine Ableitungen naturgemäß wesentlich komplizierter als unsere, nach anderer Methode gefundenen.

Bei der Anwendung seiner Formeln auf *elektrische* Wellen (a. a. O., S. 480) begeht er das Versehen, die von uns in dieser Abhandlung eingeführte Größe

$$-\Delta = \frac{2a}{\lambda} \ln \frac{a}{2\pi b}$$

gegen Eins zu vernachlässigen, während er die unendlich kleine Größe

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda}$$

beibehält, so daß seine Gleichung (27) unrichtig wird, welche gerade für uns in Betracht kommt.

§ 1. Unendlich gut leitende Gitter.

Erster Fall: Die elektrische Schwingung ist parallel den Drähten.

Eine ebene elektromagnetische Welle komme aus der Richtung $x = +\infty$ und pflanze sich in der Richtung der negative x fort. In der yz-Ebene befinde sich ein Gitter von

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik; Deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907. S. 630.

2) Cl. Schaefer u. Fr. Reiche, Ann. d. Phys. 35. S. 817. 1911.

3) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 44. S. 369. 1914.

äquidistanten metallischen Drähten vom Radius b, deren Achsen die Richtung der z-Achse haben. Der Abstand zweier aufeinander folgender Drähte (Gitterkonstante) sei a.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß der Radius b klein gegen den Abstand a sei und a wiederum klein im Vergleich zur Wellenlänge λ.

Nach der elektromagnetischen Theorie gehorcht die z-Komponente des elektrischen Vektors, die einzige, welche existiert, wenn die elektrischen Schwingungen den Gitterdrähten parallel sind, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_z, \tag{1}$$

die sich in

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{2}$$

transformiert unter der Annahme, daß n die Schwingungszahl sei, so daß

$$E_z = U e^{2\pi i n t}, \tag{3}$$

und wenn zur Abkürzung

$$k = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{4}$$

gesetzt wird, unter c die Lichtgeschwindigkeit, unter λ die Wellenlänge verstanden.

Für $x = +\infty$ muß U nach (1), (3) und (4) die Form haben

$$U = e^{ikx} + A e^{-ikx}; \tag{5}$$

in dieser Gleichung stellt das erste Glied rechts die einfallende, das zweite die reflektierte Welle dar.

Für $x = -\infty$ muß U der Gleichung

$$U = B e^{ikx} \tag{6}$$

gehorchen, welche die durch das Gitter gedrungene Welle repräsentiert.

Uns werden besonders das Reflektionsvermögen $|A|^2$ und die Durchlässigkeit $|B|^2$ interessieren.

Da die Leitfähigkeit der Drähte in diesem Paragraphen als unendlich angenommen wird, so kann die elektrische Schwingung nicht ins Metall eindringen; deshalb gilt aus Stetigkeitsgründen an der Oberfläche der Drähte

$$U = 0, \tag{7}$$

Wir können den Raum durch zwei dem Gitter parallele Ebenen in drei Teile zerlegen (vgl. die Figur), und zwar so, daß OL und OM groß gegen die Gitterkonstante a aber klein gegen die Wellenlänge λ sind.

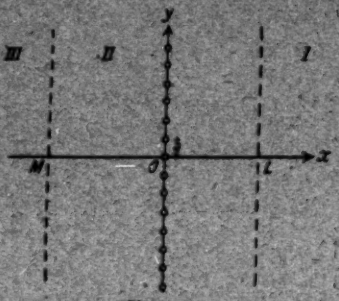


Fig. 1.

Dann gilt Gleichung (5) in I und hat in der Nähe der Trennungsebene der beiden Räume I und II den genäherten Wert

$$U = 1 + A + ikx(1 - A), \tag{8}$$

weil kx dort eine kleine Größe ist.

Im Raume III gilt (6), und in der Nähe der Trennungsebene der Räume II und III haben wir näherungsweise

$$U = B(1 + ikx). \tag{9}$$

Im Raume II lautet die Differentialgleichung für U

$$\Delta U = 0,$$

da k sehr klein ist, und da aus Symmetriegründen U von z unabhängig ist, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{10}$$

Es handelt sich also darum, ein Integral dieser Gleichung zu suchen, welches auf den Oberflächen der Drähte der Bedingung (7) genügt, das für $x = +\infty$ in (8), für $x = -\infty$ in (9) übergeht.

Die Funktionen

$$\varphi_1 = x - \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \tag{11}$$

und

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \tag{12}$$

sind nach den Prinzipien der Funktionentheorie als reelle Teile von

$$x + yi - \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{ctgh} \frac{\pi(x + yi)}{a} \quad \text{bzw.} \quad \log \sinh \frac{\pi(x + yi)}{a}$$

partikulare Integrale von (10).

Für sehr kleine Werte von x und y nehmen φ_1 und φ_2 die Werte an

$$\begin{cases} \varphi_1 = x\left(1 - \dfrac{b^2}{x^2+y^2}\right), \\ \varphi_2 = \log\dfrac{\pi}{a}\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases} \tag{13}$$

so daß auf der Oberfläche des Drahtes $x^2 + y^2 = b^2$

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \log\frac{\pi b}{a}, \tag{14}$$

und diese Werte gelten wegen der Periodizität der Funktionen bezüglich y auch auf den Oberflächen der übrigen Drähte.

Für $x = +\infty$ gilt

$$\begin{cases} \varphi_1 = x - l, \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi x}{a} - \log 2 \\ \text{und für } x = -\infty \\ \varphi_1 = x + l, \\ \varphi_2 = -\dfrac{\pi x}{a} - \log 2, \end{cases} \tag{15}$$

wenn

$$l = \pi\frac{b^2}{a} \tag{16}$$

bedeutet.

Wir wollen probieren, ob wir den Bedingungen (7), (8) und (9) durch den Ansatz

$$U = \alpha\varphi_1 + \beta + \gamma\varphi_2 \tag{17}$$

genügen können, indem wir die Konstanten α, β, γ zweckmäßig bestimmen.

Nach (7) und (14) erhalten wir

$$\beta + \gamma\log\frac{\pi b}{a} = 0, \tag{18}$$

so daß sich (17) in

$$U = \alpha\varphi_1 + \beta - \frac{\beta}{\log\dfrac{\pi b}{a}}\varphi_2 \tag{19}$$

verwandelt.

Nach (19), (8) und (9) muß gelten

$$(20)\quad \begin{cases} 1 + A + ikl(1-A)x = \alpha(x-l) + \beta - \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a}}\left(\dfrac{\pi x}{a} - \log 2\right), \\ B + ikBx \qquad\quad = \alpha(x+l) + \beta + \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a}}\left(\dfrac{\pi x}{a} + \log 2\right). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind in Wirklichkeit vier, da sie für jeden Wert von x gelten müssen, und erlauben so, die vier Konstanten A, B, α, β zu berechnen.

Es ergibt sich

$$(21)\qquad B - A = \frac{1+ikl}{1-ikl},$$

$$(22)\qquad B + A = \frac{iA+1}{iA-1},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$(23)\qquad A = -\frac{ka}{\pi}\log\frac{a}{2\pi b}.$$

Unsere Annahme über die Größenordnung von b, a und λ zeigen, daß

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda}$$

eine unendlich kleine Zahl ist, so daß (21) sich in

$$(21')\qquad B - A = 1$$

verwandelt, und aus (21') und (22) folgt

$$(24)\qquad A = \frac{1}{iA-1};\quad B = \frac{iA}{iA-1}.$$

Diese Konstanten geben die Amplituden und Phasen der reflektierten und durchgehenden Welle.

$$|A|^2 = \frac{1}{1+A^2} \quad \text{und} \quad |B|^2 = \frac{A^2}{1+A^2}$$

stellen das Reflektionsvermögen und die Durchlässigkeit des Gitters dar. Ihre Summe ist gleich Eins wegen der vollkommenen Leitfähigkeit der Drähte, d. h. weil das Absorptionsvermögen gleich Null ist.

Diese Resultate sind mit denen von Lamb identisch, wie ich aus einem Zitat in der erwähnten Arbeit von G. H. Thomson entnehmen kann.

§ 2. **Zweiter Fall: Die elektrische Schwingung ist senkrecht zu den Drähten.**

In diesem Falle ist der magnetische Vektor H parallel zur z-Achse und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = c^2 \Delta H_z, \tag{25}$$

die sich in

$$\Delta V + k^2 V = 0 \tag{26}$$

verwandelt, wenn man setzt

$$H_z = e^{2\pi i n t} V. \tag{27}$$

Führt man Zylinderkoordinaten r, ϑ, z ein, deren Ursprung eine Drahtachse ist, so sind H_z und E_ϑ nach den Maxwellschen Gleichungen verknüpft durch die Beziehung

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t}, \tag{28}$$

und da die Tangentialkomponente von E an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters verschwinden muß, so erhält man mit Rücksicht auf (27) auf den Drahtoberflächen

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{29}$$

Das Problem ist genau identisch mit dem von Lamb[1]) behandelten akustischen Problem.

Die Funktion

$$\varphi_2 = x + \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \tag{30}$$

genügt als reeler Teil von

$$x + yi + \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{ctgh} \frac{\pi(x + yi)}{a} \text{ der Gleichung } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

hat für kleine x und y den Wert

$$\varphi_2 = x\left(1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2}\right) = \cos\vartheta \left(r + \frac{b^2}{r}\right), \tag{31}$$

gibt also

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \cos\vartheta \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \tag{32}$$

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 630.

so daß

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0$$

auf den Drahtoberflächen.

Für $x = +\infty$ ist $\varphi_3 = x + l$,
$x = -\infty$ ist $\varphi_3 = x - l$.

Versuchsweise setzen wir an

$$V = \alpha' \varphi_3 + \beta', \tag{33}$$

und bestimmen die willkürlichen Konstanten α' und β' durch die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen der Räume I und II bzw. II und III mittels der Gleichungen

$$\begin{cases} \alpha'(x+l) + \beta' = 1 + A' + ik(1 - A')x, \\ \alpha'(x-l) + \beta' = \quad B' + ikB'x, \end{cases} \tag{34}$$

indem wir annehmen, daß

$$\begin{cases} \text{im Raume I:} & V = e^{ikx} + A'e^{-ikx}, \\ \text{und im Raume III:} & V = B'e^{ikx} \end{cases} \tag{35}$$

gilt.

Durch Elimination von α' und β' erhält man

$$A' = \frac{ikl}{1+ikl}; \quad B' = \frac{1}{1+ikl}, \tag{36}$$

oder

$$|A'|^2 = \frac{k^2l^2}{1+k^2l^2}; \quad |B'|^2 = \frac{1}{1+k^2l^2}. \tag{37}$$

Das Reflektionsvermögen ist in diesem Falle fast Null wegen des äußerst kleinen Wertes von

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda},$$

während die Durchlässigkeit fast Eins ist, wie Hertz das bereits experimentell festgestellt hat.

§ 8. Gitter von endlicher Leitfähigkeit.

Erster Fall: Die elektrische Schwingung ist parallel den Drähten.

Die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{cases} \text{rot } H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\sigma E, \\ -\text{rot } E = \mu \frac{\partial H}{\partial t}, \end{cases} \tag{38}$$

erlauben die Elimination des Vektors H und geben zur Bestimmung von

(39) $$E_z = U e^{2\pi i n t}$$

die Gleichung

(40) $$\Delta U + k^2 U = 0,$$

in der

(41) $$k^2 = 4\pi^2 n^2 \varepsilon \mu - 8\pi^2 \mu \sigma n i$$

bedeutet, unter ε die Dielektrizitätskonstante, unter μ die Permeabilität und unter σ die Leitfähigkeit verstanden. Alle diese Werte seien in elektromagnetischem Maße gemessen.

Für Luft geben wir allen Konstanten den Index 0 und haben somit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}; \quad \mu_0 = 1; \quad \sigma_0 = 0$$

und somit

(42) $$k_0 = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

während im Metall der Gitterdrähte, in denen εn neben σ zu vernachlässigen ist,

(43) $$k = \sqrt{-8\pi^2 \mu \sigma n i}$$

gilt.

Da U von der Koordinate z unabhängig ist, können wir das Integral von (40) für das Drahtinnere in folgender Form schreiben

(44) $$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu J_\nu (k r) \cos \nu \vartheta.$$

In dieser Gleichung bedeuten r, ϑ Polarkoordinaten in einer zu der des Gitters senkrechten Ebene, deren Pol der Schnittpunkt der Drahtachse mit jener Ebene ist, J_ν die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung ν, während die C_ν Konstanten sind.

Im Außenraum der Drähte, soweit derselbe zum Raume II gehört, wollen wir das Integral U als lineare Kombination der schon früher benutzten [vgl. (11), (12) und (30)] drei Funktionen

$$(45)\quad \begin{cases} \varphi_1 = x - \dfrac{\pi b^2}{a} \dfrac{\sinh \dfrac{2\pi x}{a}}{\cosh \dfrac{2\pi x}{a} - \cos \dfrac{2\pi y}{a}}, \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \left(\cosh \dfrac{2\pi x}{a} - \cos \dfrac{2\pi y}{a} \right), \\ \varphi_3 = x + \dfrac{\pi b^2}{a} \dfrac{\sinh \dfrac{2\pi x}{a}}{\cosh \dfrac{2\pi x}{a} - \cos \dfrac{2\pi y}{a}}, \end{cases}$$

darzustellen suchen, die für kleine $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Werte annehmen

$$(46)\quad \begin{cases} \varphi_1 = x \left(1 - \dfrac{b^2}{r^2}\right) = \cos\vartheta \left(r - \dfrac{b^2}{r}\right), \\ \varphi_2 = \log \dfrac{\pi r}{a}, \\ \varphi_3 = x \left(1 + \dfrac{b^2}{r^2}\right) = \cos\vartheta \left(r + \dfrac{b^2}{r}\right), \end{cases}$$

so daß für $r = b$

$$(47)\quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 2\cos\vartheta, \\ \varphi_2 = \log \dfrac{\pi b}{a}, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \dfrac{1}{b}, \\ \varphi_3 = 2b\cos\vartheta, & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0. \end{cases}$$

Ferner haben wir

$$(48)\quad \begin{cases} \text{für } x = +\infty \ \varphi_1 = x - l, & \text{für } x = -\infty \ \varphi_1 = x + l, \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi x}{a} - \log 2, & \varphi_2 = -\dfrac{\pi x}{a} - \log 2, \\ \varphi_3 = x + l, & \varphi_3 = x - l. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen drücken die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von E und H beim Durchgang durch die Drahtoberfläche aus.

Bezeichnen wir den Wert von U im Drahtinnern mit U_i, im Außenraum mit U_a, so stellt sich die Stetigkeit von E [vgl. (39)] in der folgenden Weise dar.

Für $r = b$:

$$U_i = U_a. \tag{49}$$

Ferner gilt nach der zweiten Gleichung (38)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial H_\vartheta}{\partial t},$$

also ist die Stetigkeit von H gewährleistet durch die Beziehung

$$\text{für } r = b: \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{\partial U_a}{\partial r}. \tag{50}$$

Gemäß unserer Annahme, daß U_a eine lineare Funktion von φ_1, φ_2 und φ_3 ist, können wir schreiben

$$U_a = \alpha\varphi_1 + \beta + \gamma\varphi_2 + \delta\varphi_3 \tag{51}$$

und erhalten mittels (47), (49), (44) und (51)

$$\beta + \gamma\log\frac{\pi b}{a} + \delta 2b\cos\vartheta = C_0 J_0(kb) + C_1 J_1(kb)\cos\vartheta \tag{52}$$

und mittels (47), (50), (44) und (51)

$$2\alpha\cos\vartheta + \frac{\gamma}{b} = \frac{kC_0}{\mu}J_0'(kb) + \frac{kC_1}{\mu}J_1'(kb)\cos\vartheta; \tag{53}$$

denn aus der Form der Gleichungen (46), in denen nur $\cos\vartheta$, und nicht $\cos 2\vartheta$, $\cos 3\vartheta$ usw. vorkommen, erkennen wir, daß wir uns auf die ersten beiden Glieder der Reihe (44) beschränken können.

Da (52) und (53) für jeden beliebigen Wert von ϑ gelten, so zerfallen dieselben in folgende vier Beziehungen:

$$\begin{cases} \beta + \gamma\log\dfrac{\pi b}{a} = C_0 J_0(kb), & 2b\delta = C_1 J_1(kb), \\ \gamma = \dfrac{kb}{\mu}C_0 J_0'(kb), & 2b\alpha = \dfrac{kb}{\mu}C_1 J_1'(kb). \end{cases} \tag{54}$$

Elimination von C_0 und C_1 ergibt

$$\frac{\beta + \gamma\log\dfrac{\pi b}{a}}{\gamma} = \frac{\mu}{kb}\frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)} = \tau_0; \quad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\mu}{kb}\frac{J_1(kb)}{J_1'(kb)} = \tau_1, \tag{55}$$

wenn man die Abkürzungen einführt

$$\frac{\mu}{kb}\frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)} = \tau_0; \qquad \frac{\mu}{kb}\frac{J_1(kb)}{J_1'(kb)} = \tau_1. \tag{56}$$

Aus den Gleichungen (55) folgt

$$\gamma = -\frac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \quad \delta = \alpha\tau_1, \tag{57}$$

so daß (51) in

$$U_a = \alpha\varphi_1 + \beta - \frac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\varphi_2 + \alpha\tau_1\varphi_2 \tag{58}$$

übergeht.

Die Bedingungen im Unendlichen ergeben mit Berücksichtigung von (48), (58), (8) und (9)

$$\begin{cases} \alpha(x-l) + \beta - \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\left(\dfrac{\pi x}{a} - \log 2\right) + \alpha\tau_1(x+l) \\ \qquad = 1 + A + ik_0 x(1-A), \\ \alpha(x+l) + \beta + \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\left(\dfrac{\pi x}{a} + \log 2\right) + \alpha\tau_1(x-l) \\ \qquad = B + ik_0 xB. \end{cases} \tag{59}$$

Da diese Gleichungen für jeden beliebigen Wert von x gelten, so zerfallen sie in die folgenden

$$\begin{cases} 1 + A = -\alpha l(1-\tau_1) + \beta + \beta\dfrac{\log 2}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \\ ik_0(1-A) = \alpha(1+\tau_1) - \dfrac{\beta\frac{\pi}{a}}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \\ B = \alpha l(1-\tau_1) + \beta + \beta\dfrac{\log 2}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}; \\ ik_0 B = \alpha(1+\tau_1) + \dfrac{\beta\frac{\pi}{a}}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}, \end{cases} \tag{60}$$

aus welchen

$$B - A - 1 = 2\alpha l(1-\tau_1) \qquad B + A + 1 = 2\beta\frac{\log\frac{2\pi b}{a} - \tau_0}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0},$$

und

$$ik_0 l(B - A + 1) = 2\alpha l(1+\tau_1) \qquad ik_0(B + A - 1) = \frac{2\beta\frac{\pi}{a}}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0},$$

d. h.

$$\frac{B-A-1}{B-A+1} = \frac{1-r_1}{1+r_1} i k_0 l \quad \text{und} \quad \frac{B+A+1}{B+A-1} = -\left(\log\frac{a}{2\pi b} + \tau_0\right)\frac{a k_0}{\pi} i = \Delta i$$

folgt.

Bedenken wir, daß $k_0 l$ äußerst klein ist, so haben wir

$$B - A = 1$$

und außerdem

$$B + A = \frac{\Delta i + 1}{\Delta i - 1},$$

so daß

$$A = \frac{1}{\Delta i - 1}; \qquad B = \frac{\Delta i}{\Delta i - 1}, \tag{61}$$

wird, unter Δ

$$\Delta = -\frac{2a}{\lambda}\left(\log\frac{a}{2\pi b} + \tau_0\right) \tag{62}$$

verstanden.

Das Reflektionsvermögen $|A|^2$ und die Durchlässigkeit $|B|^2$ ergeben sich, wenn wir

$$\Delta = -u + v i \tag{63}$$

setzen, so daß

$$A = -\frac{1+v-ui}{u^2+(1+v)^2}; \quad B = \frac{v(v+1)+u^2+ui}{u^2+(1+v)^2},$$

also

$$|A|^2 = \frac{1}{u^2+(1+v)^2}; \quad |B|^2 = \frac{u^2+v^2}{u^2+(1+v)^2} \tag{64}$$

und das Absorptionsvermögen

$$1 - |A|^2 - |B|^2 = \frac{2v}{u^2+(1+v)^2} \tag{65}$$

wird.

Bestimmung der Funktion τ_0.

Wie man aus der Formel (62) ersieht, reduziert sich das Problem auf die Berechnung der Funktion τ_0, welche durch die Gleichung (56) definiert ist.

Zur Diskussion der Beobachtungen von Schaefer und Laugwitz interessiert uns nur der Fall $\mu = 1$, da sie nicht mit ferromagnetischen Materialien operiert haben.

Also wird

$$r_0 = \frac{1}{kb} \frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)}, \tag{66}$$

wo kb nach (43) den Wert hat

$$kb = \sqrt{8\pi^2 \sigma n b^2} \sqrt{-i} = q\sqrt{-i}. \tag{67}$$

Nun ist die Funktion

$$\Omega = -\frac{q\sqrt{-i}}{2} \frac{J_0(q\sqrt{-i})}{J_0'(q\sqrt{-i})} = \Omega_1 + i\Omega_2 \tag{68}$$

in seiner Abhängigkeit von q bekannt, denn Ω stellt eine Kombination des Widerstandes r und der inneren Selbstinduktion L eines Drahtes für Wechselstrom dar. Es ist nämlich

$$\Omega = \frac{r}{r_0} + 2\pi n i \frac{L}{r},$$

worin r_0 den Widerstand für Gleichstrom bedeutet.

Diese Funktion findet sich in verschiedenen Veröffentlichungen[1]) in Reihen entwickelt und in Tafeln niedergelegt, so daß wir uns ohne Weiteres der Beziehung

$$r_0 = -\frac{2i}{q^2} \Omega(q) \tag{69}$$

bedienen können.

§ 4. **Die elektrische Schwingung ist senkrecht zu den Drähten.**

Setzt man

$$H_z = e^{2\pi i n t} V, \tag{70}$$

so genügt die Funktion V der Gleichung

$$\Delta V + k^2 V = 0. \tag{71}$$

Um die Oberflächenbedingungen abzuleiten, schreiben wir eine der Maxwellschen Gleichungen an

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t} + 4\pi\sigma E_\phi,$$

---

1) W. Thomson, Math. and phys. papers 3. S. 493. Cambridge 1890; I. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. 1903. S. 1141; vgl. auch I. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen. Stuttgart 1905. S. 403 u. 992; A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 8. S. 805. 1907; E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig u. Berlin 1909. S. 144—174.

aus der mit $E_\phi = e^{2\pi i n t} W$

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = (\varepsilon 2\pi n i + 4\pi\sigma) W$$

hervorgeht.

Da aber $\mu 2\pi n i (\varepsilon 2\pi n i + 4\pi\sigma) = -k^2$ ist, so folgt

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k^2}{\mu 2\pi n i} W.$$

Da V und W an der Oberfläche stetig bleiben müssen, so haben wir die Bedingungen

$$(72) \qquad \begin{cases} V_i = V_a, \\ \frac{\mu}{k^2}\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial V_a}{\partial r}. \end{cases}$$

Versuchsweise setzen wir an

$$(73) \qquad V_a = \alpha' \varphi_3 + \beta' + \gamma' \varphi_1 + \delta' \varphi_2,$$

während

$$(74) \qquad V = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu' J_\nu(kr)\cos\nu\vartheta.$$

Mittels (47), (78) und (74) erhalten wir die Gleichungen

$$(75) \qquad \begin{cases} 2\alpha b\cos\vartheta + \beta + \delta\log\frac{nb}{a} = C_0' J_0(kb) + C_1' J_1'(kb)\cos\vartheta \\ 2\gamma\cos\vartheta + \frac{\delta}{b} = \frac{\mu k_0^2}{k}[C_0' J_0'(kb) + C_1' J_1'(kb)\cos\vartheta], \end{cases}$$

aus denen

$$(76) \qquad \delta = \left(\beta + \delta\log\frac{nb}{a}\right)\varrho_0; \quad \frac{\gamma}{a} = \varrho_1$$

folgt, wenn wir die Abkürzungen einführen

$$(77) \qquad \varrho_0 = \mu\frac{k_0^2 b^2}{kb}\frac{J_0'(kb)}{J_0(kb)}; \quad \varrho_1 = \mu\frac{k_0^2 b^2}{kb}\frac{J_1'(kb)}{J_1(kb)}.$$

So verwandelt sich (73) in

$$(78) \qquad V_a = \alpha' \varphi_3 + \beta' + \alpha' \varrho_1 \varphi_1 + \frac{\beta' \varrho_0}{1 - \varrho_0\log\frac{nb}{a}}\varphi_2.$$

Im Unendlichen gelten die Gleichungen (35), so daß mittels (48) die Beziehungen folgen

$$\alpha'(x+l) + \beta' + \alpha'\varrho_1(x-l) + \frac{\beta'\varrho_0}{1 - \varrho_0\log\frac{nb}{a}}\left(\frac{n x}{a} - \log 2\right)$$
$$= 1 + A + i k_0 (1 - A) x,$$

$$\alpha'(x-l)+\beta'+\alpha'\varrho_1(x+l)-\frac{\beta'\varrho_0}{1-\varrho_0\log\frac{\pi b}{a}}\left(\frac{\pi x}{a}+\log 2\right)$$
$$=B'+ik_0B'x.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$\frac{1+A'-B'}{1-A'+B'}=\frac{1-\varrho_1}{1+\varrho_1}ik_0l$$

oder genähert

$$B'-A'=1 \tag{79}$$

und

$$B'+A'=\frac{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)-\varrho_0}{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)+\varrho_0}, \tag{80}$$

d. h.

$$\begin{cases} B'=\dfrac{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)}{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)+\varrho_0}=\dfrac{\Delta' i}{\Delta' i-1}, \\ A'=-\dfrac{\varrho_0}{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)+\varrho_0}=\dfrac{1}{\Delta' i-1}, \end{cases} \tag{81}$$

wo

$$\Delta'=-\tfrac{2a}{\lambda_0}\left[\log\frac{a}{2\pi b}+\frac{1}{\varrho_0}\right]. \tag{82}$$

Nach (77) und (66) folgt mit $\mu=1$

$$\frac{1}{\varrho_0}=\frac{kb}{k_0^2b^2}\frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)}=\frac{k^2b^2}{k_0^2b^2}\tau_0=-\frac{2}{k_0^2b^2}\Omega=-\frac{\lambda^2}{2\pi^2b^2}\Omega. \tag{83}$$

§ 5. Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen von Schaefer und Laugwitz.

Der durch (67) eingeführte Wert von q ist

$$q=\sqrt{8\pi^2\sigma n b^2}=\sqrt{\frac{8\pi n}{\omega}} \tag{84}$$

unter $\omega=\frac{1}{b^2\pi\sigma}$ den in elektromagnetischen Einheiten gemessenen Widerstand von 1 cm Draht verstanden.

In den Versuchen von Schaefer und Laugwitz war $\lambda_0 = 30\,\text{cm}$; $a = 1{,}5\,\text{cm}$; $b = 0{,}00125\,\text{cm}$, so daß

$$\ln \frac{a}{2\pi b} = 5{,}252.$$

Um τ_0 zu bestimmen, berechnen wir die folgende Tabelle.

Material	$\omega \cdot 10^{-7}$	q	Ω_1	Ω_2	τ_0
Silber	39	8,028	3,105	2,818	0,08744 − *i* 0,09636
Platin	274	3,028	1,328	0,9632	0,2101 − *i* 0,2898
Manganin . . .	970	1,610	1,035	0,3181	0,2454 − *i* 0,7986
Kruppin . . .	1620	1,246	1,013	0,1927	0,2482 − *i* 1,305

$\Delta = -u + vi$	Reflektionsvermögen	Durchlässigkeit	Absorptionsvermögen
− 0,5339 + *i* 0,009636	76,65%	21,84%	1,51%
− 0,5462 + *i* 0,02898	73,69	22,05	4,26
− 0,5497 + *i* 0,07986	68,11	21,04	10,85
− 0,5500 + *i* 0,1305	63,20	20,18	16,62

Diese Werte sind nach den Gleichungen (64) und (65) berechnet worden, d. h. unter der Annahme, daß die elektrischen Schwingungen den Drähten parallel waren. Die Autoren machen darüber zwar keine Angaben, jedoch ist es auf Grund der Beobachtungsergebnisse außer Zweifel, daß Oszillator, Resonator und Gitterdrähte einander parallel waren.

Schaefer und Laugwitz geben die folgenden experimentellen Resultate

Material	Reflektionsvermögen	Durchlässigkeit	Absorptionsvermögen
Silber	35,5%	62,1%	2,4%
Platin	32,9	60,6	6,5
Manganin	32,0	57,7	10,3
Kruppin	25,3	55,8	18,9

welche keineswegs mit der Theorie übereinstimmen.

Die Abweichungen würden noch bedeutend größer sein, wenn wir annähmen, daß der Oszillator senkrecht zu den Drähten stand, denn in diesem Falle hätte $1/\varrho_0$ nach (83) einen so großen Wert, daß die Gleichungen (81) praktisch mit

$B' = 1$; $A' = 0$ identisch sind, d. h. in dieser Anordnung würde das Gitter nichts reflektieren und die Gesamtstrahlung hindurchlassen.

Es ist schwer, den Grund dieser Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung anzugeben, da die Verfasser keine Einzelheiten der Versuchsanordnung und Messung mitteilen, aber es könnte sein, daß zu den Differenzen die Dämpfung der ausgesandten Wellen beigetragen hat.

La Plata, 1. Dezember 1916. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

4. *Die Form ultramikroskopischer Platinteilchen; von Richard Gans und Ricardo Calatroni.*

(Nach Versuchen von Ricardo Calatroni.)

Nachdem der eine von uns[1]) gezeigt hatte, daß die ultramikroskopischen Metallteilchen kolloidaler Gold- und Silberlösungen mit großer Annäherung Kugelform haben, wandten wir uns der Ermittlung der geometrischen Form der Partikeln in Platinlösungen zu, über deren Resultate im folgenden kurz berichtet werden soll.

Nach Abschluß unserer Untersuchungen kam uns — infolge des Krieges sehr verspätet — die schöne Publikation von Diesselhorst und Freundlich[2]) zu Händen, in der diese nach ihrer Schlierenmethode u. a. die Gansschen Resultate bestätigen und feststellen konnten, daß auch die nach der Bredigschen Zerstäubungsmethode hergestellten Platinsole aus kugeligen Amikronen bestehen.

Wenn wir trotzdem unsere Beobachtungen der Veröffentlichung übergaben, so geschieht es erstens, weil dieselben die Diesselhorst und Freundlichschen, nach ganz anderer experimenteller Methode angestellten Messungen bestätigen, zweitens, weil es uns daran lag, daß das zur Untersuchung herangezogene Material auf rein chemischen Wege durch Reduktion hergestellt sei; denn bei den hohen Temperaturen, die bei der Zerstäubungsmethode ins Spiel kommen, ist es nicht ausgeschlossen, daß das Metall kurze Zeit flüssig ist und dann den Kapillarkräften unterliegt, und da wir gerade einen Beitrag zur Kenntnis der physikalisch-chemischen Kräfte liefern wollten, die für die Form der äußerst kleinen Teilchen maßgebend sind, so mußten wir alle sekundären Einwirkungen ausschalten.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 881. 1912; 47. S. 270. 1915.
2) H. Diesselhorst u. H. Freundlich, Phys. Zeitschr. 17. S. 117. 1916.

Unsere ersten Versuche stellten wir allerdings mit Präparaten an, die wir nach der Bredigschen Methode gewonnen hatten, indem wir unter ganz reinem Wasser, welches als Schutzkolloid 0,1 Proz. Gelatine enthielt, zwischen zwei 0,6 mm dicken Platinelektroden einen Lichtbogen erzeugten. Die auf diese Weise hergestellte Lösung *A* hatte eine dunkel graurote Farbe.

Dann gingen wir zum Paalschen Verfahren[1]) über, und zwar benutzten wir protalbinsaures Natrium als Schutzkolloid, indem wir von der Platinchlorwasserstoffsäure ausgingen, Hydrazinhydrat als Reduktionsmittel benutzten und dann gegen Wasser dialysierten. Das so entstehende sehr stabile Präparat löst sich, worauf Paal und Amberger hinwiesen, sehr leicht in warmem Wasser nach Zusatz eines Tropfens verdünnter Natronlauge. Die auf diese Weise hergestellte Lösung *B* war grauschwarz.[2])

Von diesen beiden Lösungen wurde, wie früher, die Absorption mit dem König-Martensschen Spektralphotometer gemessen, und zwar für die vier Heliumlinien $\lambda = 6678, 5877, 5010, 4472$ Å.E. Es ergaben sich folgende Tabellen, in denen wir die Absorption in relativem Maß angeben, indem wir dieselbe für die grüne Linie willkürlich gleich Eins setzen.

Tabelle 1.

Absorption der ursprünglichen Lösungen.

Lösung *A* nach Bredig. Farbe: dunkel graurot.		Lösung *B* nach Paal. Farbe: grauschwarz.	
λ	K	λ	K
667,8	0,687	667,8	0,705
587,7	0,822	587,7	0,817
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,230	447,2	1,163

1) C. Paal u. C. Amberger, Chem. Ber. **37**. I. S. 124. 1904.

2) Daß die beiden Lösungen *A* und *B* verschiedene Farbe haben, trotzdem der Verlauf der Absorptionskurven fast identisch ist, ist nichts Auffallendes, denn aus physiologischen Gründen hängt die Farbe auch von den absoluten Werten der Absorption ab. Davon überzeugt man sich z. B. leicht, wenn man dieselbe Kaliumbichromatlösung in dünner und dicker Schicht beobachtet. Im ersten Falle ist sie grün, im zweiten orange gefärbt.

Um aus diesen Lösungen die größeren Partikel und die, welche sich durch Zusammenballen von kleineren gebildet hatten, auszuschalten, wurden die ursprünglichen Lösungen nach dem von einem von uns[1]) beschriebenen modifizierten Bechholdschen Verfahren ultrafiltriert, und zwar mit Kollodiumfiltern, die mehr oder weniger Eisessig enthielten.

Die mit den so präparierten Lösungen gewonnenen Absorptionskurven sind die folgenden.

Tabelle 2.

Mit 0,5 Proz. Eisessig-Kollodiumfiltern ultrafiltriert. Farbe mattgelb.

Lösung *A* nach Bredig.		Lösung *B* nach Paal.	
λ	K	λ	K
667,8	0,342	667,8	0,326
587,7	0,583	587,7	0,574
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,357	447,2	1,675

Tabelle 3.

Mit 1,0 Proz. Eisessig-Kollodiumfiltern ultrafiltriert. Farbe hellgelb.

Lösung *A* nach Bredig.		Lösung *B* nach Paal.	
λ	K	λ	K
667,8	0,516	667,8	0,459
587,7	0,704	587,7	0,693
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,237	447,2	1,195

Um aus diesen Resultaten Schlüsse über die Form der Teilchen ziehen zu können, haben wir die Absorptionskurven theoretisch berechnet, welche kugel-, scheiben- und stabförmigen Partikeln entsprechen.

Hierzu brauchten wir die numerischen Werte des Reflektionsvermögens und des Extinktionskoeffizienten des metallischen Platins, welche von Hagen und Rubens[2]) beobachtet worden sind.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 280. 1915.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. S. 1 u. 432. 1902.

Tabelle 4.

λ	R	$\nu\varkappa$	$m = \nu(1 - i\varkappa)$	$m'^2 - 1$	λ'
650	0,664	4,53	$3{,}219 - i\,4{,}53$	$-6{,}733 - i\,16{,}46$	488,
600	0,640	4,15	$2{,}964 - i\,4{,}15$	$-5{,}744 - i\,13{,}84$	450,
550	0,612	3,81	$2{,}836 - i\,3{,}81$	$-4{,}631 - i\,12{,}13$	412,0
500	0,584	3,49	$2{,}659 - i\,3{,}49$	$-3{,}862 - i\,10{,}40$	374,3
450	0,547	3,15	$2{,}555 - i\,3{,}15$	$-2{,}893 - i\,8{,}976$	336,0
425	0,523	2,98	$2{,}636 - i\,2{,}98$	$-2{,}073 - i\,8{,}738$	317,0

In Tab. 4 bedeutet λ die Wellenlänge im Vakuum, R das Reflektionsvermögen, $\nu\varkappa$ den Extinktionskoeffizienten nach Hagen und Rubens. Daraus berechnet sich der (reelle) Brechungsexponent ν nach der Formel

$$(1) \qquad \nu = \frac{1+R}{1-R} - \sqrt{\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2 - (1+\nu^2\varkappa^2)}.$$

Die vierte Kolonne enthält $m = \nu - i\,\nu\varkappa$, den sogenannten komplexen Brechungsexponenten. Nennt man m_0 den Brechungsexponenten des Wassers, so ist $m' = m/m_0$ der komplexe Brechungsexponent des Platins gegen Wasser. In Kolonne 5 finden sich die Werte von $m'^2 - 1$, und schließlich enthält Kolonne 6 die Wellenlängen in Wasser.

Die Absorption K ergibt sich ferner[1]) aus folgendem Formelsystem.

$$(2) \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda'} \operatorname{Im}(-a_1 - 2a_1'),$$

wo

$$(3) \qquad a_1 = \frac{m'^2 - 1}{3 + (m'^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P}; \qquad a_1' = \frac{m'^2 - 1}{3 + (m'^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P'}.$$

P und P' sind Faktoren, welche nur von der Form der Teilchen abhängen, und zwar ist

für	$\frac{P}{4\pi}$	$\frac{P'}{4\pi}$
Kugeln	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Stäbchen . . .	0	$\frac{1}{2}$
Scheiben . . .	1	0

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 886. 1912. Formel (19) und (21).

λ' und m' sind bereits oben definiert; „Im" bedeutet den imaginären Teil des in Klammern stehenden Ausdrucks.

So berechnete sich die folgende Tabelle, in welcher K die Absorption einer 1 mm dicken Lösung bedeutet, in welcher sich 1 mm³ Platin in 1 Liter Wasser befindet. K_{red} stellt dieselben Absorptionen für solche Konzentrationen dar, daß dieselben für $\lambda = 500\,\mu\mu$ gleich Eins werden.

Tabelle 5.

λ	K			K_{red}		
	Kugeln	Stäbchen	Scheiben	Kugeln	Stäbchen	Scheiben
650	0,00669	0,07249	0,1414	0,4634	1,162	1,209
600	0,00874	0,06691	0,1291	0,6050	1,073	1,104
550	0,01114	0,06485	0,1237	0,7713	1,040	1,058
500	0,01444	0,06237	0,1169	1,000	1,000	1,000
450	0,01875	0,06144	0,1126	1,298	0,985	0,963
425	0,02018	0,06378	0,1162	1,397	1,022	0,994

Die Figur gibt K_{red} in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge für Kugeln und Stäbchen. Die für Scheiben gültige

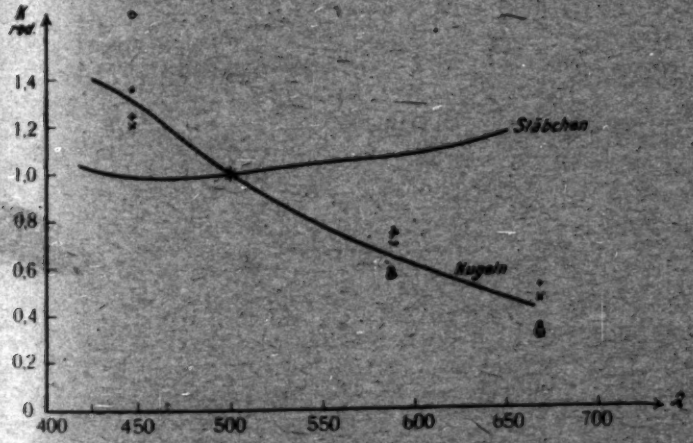


Fig. 1.

Kurve haben wir nicht gezeichnet, weil sie sich kaum von der für Stäbchen gültigen unterscheidet. Neben diesen theoretischen Werten der Kurve sind die beobachteten Absorptionen eingetragen, und zwar entsprechen

•	Lösung	*A*	nach	Bredig.	Ultrafilter mit 0,5%	Eisessig
⊙	„	*B*	„	Paal.	„ „ 0,5 %	„
+	„	*A*	„	Bredig.	„ „ 1,0 %	„
×	„	*B*	„	Paal.	„ „ 1,0%	„

Ein Vergleich mit der theoretischen Kurve ergibt, daß *die Platinamikronen ebenso wie die Silber- und Goldamikronen genähert Kugelgestalt haben.*

La Plata, 15. Juli 1916. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

5. *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel;* von *Reinhard Mecke.*

I. Teil: Experimentelle Ergebnisse.

(Marburger Dissertation 1919.)

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung. § 1. Allgemeines über Beugungserscheinungen im homogenen Nebel. § 2. Über Nebelbildung und Tropfengröße. — Versuchsanordnung. Experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung im homogenen Nebel. § 1. Über den Einfluß der Dicke der Nebelschicht. § 2. Untersuchung des Beugungsbildes im weißen Licht. § 3. Messungen im monochromatischen Licht. § 4. Versuche mit homogenen Nebeln anderer Flüssigkeiten. § 5. Vergleichsmessungen mit Pilzsporen. Zusammenfassung.

Einleitung.

§ 1. Allgemeines über Beugungserscheinungen im homogenen Nebel.

Im homogenen Nebel von gleichgroßen, durchsichtigen Tröpfchen, welche als Kugellinsen dem Brechungs- und Reflexionsgesetze unterliegen, sind drei verschiedene Arten von Beugungserscheinungen möglich, von denen die bekannteste wohl der Regenbogen ist. Dieser entsteht durch innere Reflexion im Tropfen und seine Theorie, welche auf der Beugung nichtsphärischer Wellen beruht, ist in Weiterbildung der Theorie von Cartesius von verschiedenen Forschern schon eingehend behandelt worden, so daß ich hier nur auf die diesbezüglichen Arbeiten von Airy[1]), Pernter[2]) und Möbius[3]) verweisen möchte. Ein anderes nur im reflektierten Licht sichtbares Beugungsphänomen sind die in der Metereologie als Glorie, die das Brocken- oder Ballongespenst umgibt, allge-

1) G. Airy, Trans. of the Soc. of Cambr. 6. S. 379. 1836.
2) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 495ff.
3) W. Moebius, Ann. d. Phys. 33. S. 79. 1910.

mein bekannten farbigen Ringe, welche sich um den auf die Nebelwand fallenden Schatten des Beobachters bilden. Eine einwandsfreie Erklärung der Glorie durch ein in der Einfallsrichtung sich bildendes Intensitätsmaximum gelang Hrn. Geheimrat Prof. Dr. F. Richarz[1]); jedoch liegen die Verhältnisse hier sehr verwickelt und manches bedarf noch der Aufklärung. Auf eine Anregung von Geheimrat Prof. Richarz hin fand ich z. B., daß mit aufgewirbeltem Lycopodiumstaub die Erscheinung selbst im intensiven Bogenlicht nicht hervorzurufen war, während sie beim künstlichen Nebel schon im schwachen diffusen Tageslicht sichtbar ist. Allerdings ist auch die Intensität des an den Tröpfchen zurückgeworfenen Lichtes weit größer als an Lycopodiumstaub. Es scheinen somit noch andere Ursachen, welche wohl auf der Eigenschaft der Tröpfchen als Kugellinsen beruhen mögen, zur Entstehung der *Glorie* beizutragen. Auch dürfte die bis jetzt stillschweigend gemachte Annahme, daß das *zurückgeworfene Licht* aus parallelen Strahlen besteht (denn nur für solches Licht gelten ja die Fraunhoferschen Beugungsgleichungen), bei der Erklärung der farbigen Beugungsringe (Glorie) kaum zutreffend sein. Die Erklärung des Intensitätsmaximums erfährt dadurch keine Änderung. Eine genaue Untersuchung der Glorie und ihre Theorie muß aber einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, da es sich als notwendig erwies, zunächst die einfacheren Erscheinungen im *durchgehenden* Licht zu untersuchen und zu erklären.

Diese sind in der Natur häufig als prächtig gefärbte Kränze, auch Aureolen oder kleine Höfe genannt, um Sonne und Mond zu sehen, wenn leichtes Gewölk oder Nebel diese Gestirne verschleiern. Schon Fraunhofer fand, daß dieses Phänomen mit der Beugungserscheinung kreisförmiger Scheibchen, wie sie sich durch eine mit Lycopodium- oder Bovistsporen bestreute Glasplatte nachahmen läßt, analog ist. Die Erscheinung besteht in der Mitte, zunächst der direkt gesehenen Lichtquelle aus einem bläulichweiß gefärbten zentralen Feld, umgeben von einem braunroten Kreis, an den sich ein dunkelvioletter Ring und dann abwechselnd grüne und rote Ringe anschließen. Im *monochromatischen* Licht setzt

1) F. Richarz, Marburger Sitzungsber. 1912. S. 1 u. 5; Metereol. Zeitschr. **25.** S. 29. 1908; **29.** S. 282. 1912; **31.** S. 188. 1914.

sie sich aus dunklen und hellen Ringen mit abnehmender Helligkeit zusammen, welche die Lichtquelle konzentrisch umgeben. Bedeutet φ den Beugungswinkel, r den Tropfenradius und λ die Wellenlänge, so gehorchen die Ringe dem Gesetze

$$z_{\text{Min}} = \frac{r}{\lambda} \sin \varphi ,$$

wo r den Tropfenradius bedeutet, z_{Min} aber eine Konstante ist und für den ersten dunklen Ring den Wert 0,61, für den zweiten den Wert 1,116 besitzt. Man kann also aus den Durchmessern der Minima verschiedener Ordnung die Tropfengröße bestimmen, und es muß sich *jedesmal* derselbe Wert ergeben. Im *weißen* Licht nimmt man für die Messungen am besten den äußersten Rand des roten Ringes, wo nach den Versuchen von Fraunhofer das Minimum der Wellenlänge „des weißen Lichtes" 0,571 μ[1]) liegt.

Von den 11 Messungen von Kämtz[1]) nun, welche ich in Pernters „Metereologischer Optik" fand, zeigen die aus den beiden ersten Ringen berechneten Tropfenradien nur geringe Abweichungen von etwa $\pm$ 3 Proz. voneinander. Auf dem Ben Nevis[2]) gemachte Beobachtungen weisen allerdings etwas größere Abweichungen auf, doch ist dies wohl auf die Schwierigkeit der Messungen im weißen Licht und die Veränderlichkeit der Erscheinung zurückzuführen. Auch bestehen oft Zweifel, ob die Wolkenelemente wirklich aus Wassertropfen und nicht aus Eiskristallen bestehen. Nach diesen Messungen besitzt natürlicher Nebel noch immer relativ große Tropfen von etwa 5—30 μ Radius.

Während also bei der Naturerscheinung sowohl bezüglich der Farbenfolge als auch bezüglich der Durchmesser der Ringe gute Übereinstimmung mit der Theorie erzielt worden ist, treten beim künstlichen Nebel, der ungefähr 5—10 mal kleinere Tropfen besitzt, ganz andere Erscheinungen auf. Das zentrale Feld, welches nahezu weiß sein soll, ist lebhaft gefärbt und ähnelt in seiner Veränderlichkeit mit der Tropfengröße den Farben dünner Blättchen. Nach Kießling[3]) durchläuft es in schneller Aufeinanderfolge folgende Farben, die immer

1) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 459.
2) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 466, 467.
3) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 122ff. 1884. Dämmerungserscheinungen, Hamburg 1888, S. 140.

blasser werden: blaßlila, blaulila, leuchtend hellblau, bläulich grün, smaragdgrün, gelbgrün, hellorange, dunkelorange, scharlachrot, carmoisinrot, steingrau, olivengrün, gelbgrün, bronzegelb, orange usw.

Die Farbenfolge im Beugungsbilde, welche eine gänzlich andere ist, scheint nicht so einfachen Gesetzmäßigkeiten unterworfen zu sein, und die wenigen im monochromatischen Lichte vorhandenen Beobachtungen lassen auch hier Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen vermuten.

Es ist deshalb der Zweck dieser Arbeit, die Erscheinungen und Abweichungen eingehend zu untersuchen und zu erklären. Da für die Erscheinungen im *weißen* Licht schon gute Beschreibungen von Kießling, Barus u. a. vorhanden sind, so legte ich besonderen Wert auf die Messungen im *monochromatischen* Licht und vergleichende Beobachtungen mit der gleichzeitigen Färbung des zentralen Feldes, um hier etwaige Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Zu diesem Zwecke wurden auch Messungen mit anderen Flüssigkeiten ausgeführt. Daran anschließend soll in einem zweiten Teil zur Erklärung dieser Erscheinungen die Beugungstheorie kleiner Kugellinsen abgeleitet werden, woraus sich dann eine Methode der Berechnung von Tropfenradien aus der Färbung des zentralen Feldes ergeben wird.

§ 2. Über Nebelbildung und Tropfengröße.

Nebel besteht nach den Untersuchungen von Kießling[1]), Roth[2]) u. a., welche die von Clausius[3]) aufgestellte Bläschentheorie widerlegten, aus massiven kugelförmigen Tröpfchen, die sich durch plötzliche Abkühlung an den zur Nebelbildung notwendigen Kondensationskernen niedergeschlagen haben. Als solche Ansatzkerne können z. B. Staubteilchen und Ionen, wie sie sich in Flammengasen befinden, dienen. Eine Kondensation von Flüssigkeit läßt sich experimentell am einfachsten durch adiabatische Zustandsänderung der den gesättigten Dampf enthaltenden Luft erreichen. Da bei Wasser und den

1) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 117. 1884.
2) Fr. Roth, Deutsche Metereol. Zeitschr. 2. S. 52. 1985.
3) R. Clausius, Lichterscheinungen der Atmosphäre. 1850. S. 392—346; Pogg. Ann. 76. S. 84—88.

meisten anderen in Betracht kommenden Flüssigkeiten (außer Äther) die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes negativ ist, so tritt Kondensation nur bei plötzlicher *Abkühlung* der mit Wasserdampf gesättigten Luft ein.

Für die folgenden Versuche war es nun von Wichtigkeit, durch *andere nicht auf Beugung* beruhende Meßverfahren eine Vorstellung von der in Frage kommenden Tropfengröße im homogenen Nebel zu erhalten. Von den verschiedenen Methoden kann die direkte mikroskopische Ausmessung der Teilchen außer Betracht gelassen werden. Barus[1]) fand nämlich nach Überwindung der großen experimentellen Schwierigkeiten, daß die Tropfengröße durchaus nicht homogen ist. Es ist dies wohl auf die nachträgliche Veränderung des Durchmessers auf dem Objektträger zurückzuführen. Zu erwähnen wäre dann die Bestimmung aus der Fallgeschwindigkeit, deren Genauigkeit aber auch durch äußere Einflüsse und große Fehlerquellen erheblich beeinträchtigt wird. Ferner ist eine Berechnung des Tropfenradius möglich, wenn man die kondensierte Wassermenge und die Anzahl der Tropfen bzw. der Ansatzkerne kennt. Auf dieser letzteren Methode beruhen die zahlreichen Messungen von Barus[2]), indem er die relative Abnahme der Kondensationskerne infolge mehrerer aufeinanderfolgender Expansionen durch Versuche berechnet. Während diese Messungen die relative Tropfengröße mit einiger Wahrscheinlichkeit zu ermitteln gestatten, beruht ihre absolute Bestimmung nur auf Schätzung. Man kennt eben die anfängliche Anzahl der Kerne nicht genau genug und der Vorgang der Expansion verläuft nicht streng adiabatisch, so daß die Temperaturerniedrigung nur angenähert bekannt ist. Diesen beiden Methoden käme, wenn man von der Schwierigkeit solcher Messungen absieht, infolgedessen nur Beachtung zu, sobald es sich um die bloße Bestimmung der Größenordnung handelt. Ihre Genauigkeit reicht jedoch nicht an die durch die optische Methode erzielbare, welche eine schnelle absolute Bestimmung gestatten würde, heran. Aus diesem Grunde schon

---

1) C. Barus, Amer. Journ. of Sc. **17**. S. 81ff. 1904.

2) Vgl. z. B. Ann. d. Phys. Boltzmann-Festschrift. S. 204ff. 1904; Sill. Journ. **18**. S. 81. 1902; **24**. S. 309—312. 1907; **31**. S. 564—568. 1911; **15**. S. 335. 1903.

erhebt sich die Forderung, die Erscheinungen und Gesetze der Beugung im Wassernebel eingehend zu untersuchen.

Die Größenordnung der im künstlichen Nebel zu erwartenden Tropfen läßt sich angenähert am besten wohl aus der kondensierten Wassermenge und der Anzahl der Kondensationskerne berechnen. Die durch Kondensation niedergeschlagene Wassermenge läßt sich aus den thermischen Daten nach bekannten Formeln[1]) bestimmen. In einem Gefäß mit konstantem Volumen sei von der Menge M eines Stoffes, m_0 im dampfförmigen, also $M - m_0$ im flüssigen Zustand vorhanden. Bedeuten T_0 und T die Anfangs- und Endtemperaturen (abs.), r_0 und r die Verdampfungswärmen bei den betreffenden Temperaturen, c die spezifische Wärme der Flüssigkeit, so ist bei der Endtemperatur im dampfförmigen Zustand die Menge

$$m = \frac{T}{r}\left(\frac{m_0 r_0}{T_0} - M \cdot c \cdot \ln\frac{T}{T_0}\right).$$

Soll im Anfang alle Flüssigkeit verdampft sein, so ist $m_0 = M$ zu setzen. Die Temperaturänderung läßt sich aus der adiabatischen Zustandsgleichung

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p - \pi}{p_0 - \pi_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

berechnen, wobei π der Sättigungsdruck des Dampfes bedeutet. Den Richtungssinn des Vorganges kann man aus dem ersten Differentialquotienten nach der Temperatur ersehen, welcher sich zu

$$dm = -m \cdot \frac{h}{r} dT$$

ergibt. Ist also die spezifische Wärme h des gesättigten Dampfes negativ, so wird es auch dm bei einer Expansion und es tritt dann Kondensation ein, während bei positiver spezifischer Wärme das Umgekehrte der Fall sein würde. Die Berechnung von m bedarf aber noch einer kleinen Korrektion, da die durch die Kondensation freiwerdende Verdampfungswärme nicht nur den Dampf, sondern auch die umgebende Luft miterwärmt. Die Versuche wurden nun bei Zimmertemperatur von etwa

1) G. Kirchhoff, Wärme, 1894. S. 88ff.; Helmholtz, Wärme, 1903. S. 236ff; Clausius, Mechanische Wärmetheorie 1. S. 161ff.; Winkelmann, Handbuch d. Phys. 3. (Wärme) S. 644ff.

17° und einer durchschnittlichen Druckverminderung von 20 cm Hg ausgeführt. Zwar wurden auch größere Druckunterschiede, welche eine erhebliche Abkühlung unter den Nullpunkt bedeuten würden, angewandt, doch dürfte dann der Vorgang infolge der äußeren Wärmeleitung kaum adiabatisch verlaufen. Barus fand z. B., daß schon nach einer Minute wieder nahezu Temperaturausgleich stattgefunden hat. Einer Druckverminderung von 74 cm auf 54 cm würde eine Temperaturänderung von 290° abs. auf 265° ($k = 1{,}40$) also 25° entsprechen; die Verdampfungswärme des Wassers ist $r = 596{,}7 - 0{,}601\, t^0$, d. h. $r_0 = 586{,}5$ und $r = 601{,}5$. Aus diesen Daten ergibt sich $m = 0{,}929\, m_0$ und es hat sich somit $0{,}071\, m_0$ Wasser kondensiert. Da im Kubikzentimeter Luft bei 17° maximal $14{,}5 \cdot 10^{-6}$ g Wasserdampf enthalten sind, so wurden also für 1 g Luft $872 \cdot 10^{-6}$ g Wasser niedergeschlagen. Die hierdurch freiwerdende Wärmemenge von 0,51 kal. erwärmen die Luft ($c_p = 0{,}237$) um 2,15° und setzen die Temperaturerniedrigung auf 22,85° gegen 25° herab. Folglich erhält man nur 0,064 m, d. h. $0{,}98 \cdot 10^{-6}$ g pro ccm Luft.[1])

Neben der kondensierten Wassermenge hängt die Tropfengröße auch noch von der Anzahl der vorhandenen Ansatzkerne ab. Soll der Nebel aber Beugungserscheinungen zeigen, so muß er homogen sein, da bei verschiedenen Tropfenradien die von den einzelnen Tropfen erzeugten Beugungsbilder sich übereinanderlagern und die Ringe an Schärfe und Reinheit der Farben verlieren würden. Es kommt also im wesentlichen darauf an, daß die Teilchen von gleicher Beschaffenheit und vor allen Dingen gleichmäßig verteilt sind, denn nur dann können die Kerne den Wasserdampf aus gleichgroßen Bereichen an sich reißen.[2]) Bei einer beträchtlichen Anzahl der Kerne wird aber die Verteilung nie eine so regelmäßige sein, um bei dem kleinen Tropfenradius die zur Erzeugung von guten Beugungsbildern erforderlichen Ansprüchen an die Homogenität genügend zu erfüllen. Sind hingegen wenig Kondensationskerne vorhanden, so wird wiederum die Erscheinung zu lichtschwach, um praktische Beobachtungen anstellen zu können. Zur Erzielung brauchbarer Beugungsbilder ist es

1) Für die Berechn. vgl. auch C. Barus, Ann. d. Phys. 24. S. 229. 1907.

2) E. Barkow, Marburger Dissert. Entstehung von Nebel. S. 13.

also notwendig, daß die Luft nach einer Bezeichnung von Kießling[1]) „den lichtgünstigsten Dunstbetrag" enthält. Dieser beträgt nun nach den Versuchen[2]) von Barus in der oberen Grenze etwa $5 \cdot 10^4$ Kerne im Kubikzentimeter und sinkt bis auf etwa $5 \cdot 10^2$. Ist N die Anzahl der Kondensationskerne im Kubikzentimeter, s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, m die niedergeschlagene Wassermenge, so berechnet sich der Radius r leicht aus der Formel

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot s \cdot N.$$

Für Wasser unter den üblichen Versuchsbedingungen würden Tropfen von etwa 1,7—7,7 μ Radius entstehen. Da eine Druckerniedrigung von ungefähr 2 cm gerade noch Nebelbildung hervorzurufen vermag, so schwanken beim künstlichen Nebel die Tropfengrößen zwischen 0,9 und höchstens 8 μ. Für andere Flüssigkeiten als Wasser wird man unter denselben Versuchsbedingungen im allgemeinen andere Größen erhalten und zwar hängen sie, wie die Berechnung zeigt, außer vom Dampfgehalt der Luft noch von der spezifischen Wärme des gesättigten Dampfes und seiner Verdampfungswärme ab.

Die Messungen aus der Fallgeschwindigkeit ergeben nach Versuchen von Barkow[3]) Tropfen von derselben Größenordnung.

Versuchsanordnung.

Zur experimentellen Herstellung von möglichst homogenem Nebel durch die Entspannungsmethode verwandte ich folgende Versuchsanordnung, wie sie auch schon von Kießling[4]), Barkow[5]), Mierdel[6]) u. a. benutzt wurde, und die eine weitgehende Regulierung der Tropfengröße innerhalb der angegebenen Grenzen zuläßt.

---

1) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 117—126. 1884. Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1888.

2) C. Barus, Boltzmann-Festschrift, S. 205. 1904; Ann. d. Phys. 24. S. 225—242. 1907.

3) E. Barkow, Marb. Dissert. Versuche über Entstehung von Nebel. S. 61. 1906.

4) J. Kießling, Metereol. Zeitschr. 1. S. 117ff. 1884.

5) E. Barkow, Marb. Dissert. Versuche über Entstehung von Nebel, S. 15ff. 1906.

6) F. Mierdel, Marb. Dissert. w. veröff. in „Physik der freien Atmosphäre".

In einem Vorvakuum, bestehend aus den beiden großen Flaschen V_1 und V_2 (Säureballone) und der Glaskugel V_3 von 40 cm Durchmesser, wurde durch eine kräftige Wasserstrahlpumpe L ein Reservoir von verdünnter Luft hergestellt. Der Unterdruck konnte an einem Quecksilbermanometer M abgelesen werden. Um einen bestimmten Verdünnungsgrad erzielen zu können, war das Gefäß V_3 von den beiden anderen durch den Hahn H_3 noch abzuschließen. Ein kleiner Erlenmeyerkolben E fing nach Abstellung der Pumpe das zurückfließende Wasser auf; ein weiterer Hahn H_4 verhinderte dann

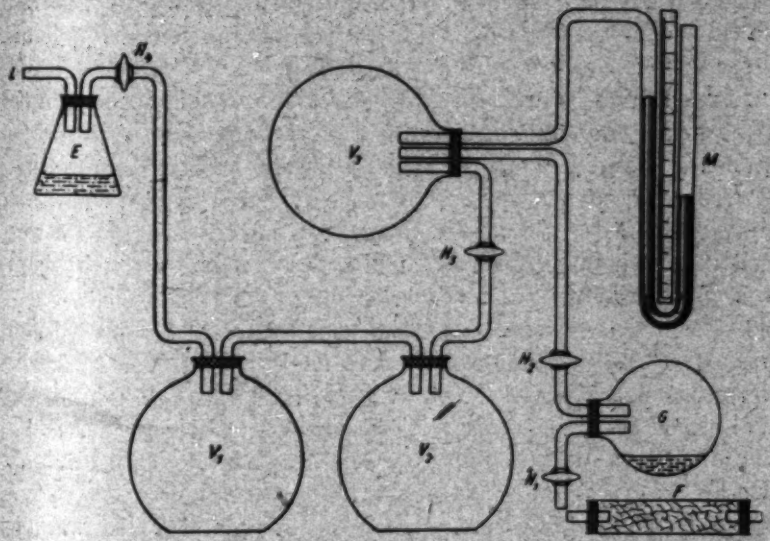


Fig. 1.

das Einströmen von Außenluft in das Vorvakuum. Die Verbindungen wurden durch weite Glasröhren und dickwandige Gummischläuche hergestellt, welche an den Ansatzstellen noch zweckmäßig durch festangezogene Drahtringe und Lacküberzüge gegen Undichtigkeiten geschützt waren.

Das eigentliche Nebelgefäß G bestand aus einer Glaskugel von 20 cm Durchmesser, welche etwas Wasser enthielt, um die Luft dauernd mit Wasserdampf gesättigt zu erhalten, und war mit einem doppelt durchbohrten Gummistopfen verschlossen. Dieser besaß zwei mit Hähnen versehene Glasröhren, von denen die eine mit dem Vakuumreservoir, die

andere aber mit der Außenluft in Verbindung stand. Nach Schließen des Hahnes H_1 konnte durch Öffnen von H_2 die gewünschte Entspannung bewirkt werden; durch Öffnen von H_1 wurde der Unterdruck wieder ausgeglichen. Das Vorvakuum hatte den Zweck, auch nach mehreren Entspannungen einen nahezu konstanten Unterdruck von 30—40 cm zu erhalten.

Kondensationskerne wurden durch Einsaugen von Flammengasen, welche sehr kräftig auf die Nebelbildung wirken, in das Gefäß G gebracht; meistens enthielt aber die Zimmerluft schon genügend Kerne, um gute Beugungsbilder zu liefern. Trat hingegen bei den ersten Entspannungen zu dichter Nebel auf, so mußte durch mehrere kräftige Entspannungen ein Teil der Kerne entfernt werden. Zweckmäßig wurde dabei die einströmende Luft durch kernfreie ersetzt, was dadurch ermöglicht wurde, daß die eintretende Luft erst durch ein Filter, bestehend aus einer 30 cm langen, dicht mit Watte gefüllten Glasröhre gesaugt wurde. Dabei konnte die Mehrzahl der im Nebelgefäß vorhandenen Kondensationskerne entfernt werden und man erhielt dadurch einen dünnen Nebel, bestehend aus großen Tropfen, welche allerdings bei ihrer Größe sehr schnell zu Boden sanken. Die Beobachtung war bei diesem dünnen Nebel sehr erschwert. Durch geeignete Druckverminderung, hervorgerufen durch längeres oder kürzeres Öffnen des Hahnes H_2, gelingt es nach einiger Übung bei dieser Versuchsanordnung leicht, jede Tropfengröße und jede beliebige Färbung des zentralen Feldes herzustellen.

Da die Beugungserscheinungen, die besonders bei weniger dichtem Nebel und im monochromatischen Lichte sehr schwer erkennbar sind, ein Experimentieren im vollkommen dunklen Zimmer notwendig machten, wurde folgende Meßanordnung gewählt:

Die Lichtquelle war von vorne durch einen aus schwarzer Pappe bestehenden, lichtundurchlässigen Schirm abgeblendet. In diesem war zur Erzielung einer scharfbegrenzten Lichtquelle eine kreisrunde Öffnung geschnitten, welche je nach der erforderlichen Lichtstärke einen Durchmesser von 2 oder 10 cm hatte. Der Maßstab wurde nun, von der Mitte der Öffnung ausgehend, in den Pappschirm eingestochen und von hinten durch eine Glühlampe beleuchtet. Für die zur Messung hinreichende Genauigkeit genügte die einfache Zentimeterteilung;

die halben Dezimeter wurden durch 2 Stiche, die ganzen Dezimeter durch 3 Stiche kenntlich gemacht. Auf diese Weise erhielt ich einen im gänzlich dunklen Zimmer gut sichtbaren Maßstab, welcher recht genaue Messungen zuließ.

Als Lichtquelle benutzte ich das durch eine Mattscheibe diffus gemachte, weiße Licht einer Bogenlampe, welche mittels einfachen Vorschaltens eines Filters, bestehend aus einer hinreichend konzentrierten Lösung von Kaliumpermanganat und Kaliumbichromat, nach Bedarf monochromatisch gemacht werden konnte. Dieses Filter ließ nur rotes Licht bis zur Wellenlänge von 0,57 μ hindurch und besaß somit eine mittlere Wellenlänge von 0,65 μ. Nach Aufstellen des planparallelen Gefäßes auf ein leichtbewegliches Tischchen war ein schnelles Ein- und Ausschalten des Filters vom Beobachtungsplatze aus möglich, und die Versuche konnten im weißen und roten Lichte unmittelbar hintereinander ausgeführt werden. Es war dies für vergleichende Beobachtungen sehr wünschenswert. Zur Erzielung von streng monochromatischem Licht nahm ich einen breitbrennenden Bunsenbrenner, dessen Flamme durch geschmolzenes Kochsalz, das auf einer Asbestplatte in die Flamme gehalten wurde, intensiv gefärbt war. Mittels eines Hohlspiegels und einer großen Sammellinse konnte das Licht noch mehr auf die Blende konzentriert werden. Obwohl so eine recht helle Natriumbeleuchtung erzielt wurde, mußte doch zur Sichtbarmachung der Ringe die größere Öffnung von 10 cm Durchmesser genommen werden, was bei dem starken Bogenlicht hingegen nicht erforderlich war.

Für die Messungen wandte ich fast ausschließlich die subjektive Beobachtungsmethode an, welche mit der objektiven im Prinzip übereinstimmt, aber bei der großen Unbeständigkeit des Nebels schnellere und sicherere Beobachtung zuläßt. Das Nebelgefäß war im Durchschnitt 130—150 cm vom Schirm entfernt, und das Auge befand sich unmittelbar dahinter. Indem es durch den Nebel zur Lichtquelle blickte, wurden so die Beugungsringe auf einen dunklen Hintergrund projiziert. Die geringe Entfernung des Nebelgefäßes von der Lichtquelle war bei der Kleinheit der Tropfen vollkommen hinreichend, um die für die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen geforderte Parallelität der Strahlen zu gewährleisten. Andererseits ist ein größerer Abstand nicht zweckdienlich, um die

Meßgenauigkeit, welche schätzungsweise 3 Proz. betrug, nicht durch zu große Beugungsringe herabzusetzen.

Experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung im homogenen Nebel.

§ 1. Über den Einfluß der Dicke der Nebelschicht.

Vor Ausführung der eigentlichen Messungen untersuchte ich den etwaigen Einfluß der Dicke der beugenden Schicht auf die Größe der Ringe und ihre Färbung. Indem ich bis zu 8 Glasplatten, auf beiden Seiten mit Lycopodiumpulver bestreut, dicht hintereinander aufstellte und durch sie die Beugungsringe um eine entfernte Lichtquelle beobachtete, fand ich nur in soweit eine Änderung der Erscheinung gegenüber *einer* Platte, als bei zu dichter Bestäubung die Ringe undeutlicher und verwaschener wurden. Es kommt dies wohl dadurch, daß dann zuviel Teilchen die Erscheinung verdecken. Ich möchte hierbei auch folgenden Versuch erwähnen: Stellt man zwei mit Lycopodiumsporen bestäubte Glasplatten soweit voneinander auf, daß die durch die eine Schicht hervorgerufenen Ringe bedeutend kleiner, etwa halb so groß, erscheinen als die anderen (ungefähr in 1 und 2 m Entfernung von der Lichtquelle), so lagern sich nicht, wie man erwarten sollte, beide Ringsysteme übereinander. Je nach der Stärke der Bestäubung sieht man entweder die größeren oder die kleineren Ringe; nur bei einem bestimmten Bestäubungsverhältnis gelang es mir, beide Beugungserscheinungen zur gleichen Zeit als einfache Übereinanderlagerung zu beobachten.

Auch bei Ausführung der obigen Versuche mit Bovistsporen (Boletus cervinus) oder mit in Wasser aufgeschwemmtem Lycopodiumpulver konnte ich eine Größenänderung der Ringe oder einen Farbenwechsel nicht feststellen. Der letztere Versuch mit Lycopodium, welches durch kräftiges Schütteln in Wasser fein verteilt wurde, dürfte wohl, abgesehen von der Größe der Teilchen, den beim homogenen Nebel tatsächlich vorliegenden Verhältnissen am nächsten kommen. In der Literatur fand ich außerdem von Barus[1]) eine experimentelle Untersuchung, wonach die im homogenen Nebel zu beobachtenden Erscheinungen bei einer Dicke der Nebelschicht von

1) C. Barus, Sill. Journ. (4) 31. S. 564—566. 1911.

15 cm bis zu ihrer dreifachen (45 cm) genau dieselben bleiben. Ein erheblicher Einfluß der Tiefenausdehnung dürfte somit nicht vorhanden sein, wie auch aus folgender Überlegung zu schließen ist: Das Nebelgefäß G befindet sich in der Entfernung l von der Lichtquelle L (Fig. 1a). Das von ihr auf die in der Blickrichtung $CEFA$ sich befindenden Tröpfchen fallende Licht wird, damit es ins Auge des Beobachters bei A gelangt, um Winkel zwischen φ_1 und φ_2 abgebeugt. Das Auge projiziert dann alle diese Strahlen auf dieselbe Stelle C des Schirmes. Die Maximaldifferenz der verschiedenen Beugungswinkel, $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2$, ist nun gering und beträgt bei den in der Beschreibung der Versuchsanordnung gegebenen Abmessungen im Höchstfalle nur $1^1/_2$ Proz. Außerdem kommen für die Beugung

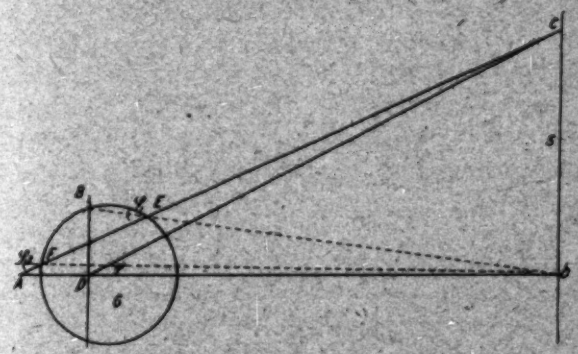


Fig. 1a.

hauptsächlich die in der Nähe des Auges sich befindenden Tropfen in Betracht, da diese die an weiter entfernt liegenden Tröpfchen gebeugten Strahlen verdecken; für ungebeugtes Licht fällt dies bei seiner erheblich größeren Helligkeit nicht so ins Gewicht. Um also einen mittleren Beugungswinkel zu erhalten, kann man annehmen, daß die Teilchen alle in einer Ebene BD sich befinden, die aber wohl nicht durch den Mittelpunkt des Nebelgefäßes G geht, sondern eher näher dem Auge zu liegt. Der mittlere Beugungswinkel ist dann mit großer Annäherung gleich dem Winkel CDL und für diesen gilt die Beziehung

$$\sin\varphi = \frac{s}{\sqrt{s^2 + l^2}} \sim \frac{s}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{l^2}\right).$$

§ 2. Untersuchung des Beugungsbildes im weißen Licht.

Die Farbenerscheinungen, die das Beugungsbild in weißen Licht zeigt, sind schon von einigen Autoren näher beschrieben worden. Kießling[1]) stellt fest, daß die Farben den Charakter von Mischfarben haben, welche aber mit einem eigentümlichen mattglänzenden Metallschimmer übergossen sind, so daß eine genaue Beschreibung der Farben schwierig ist. Er vermutet aus der rein qualitativen Beobachtung der Erscheinung eine Abhängigkeit der Färbung des zentralen Feldes von der Tropfengröße, indem es mit wachsendem Tropfenradius die in der Einleitung auf S. 474 erwähnten Farbtöne durchläuft. Für die Aufeinanderfolge der Farben in den Ringen gibt er keine genaueren Angaben, sondern stellt nur fest, daß hierin keine Gesetzmäßigkeit zu bestehen scheint. Barus[2]) erwähnt in seinen Untersuchungen über die Anzahl der vorhandenen Kondensationskerne die Farbenfolge für einige Tropfengrößen. Außerdem findet er aber, daß bei dichtem Nebel auch die Lichtquelle selbst gefärbt erscheint (axial colours) und zwar merkwürdiger Weise nahezu komplementär zu der Färbung des sie umgebenden zentralen Feldes.

Um ein klares Bild über diese Beugungserscheinung im homogenen Nebel zu erhalten, besonders um für jede Tropfengröße das ihr charakteristische Farbenbild festzulegen, versuchte ich die Farbenfolge in den Ringen bei verschieden gefärbten zentralen Feldern möglichst genau zu bestimmen. Mit wachsender Tropfengröße (d. h. mit zunehmender Expansion) durchläuft die Färbung des *zentralen* Feldes drei Perioden, indem in jeder Periode die Farbe von violett über blau, grün, gelb, rot und purpurn nach violett zurückwechselt. Die erste Periode zeigt große, schön satt gefärbte zentrale Felder, welche infolge der Größe der Ringe nicht allzu lichtstark sind. Auch sind dadurch wenig andere Farben zu sehen. In den folgenden Tabellen ist die erste Farbe stets die des zentralen Feldes, worauf dann die anderen auffallendsten Farben von innen nach außen sich anschließen.

---

1) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 117 ff. 1884.
2) C. Barus, Sill. Journ. 18. Boltzmann-Festschrift 1904. S. 207 ff.

Tabelle 1.

Erste Periode.

Nr.	r^1)	Zentrales Feld	Ringe
1	1,0 μ	hellviolett	grün
2	1,06	blauviolett	gelbgrün
3	1,2	hellblau	grün, rosa
4	1,27	blau (grünlich)	dunkelblau, rot
5	1,32	grünblau	hellviolett (rötlich)
6	1,4	grün	violettblau, hellgrün, rosa
7	1,45	gelbgrün	blau, rosa
8	1,52	gelb	grün, violett
9	1,57	orange	grün, violett
10	1,60	rot	grün, violett
11	1,63	rot	hellgrün (gelblich), rosa
12	1,66	purpurrot	fahlgrün, rosa
13	1,75	hellpurpur	grün, rötlich, violett

Hierauf folgt nun unmittelbar die zweite Periode, welche kleinere zentrale Felder besitzt und daher auch mehr Farben in den Ringen erkennen läßt. Die Intensität ist eine bedeutend größere, und gerade diese Periode zeigt die prächtigsten und glänzendsten Farbenerscheinungen.

Tabelle 2.

Zweite Periode.

Nr.	r^1)	Zentrales Feld	Ringe
1	1,87 μ	violett	grün, rot, grün
2	1,92	violett	gelb, rot, dunkelblau
3	2,0	graublau	grün, dunkelviolett, gelb
4	2,07	blaugrün	gelb, violett, grün
5	2,09	bläulich grün	gelb, grün, rosa
6	2,15	smaragdgrün	(reines grün), dunkelblau, rot
7	2,22	olivengrün	schmales dunkelblau, rot
8	2,3	grüngelb	blau, grün, rot, violett
9	2,31	grünlich gelb	rot, blau, grün
10	2,32	gelb	rot, grün, violett
11	2,33	gelb	dunkler Streifen (schwach blau, grün, rot, blau), rot
12	2,35	hellorange	rot, grün, violett
13	2,4	hellpurpur	gelbgrün, rosa

1) Die Berechnung dieser Werte für die Tropfenradien folgt aus dem zweiten Teil.

Die dritte Periode ist in der Hauptsache nur eine Wiederholung der zweiten. Die Farben folgen hier sehr dicht aufeinander, so daß es oft schwierig ist, die einzelnen Farbtöne zu unterscheiden. Das zentrale Feld wird immer blasser gefärbt, und schließlich geht die ganze Beugungserscheinung allmählich in die normale Farbenfolge, wie sie Lycopodiumsporen zeigen, über. Sie ist deshalb weniger charakteristisch, und es seien nur einige Farbtöne mitgeteilt.

Tabelle 3.

Dritte Periode.

Zentrales Feld	Ringe
weißgrün	blau, rot
weißgelb	blau, grün, rot
weißorange	grün, violett

Um die Tabellen später nicht wiederholen zu müssen, habe ich hier gleich die entsprechenden Tropfenradien hinzugefügt, wie sie sich aus der Färbung des zentralen Feldes nach der im zweiten Abschnitt entwickelten Theorie ergeben. Ich kann deshalb erst am Schlusse der Arbeit näher darauf eingehen. Gefärbte Beugungsbilder, welche noch kleineren Tropfen als 1 μ Radius entsprachen, konnten aus dem in der Einleitung (S. 477) erwähnten Grunde nicht erhalten werden, da bei zu großer Dichte nur ein weißlicher inhomogener Nebel entstand.

Wie nun aus den Tabellen hervorgeht, ist es nicht möglich, irgendeine Gesetzmäßigkeit in der Farbenfolge der Beugungsringe zu entdecken. Nur das zentrale Feld durchläuft Farben, die in ihrer Aufeinanderfolge denen dünner Blättchen sehr ähneln. Bei seinem Entstehen erweckt das Beugungsbild durch das Kleinerwerden der Ringe den Anschein, als ob die inneren Farben in die Lichtquelle hineinversinken und von außen immer neue hinzutreten, welche sich über die bereits vorhandenen Farben (aber durchaus nicht gleichmäßig) zu schieben scheinen. Indem hierbei einige sich zu breiten Ringen ausbilden, andere hingegen so schmal werden, daß nur ein Übergangston sie anzudeuten scheint, entstehen so die mannigfaltigsten Farbenanordnungen, welche jeder Tropfengröße ein ihr allein eigentümliches Beugungsbild geben. Die Schnellig-

keit, mit der dieser Farbenwechsel erfolgt, ist eine sehr unregelmäßige. Im allgemeinen sind die Beugungserscheinungen der ersten Periode recht unbeständig und wechseln schnell ihre Farben, da infolge der Kleinheit der Tropfen ihr Radius größeren Veränderungen unterworfen ist. Doch auch für die verschieden gefärbten zentralen Felder vollzieht sich der Übergang von einem Farbton in den anderen nicht immer gleichmäßig. So ist z. B. die blaue Farbe des zentralen Feldes äußerst schwer zu erhalten, weil das Violett fast unmittelbar in ein bläuliches oder sogar reines Grün übergeht. Nur durch langsames Expandieren gelang es mir, die tiefblaue Färbung vorübergehend zu erhalten. Sehr charakteristisch und auffallend ist hingegen das schön smaragdgrün gefärbte zentrale Feld (Tab 2, Nr. 6), welches einen Durchmesser von etwa 16° hat. Hieran schließt sich mit scharfer Grenze ein schmaler dunkelblauer Ring von 3° Breite an, gefolgt von einem breiteren roten. Beständig, doch nicht so hervortretend, ist auch das purpurne zentrale Feld.

Da unsere übliche Farbenbenennung recht unvollkommen und auch subjektiver Natur ist, was leicht ein gewisses Farben*suchen* des Beobachters zur Folge haben kann, so bemühte ich mich, die Farben noch genauer zu definieren, leider mit nicht nennenswertem Erfolge. Die Beugungsbilder, welche ja aus Mischfarben bestehen, enthalten immer noch soviel Weiß und allmähliche Übergänge in ihren Farbkomponenten, daß sie kräftige Absorptionsbanden im Spektrum nicht zu geben vermögen. Ich bemerkte deswegen in einem kleinen geradsichtigen Spektroskop auch nur beim Entstehen der Ringe schwache Schatten, welche schnell vom violetten zum roten Ende über das ganze Spektrum hinwegeilten und die ich ohne diese Bewegung nicht gesehen hätte. Ferner versuchte ich einen Vergleich der Farben mit denen des Ostwaldschen Farbenatlasses durchzuführen. Es sind diese jedoch Oberflächenfarben, welche von der Stärke der Beleuchtung abhängen, so daß eine gute Betrachtung derselben im dunklen Zimmer gegen die helle Lichtquelle sehr erschwert ist. Auch war ich mit dem groß angelegten Werke, welches etwa 3500 verschiedene Farbtöne enthält, nicht so vertraut, um in der kurzen Zeit (1—2 Minuten), während welcher das Beugungsbild sichtbar blieb, gleich die richtige Farbe herauszufinden. Nach

längeren Versuchen konnte ich für das Beugungsbild Nr. 6. Tab. 2, welches noch am leichtesten und längstens herstellbar war, etwa folgende Vergleichsfarben feststellen:

grün: 88 *ga*, blau: 50 *ka*, rot: 80 *hb*.

Wir haben es in der Hauptsache mit den sogenannten hellklaren Farben zu tun, doch muß ich wegen der Bedeutung dieser Ostwaldschen Farbenbenennung[1]) auf das dem Atlas beiliegende Heft verweisen.

Ein Ausmessen der Ringe, etwa unter Benutzung des äußeren Randes eines roten Ringes, hielt ich hier, wo die Farbenanordnung eine so überaus verschiedenartige ist, für zwecklos und verschob es auf die Untersuchungen im monochromatischen Licht. Denn nur für die normale Farbenfolge ist die Benutzung der sogenannten Wellenlänge des weißen Lichtes [2]) zulässig, die ja nichts weiter besagt, als daß in diesem Falle das Minimum der Wellenlänge 0,571 μ bei der scharfen Grenze zwischen rot und violett liegt. Hier haben wir es aber anscheinend mit einer ganz anderen Beugungserscheinung zu tun. Ist jedoch im homogenen Nebel die Farbenfolge bei größeren Tropfen in die normale übergegangen, so findet man in der Berechnung der Tropfengröße aus dem ersten und zweiten Ringe auch hier Übereinstimmung (vgl. hierzu § 4 und besonders die Messungen mit Alkoholnebel).

Eine Färbung der Lichtquelle, wie sie Barus als axial colours wahrgenommen hatte, konnte ich nur selten beobachten, da bei dem kleinen Nebelgefäß der Nebel meistens nicht dicht genug war. Verschärft wurde der Farbenkontrast, wenn ich die Beugungserscheinung auf der Mattscheibe eines kleinen photographischen Apparates beobachtete. Auf diese Weise fand ich folgende Färbungen:

Zentrales Feld:	violett	grün	gelbgrün	gelb
Lichtquelle:	gelbgrün	rötlich orange	rotviolett	grünblau.

Eine genaue Farbbestimmung war jedoch sehr schwierig, da die Färbungen äußerst schwach und die Helligkeit der Lichtquelle oft nur ihren Farbton vermuten ließ. Doch scheint aus diesen Beobachtungen und denen von Barus hervorzu-

1) Vgl. auch die Farbenfibel von Ostwald.
2) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 459.

geben, daß die Färbungen häufig, wenn auch *nicht immer* genau, komplementär zueinander sind.

§ 3. Messungen im monochromatischen Licht.

Die eben beschriebenen anomalen Farbenerscheinungen lassen schon voraussehen, daß auch im monochromatischen Licht, welches aus der Gesamtwirkung aller Wellenlängen den Einfluß einer einzelnen allein erkennen läßt, erhebliche Abweichungen von der Beugungserscheinung undurchsichtiger, kreisförmiger Scheibchen auftreten werden. Es liegen hier jedoch noch wenige Beobachtungen vor, und die vorhandenen Messungen beschränken sich fast nur auf die Berechnung der Tropfengröße aus dem ersten dunklen Ringe unter Benutzung der Beugungsgleichung undurchsichtiger kreisförmiger Scheibchen. Die Frage aber, ob diese Formel überhaupt für die Beugungserscheinungen im homogenen Nebel angewendet werden darf, wird nicht näher untersucht. Und gerade diese Frage scheint, wenigstens für kleine Tropfen, durchaus verneint werden zu müssen. Schon Barus[1]) fand beim Vergleich der optisch nach der obigen Formel berechneten Tropfenradien mit denen aus der Anzahl der vorhandenen Kondensationskerne gewonnenen (vgl. Einleitung S. 475) Abweichungen, die er zuerst auf subjektive Beobachtungsfehler und Unbeständigkeit der Ringe infolge Verdampfens der Tröpfchen zurückführt. Später kommt er durch die Regelmäßigkeit dieser Abweichungen zu der Ansicht, daß ihre Bedeutung, solange eine Theorie der Erscheinungen noch nicht besteht, schleierhaft bleibt. Seine im grünen Quecksilberlicht ausgeführten Messungen[2]) des Durchmessers vom ersten Ringe und dessen Breite bringen nicht viel positiv Neues, was zur Klärung beitragen könnte. Mierdel[3]) berechnet den Tropfenradius zwar aus den beiden ersten Minima, bemerkt aber dazu, daß „natürlich nur die Ringe ausgemessen werden konnten, deren Minima erster und zweiter Ordnung annähernd gleichstark ausgeprägt waren". Demzufolge bringt er nur zwei Messungen bei größeren Tropfen und findet bei dieser Auswahl dann allerdings Übereinstimmung in den Resultaten.

1) C. Barus, Sill. Journ. **24**. S. 309—312, 419—425. 1907.
2) C. Barus, Sill. Journ. **27**. S. 73. 1909.
3) F. Mierdel, Marb. Dissert.

Die Beugungstheorie undurchsichtiger kreisförmiger Scheibchen verlangt nun, daß die Durchmesser der Ringe stets in einem bestimmten konstanten Verhältnisse zueinander bleiben müssen und daß auch keine Änderung der Intensitätsverteilung eintreten darf. Da die Lage des ersten dunklen Ringes durch

$$\sin \varphi_1 = 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{r},$$

die des zweiten durch

$$\sin \varphi_2 = 1{,}116 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

gegeben ist, so müssen sich also die Radien immer wie 1 : 1,83 verhalten. Barkow[1]) fand nun beim homogenen Licht der Natriumflamme nicht diese gleichmäßige Helligkeitsverteilung, sondern beobachtete oft eigenartige Anordnungen der Maxima und Minima, von denen er vier verschiedene Typen unterscheidet. Auch aus meinen Versuchen ergibt sich durchaus nicht ein regelmäßiges Abwechseln der Maxima und Minima oder gar ein konstantes Verhältnis der Ringe zueinander. Ich möchte die Änderungen, welche das Beugungsbild mit zunehmender Expansion und Tropfengröße erfuhr, wie folgt beschreiben:

Zuerst war bei den kleinsten Tropfen nur ein schwacher, großer, dunkler Ring zu bemerken, welcher allmählich kleiner wurde. Während nun der Radius des bald sichtbar werdenden zweiten Ringes schnell abnahm, verlangsamte sich die Geschwindigkeit des ersten immer mehr und kam schließlich gänzlich zum Stillstande. Die Ringe verbreiterten sich etwas und der erste schien sogar wieder größer werden zu wollen. Das dazwischen liegende Maximum, welches zuerst breit und hell war, schrumpfte zusammen und verlor zusehends an Intensität, bis es schließlich ganz verschwunden war und die beiden Minima sich zu einem einzigen breiten Ringe verschmolzen hatten. Diese Vereinigung dauerte jedoch nur kurze Zeit. Jetzt war es der erste Ring, welcher sich lostrennte und rasch kleiner wurde, während hingegen der zweite konstant blieb und sich auch mit dem dritten zu vereinigen schien. Zu gewissen Augenblicken waren drei schmale Minima und gut ausgeprägte Maxima zu sehen, so daß das Beugungsbild ganz den nor-

1) Barkow, Marb. Dissert. S. 77.

malen Eindruck machte. Dieser Vorgang des Treffens und wieder Auseinandergehens der Ringe wiederholte sich nun noch einmal, und das Beugungsbild ging dann allmählich mit kleineren Schwankungen in das normale über. Von jetzt ab ändern sich die Ringe nur noch im konstanten Verhältnisse zueinander.

Auch hinsichtlich der Breite und Helligkeit sind die Ringe Änderungen unterworfen, indem oft ein Schmälerwerden und erhebliche Aufhellung der Minima zu bemerken ist. Bei Messungen im Natriumlicht konnte ich sogar ein gänzliches Verschwinden des ersten Ringes beobachten. Da ich aber bei diesen Beobachtungen die große Öffnung von 10 cm Durchmesser nehmen mußte, um das Beugungsbild überhaupt sichtbar zu machen, so kann dies auch darin seine Erklärung finden, daß bei der großen Ausdehnung der Lichtquelle die schwachen Intensitätsunterschiede nicht mehr wahrzunehmen waren.

Dieser ganze Vorgang, welchen das Beugungsbild mit wachsender Tropfengröße durchläuft, ist also ein so auffallend eigenartiger und weist so große Abweichungen in den Ringen auf, daß man erst gar nicht wagt, daraus den Tropfenradius nach der alten Formel zu berechnen. Ich habe deswegen auch in der folgenden Tabelle nur die Beugungswinkel der Minima und das jeweilige Verhältnis der Ringe zueinander angegeben. Es wurden stets die beiden Ränder, der äußere und innere, gemessen und jedesmal das arithmetische Mittel daraus genommen. Hiervon mußte dann noch die Ausdehnung (Radius) der Lichtquelle (1 cm) abgezogen werden, um den richtigen Beugungswinkel zu erhalten. Die in Tabellen 4 und 5 enthaltenen Werte verstehen sich für rotes Licht und sind Mittelwerte aus 3 bis 8 Einzelmessungen. Die gleichzeitige Färbung des zentralen Feldes wurde nach der auf S. 481 angegebenen Methode der Einschließung vor und nach der Messung im roten Licht bestimmt.

Bei Verwendung von Natriumlicht wurden dieselben Werte erhalten, doch sind hier die Messungen durch die notwendig große Ausdehnung der Lichtquelle weniger zuverlässig. Auch hier fand ich z. B. durch die Vereinigung der beiden Ringe zwischen $8^0\ 25'$ und $17^0\ 15'$ ein breites Minimum. Es erübrigt sich deshalb, die Werte hierfür noch einmal zu wiederholen.

Tabelle 4.

Nr.	φ_1	φ_2	Bemerkungen	$\sin\varphi_1 : \sin\varphi_2$
1	11° 55′	Von 18° 25′	an breites Minimum, äußere Rd. nicht erkennbar, zentrales Feld rot (Tab. 1, Nr. 10).	
2	11° 30′	Von 21° 30′	an breites Minimum, äußere Rd. nicht erkennbar, zentrales Feld purpurrot (Tab. 1, Nr. 12).	
3	8° 50′	19° 40′	z. F. bläulich grün (Tab. 2, Nr. 5), breites 2. Maximum.	1 : 2,3
4	8° 55′	19°	grün (Tab. 2, Nr. 6).	1 : 2,19
5	8° 57′	18° 15′	grüngelb (Tab. 2, Nr. 8) 1. Ring etwas größer.	1 : 2,09
6	9° 12′	16° 46′	gelb, grünlich (Tab. 2, Nr. 9—10) 2. Maximum nur schwach.	1 : 1,86
7	Von 8° 25′	bis 17° 15′	sehr breites Minimum, beide Ringe vereinigt, gelb (Tab 2. Nr. 11) (22° 20′ dritter Ring)	
8	8° 47′	17°		1 : 1,97
9	7° 56′	17° 16′	2. Ring etwas größer geworden	1 : 2,23
10	7° 15′	16° 45′		1 : 2,37
11	6° 34′	15° 20′	gelb, dritte Periode (Tab. 3)	1 : 2,38
12	6° 20′	14° 15′	orange, dritte Periode (Tab. 3)	1 : 2,22
13	6° 15′	13° 10′		1 : 2,14
14	6° 22′	12° 31′	20° 40′ dritter Ring sichtbar	1 : 2,0 : 3,39
15	6° 30′	11° 48′	18° 40′ drittes Minimum	1 : 1,84 : 2,97
16	Von 6° 22′	bis 12° 57′	sehr breites Minimum, beide Ringe vereinigt	
17	6° 26′	10° 43′	17° 50′ dritter Ring 2. Maximum nur schwach.	1 : 1,67 : 2,9

Während nun bei den vorigen Messungen die Tropfengrößen nach der alten Formel, d. h. der Beugungsformel kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen, nicht berechnet werden konnten, glaubte ich dies jedoch tun zu dürfen, sobald das Beugungsbild den normalen Charakter angenommen hat, und die Ringe sich nur noch im gleichen Abstande voneinander ändern. Wie aus der Tabelle hervorgeht, erhielt ich für diesen Fall auch fast genaue Übereinstimmung der aus verschiedenen Ringen berechneten Tropfenradien mit nur geringen Abweichungen.

Um jene komplizierten Verhältnisse, wie sie besonders bei kleineren Tropfen auftreten, noch klarer zum Ausdruck zu bringen, als das durch die Beschreibung und die Tabellen möglich ist, versuchte ich, die Messungen graphisch darzustellen. Da mir aber jede andere Bezugsgröße, wie z. B. die Tropfen-

größe selbst, fehlt, wählte ich als Abszissenachse die Radien des ersten Ringes und als Ordinatenachse die des zweiten.

Tabelle 5.

φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
4° 35′	4,97 μ	8°	5,15 μ	− 4,2%
3° 51′	5,88	7° 5′	5,90	− 0,3%
3° 39′	6,22	6° 38′	6,25	− 0,5
3° 8′	7,25	5° 55′	7,02	+ 3,2
2° 43′	8,32	5° 5′	8,17	+ 1,8

Der normale Verlauf des Beugungsbildes wäre dann durch eine gerade Linie gegeben, deren tang des Neigungswinkels 1,83 betrüge. In Fig. 2 erkennt man deutlich die Periodizität der Abweichungen, wenn auch die genaue Kurve noch durch mehrere Messungen festgelegt werden müßte. Bei den Spitzen *A* und *B* der Kurve vereinigen sich die beiden Ringe zu dem breiten Minimum und hier tritt dann auch mit wachsender Tropfengröße eine kleine Vergrößerung, zuerst des ersten Ringes und später nach ihrer Trennung des zweiten auf. Werden die Tropfen größer, so nähert sich die Kurve allmählich der Geraden, um von einem Tropfenradius von etwa 4—5 μ ab fast gar keine erheblichen Abweichungen mehr zu zeigen.

Fig. 2.

§ 4. Versuche mit homogenem Nebel anderer Flüssigkeiten.

Um die bei Wasser durch seine thermischen Daten gegebenen Grenzen der Tropfengröße zu erweitern, besonders aber, um die stark vermutete Abhängigkeit der Beugungserscheinungen vom Brechungsexponenten nachzuweisen, stellte

ich noch Versuche mit anderen Flüssigkeiten an. Als gut geeignet hierzu erwiesen sich folgende chemische Verbindungen, deren Brechungsexponenten genau bestimmt waren und zwischen 1,333 (Wasser) und 1,586 (Anilin) lagen: Alkohol, Äther, Chloroform, Benzol, Toluol, Anilin. Vor Ausführung der Versuche wurde jedesmal das Nebelgefäß gut ausgetrocknet, und durch mehrere hintereinander gemachte Expansionen überzeugte ich mich auch davon, daß jegliche Nebelbildung verschwunden war. Durch kräftiges Schütteln und längeres Stehenlassen wurde nun die im Gefäß befindliche Luft mit dem betreffenden Dampfe gesättigt. Es trat dann fast stets sofort kräftige Nebelbildung ein, so daß Kondensationskerne aus Flammengasen nicht erst zugeführt zu werden brauchten, was infolge der leichten Explosionsmöglichkeit einiger Substanzen (Äther, Benzol) nicht zu empfehlen war. Versuchs- und Meßanordnung blieben dieselben.

a) Alkohol, C_2H_5OH, $n = 1{,}363$.

Absoluter Alkohol besitzt einen Brechungsexponenten von 1,36, welcher nahezu gleich dem von Wasser ist. Spielt also die Durchsichtigkeit der Tropfen in der Entstehung der anomalen Beugungserscheinungen eine Rolle, so kann hier kein großer Unterschied bestehen. In der Tat erhielt ich mit Alkoholnebel auch dieselben eigenartigen Erscheinungen wie bei Wasser, indem er gefärbte zentrale Felder zeigt und auch sonst dem Wassernebel äußerst ähnlich ist. Nur können im allgemeinen nicht so kleine Tropfen hergestellt werden; demzufolge treten normale Beugungsbilder mit ungefärbten zentralen Feldern häufiger auf und sind dadurch der Beobachtung leichter zugänglich. In der Tab. 6 gebe ich einige Messungen dieser Ringe wieder, welche ich diesmal aber im weißen Licht unter Benutzung der sogenannten Wellenlänge des weißen Lichtes 0,571 μ ausgeführt habe.

Tabelle 6 (Alkohol).

φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
5° 13′	3,83 μ	9° 27′	3,88 μ	− 1,3%
4° 46′	4,19	8° 47′	4,17	+ 0,5
4° 5′	4,87	7° 35′	4,83	+ 0,8
3° 39′	5,47	6° 48′	5,37	+ 1,8

Danach scheinen die Abweichungen erst bei etwas kleineren Tropfen wie im Wassernebel, wo sie bei etwa 4,5—5 μ beginnen dürften, aufzutreten, was eine eventuelle Abhängigkeit vom Brechungsexponenten andeuten könnte.

b) Äther, $(C_2H_5)_2O$, $n = 1{,}354$.

Obwohl Äther eine positive spezifische Wärme seines gesättigten Dampfes besitzt, tritt doch bei Expansion Nebelbildung ein, wenn der Ätherdampf mit viel Luft gemischt ist, eine eigenartige Erscheinung, die auch R. v. Helmholtz[1]) beobachtet hat. Dagegen bildet er einen nicht durch Kondensation, sondern nur als Schlieren sichtbaren Dampfstrahl. (Auf die Erklärung kann hier jedoch nicht eingegangen werden.) Der Nebel bildet sich erst geraume Zeit nach der Expansion und ist sehr dünn. Es können nur sehr kleine Tropfen entstehen, die rasch wieder verdunsten, so daß der Nebel nicht lange bestehen kann. Auch ist er im ganzen Gefäß nicht homogen, sondern zeigt infolge des Verdunstens merkliche Schichtung, indem die Tropfengröße von unten nach oben hin abnimmt. Sein Brechungsexponent ist 1,354, liegt also zwischen dem von Wasser und Alkohol. Bei der Kleinheit der Tropfen zeigt Äthernebel breite, schön gefärbte zentrale Felder, welche wenig andere Farben in den Ringen erkennen lassen. Die Färbung ist aber durch die Schichtung des Nebels in gleichen Abständen von der Mitte nicht dieselbe, auch bilden die gerade entstehenden Farben sich infolge des schnellen Verdunstens rasch wieder zurück, so daß an eine Beständigkeit der Erscheinung nicht zu denken ist und genaue Beobachtungen unmöglich sind. Besonders schön war hier jedoch die tiefblaue Farbe des zentralen Feldes ausgebildet, welche ja bei Wassernebel nur schwer zu erhalten war. Es ist somit immerhin möglich, daß hier die Tropfen klein genug sind, um Färbungen zu zeigen, welche noch vor denen der ersten Periode (Tab. 1) liegen. Um axiale Farben der Lichtquelle selbst erkennen zu können, war der Äthernebel nicht dicht genug.

c) Chloroform, $CHCl_3$, $n = 1{,}446$.

Ein Einfluß der Durchsichtigkeit der Tropfen auf das Beugungsbild könnte erst jetzt beim Chloroform nachgewiesen

1) R. v. Helmholtz, Ann. d. Phys. u. Chemie 27. S. 508—543. 1886.

werden, da sein Brechungsexponent 1,446 schon mehr als bei Alkohol und Äther von dem des Wasser abweicht. Aber gerade hier liegen die Bedingungen zu ungünstig, um charakteristische Beugungsbilder liefern zu können. Man erhält nämlich nur größere Tropfen, welche normale Beugungsbilder und ungefärbte zentrale Felder liefern, und der Versuch, kleinere durch Einführen von mehr Kondensationskernen zu bekommen, scheitert leider daran, daß der Nebel dann sofort inhomogen wird. Die Messungen selbst, welche Tropfenradien zwischen 4,6 μ und 9 μ ergaben, bieten somit wenig neues und brauchen hier nicht mitgeteilt zu werden. Auch bei diesen Messungen, welche sowohl im roten als auch im weißen Licht ausgeführt wurden, fand ich, wie nach den gemachten Ausführungen zu erwarten war, Übereinstimmung in den Resultaten aus verschiedenen Ringen.

d) Benzol, C_6H_6, n=1,504 und Toluol, $C_6H_5CH_3$, n=1,499.

Benzol und Toluol haben in bezug auf Brechungsexponenten und auch sonstigem Verhalten solch übereinstimmende Eigenschaften, daß es sich empfiehlt, sie zusammen zu behandeln. Bei beiden Flüssigkeiten ist die Nebelbildung eine sehr kräftige, so daß sie glänzende Beugungsringe, von denen stets drei bis vier sichtbar waren, lieferten. Da aber auch hier die Tropfengröße ziemlich groß war, so sank der Nebel rasch zu Boden und machte ein schnelles Messen erforderlich. Allerdings gab Toluol noch etwas kleinere Tropfen als Benzol, doch gelang es mir bei keinem von ihnen, gefärbte zentrale Felder oder anomale Helligkeitsverteilungen zu erhalten, obwohl dies bei Wasser schon längst hätte eintreten müssen. Das Beugungsbild blieb stets normal, wie auch aus den Tabellen hervorgeht, welche ziemlich kleine Tropfenradien erkennen lassen. Es konnten sogar noch größere Beugungsringe als die angegebenen beobachtet werden, doch waren sie dann der Ausmessung nicht mehr zugänglich.

Bis zu einem Tropfenradius von etwa 2,8 μ, bei welchem wir im Wassernebel schon eine recht intensive Färbung des zentralen Feldes beobachten würden (ungefähr Anfang der dritten Periode, Tab. 3), sind hier noch keine Abweichungen zu bemerken, so daß hiermit der Beweis einer Abhängigkeit der anomalen Erscheinungen vom Brechungsexponenten er-

bracht sein dürfte. Allerdings fehlen noch Tropfen kleiner als 2,8 μ, wo wohl auch bei Benzol und Toluol gefärbte zentrale Felder auftreten würden. Für diese noch bestehende Lücke den Einfluß der Durchsichtigkeit der Tropfen nachzuweisen, gestatten mir nun die Versuche mit Anilin, welches verbunden mit einem hohen Brechungsexponenten infolge seiner schweren Flüchtigkeit nur kleine Tröpfchen im Nebel geben kann.

Tabelle 7. Benzol.

λ	φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
0,65 μ	2° 3′	11,08 μ	3° 51′	10,78 μ	+ 2,7%
0,65	2° 43′	8,32	4° 59′	8,32	± 0,0
0,65	3° 14′	7,03	5° 54′	7,03	± 0,0
0,65	3° 39′	6,23	6° 48′	6,10	+ 2,1
0,65	4° 33′	4,98	8° 21′	4,98	± 0,0
0,65	5° 32′	4,08	10° 8′	4,11	− 0,7
0,571	2° 16′	8,76	4° 5′	8,95	− 2,2
0,571	3° 11′	6,26	5° 54′	6,21	+ 0,8
0,571	3° 51′	5,18	7° 13′	5,07	+ 2,1

Tabelle 8. Toluol.

λ	φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
0,650 μ	2° 38′	8,61 μ	4° 53′	8,54 μ	+ 0,8%
0,650	3° 11′	7,15	5° 54′	7,06	+ 1,2
0,650	3° 39′	6,24	6° 33′	6,34	− 1,6
0,650	5° 54′	3,86	10° 33′	3,96	− 2,5
0,650	7° 26′	3,06	13° 53′	3,02	+ 1,3
0,571	3° 39′	5,48	6° 48′	5,38	+ 1,8
0,571	5° 25′	3,69	9° 54′	3,71	− 0,5
0,571	5° 54′	3,39	10° 42′	3,43	− 1,2

e) Anilin, $C_6H_5 \cdot NH_2$, $n = 1{,}586$.

Das Beugungsbild des Anilinnebels besteht aus sehr großen, intensiv gefärbten zentralen Feldern, welche manchmal eine solche Ausdehnung annehmen, daß das ganze Gesichtsfeld gleichmäßig gefärbt erscheint. Dadurch verliert die Erscheinung etwas an Intensität und Farbenmannigfaltigkeit. Sonst ist aber die Farbenfolge und Anordnung genau dieselbe wie beim Wassernebel, nur daß hier die Ringe bei gleicher Färbung ganz bedeutend größer sind. So gelang es mir nach

vielen Expansionen, das für Wassernebel so charakteristische grüne zentrale Feld herzustellen. Auch hier wird es von einem schmalen dunkelblauen Bande begrenzt und das daran sich anschließende Rot war gerade noch sichtbar. Während aber bei Wasser die Minima Radien von 8° 55′ und 19° (Tab. 4, Nr. 4) besaßen, entsprach hier im roten Licht der erste dunkle Ring einem Beugungswinkel von 14° 35′ und der zweite war überhaupt nicht mehr zu sehen. Bei gleichem Aussehen hat also das Beugungsbild eine 1,66 mal so große Ausdehnung, was ungefähr gleich dem Verhältnis der um 1 verminderten Brechungsexponenten 0,586 : 0,333 = 1,758 ist. Noch größere Tropfen herzustellen, welche etwa normale Beugungsbilder lieferten, war mir nicht möglich, doch dürfte schon zur Genüge erwiesen sein, daß die anomalen Beugungserscheinungen an um so kleineren Tropfen auftreten, desto größer der Brechungsexponent wird.

§ 5. Vergleichsmessungen mit Pilzsporen.

Am Schlusse dieser Untersuchungen möchte ich noch kurz Versuche erwähnen, welche ich mit Pilzsporen und Schwefeltröpfchen anstellte, um den Einfluß der Durchsichtigkeit zu eliminieren. Aus vielen Messungen, die ich mit Lycopodiumpulver in einer Entfernung von 1—3 m von der Lichtquelle machte, erhielt ich im Durchschnitt aus dem ersten Ringe einen Radius von 15,16 μ aus dem zweiten 15,16 μ, aus dem dritten 15,22 μ, und mikroskopisch gemessen durchschnittlich 15,3 μ, so daß, wie selbstverständlich zu erwarten war, vollständige Übereinstimmung mit der Theorie kreisförmiger Scheibchen besteht. Allerdings würde auch homogener Nebel bei dieser Tropfengröße normale Beugungsbilder liefern; doch Barkow[1]) fand bei Schimmelsporen von 1,15 μ bis 6,6 μ Radius, welche also gerade von der für Nebeltröpfchen in Betracht kommenden Größenordnung sind, keine merklichen Abweichungen von den optisch nach der Beugungsformel und mikroskopisch gemessenen Werten. Ich selbst stellte mir aus angefeuchtetem Brot Schimmelpilze her, deren Sporen mikroskopisch gemessen ungefähr 1,5 μ groß waren, und bestreute

1) E. Barkow, Marb. Dissert. S. 67. Die dort angegebenen Werte beziehen sich auf den Durchmesser der Sporen (nicht Radius).

damit eine Glasplatte. Das Beugungsbild war vollkommen normal und so groß, daß nur der erste Ring mit einem Beugungswinkel von etwa 14° 50′ im roten Licht sichtbar war.

Ferner ließ ich Schwefeldampf an einer kalten Glasplatte sich kondensieren. Nach anfänglichen Mißerfolgen bekam ich schließlich einen Beschlag, deren Teilchen hinreichend homogen waren, doch war die Beugungserscheinung eine gänzlich andere. Das zentrale Feld war dunkel, und daran schloß sich ein tiefblauer und ein roter Ring an, dann erst waren schwach die Fraunhoferschen Beugungsringe zu erkennen. Sein Analogon findet diese Beugungserscheinung in den Ringen behauchter Platten, welche Exner[1]) als ein Phänomen Fraunhoferscher Ringe beschreibt, deren Aureole infolge nicht völlig unregelmäßiger Verteilung der Tröpfchen sich zum Teil in einen dunklen Raum verwandelt hat. In der Tat erkennt man im Mikroskop, daß die Teilchen ziemlich *gleichmäßig verteilt*, aber *regellos angeordnet* sind, indem die Abstände der einzelnen Tröpfchen voneinander nahezu dieselben sind.

Zusammenfassung.

Fasse ich die Hauptergebnisse der Untersuchungen zusammen, so läßt sich folgendes sagen:

Die Beugungserscheinungen, welche homogener Nebel im durchgehenden Licht zeigt, lassen sich *nur* bis zu einer Tropfengröße von 4—5 μ Radius durch die Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen erklären.

Bei *kleineren* Tropfen treten im *weißen* Lichte andere Erscheinungen auf; das zentrale Feld, welches bis jetzt weiß war, nimmt intensive Färbungen an, die in ihrer Aufeinanderfolge den Farben dünner Blättchen ähneln. Die Lichtquelle selbst ist bei dichtem Nebel meistens ungefähr *komplementär* dazu gefärbt. Eine Gesetzmäßigkeit der Farbenfolge in den Ringen ist *nicht* zu konstatieren.

Im *monochromatischen* Licht weisen die Beugungsbilder eigenartige Anordnungen der Maxima und Minima auf, welche einen deutlich periodischen Charakter besitzen. Eine Bestimmung der Tropfengröße aus den Durchmessern der Ringe war deshalb *nicht* möglich. Die Abweichungen nehmen mit

1) K. Exner, Wied. Ann. 4. S. 531. 1878.

wachsender Tropfengröße ab und das Beugungsbild nähert sich allmählich dem normalen.

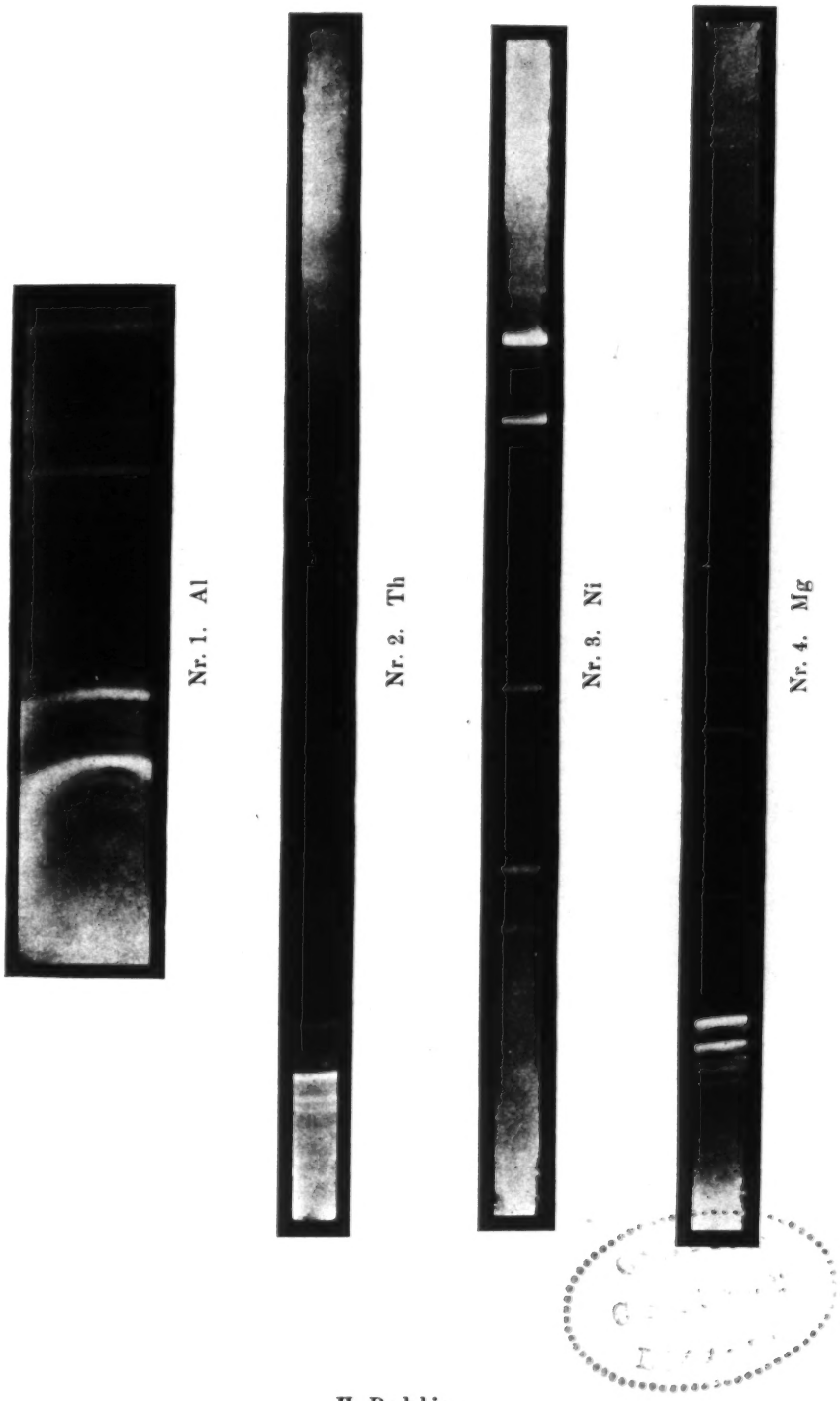
Ein Einfluß der Dicke der Nebelschicht auf diese Erscheinungen konnte nicht nachgewiesen werden. Wohl aber geht aus den Versuchen mit anderen Flüssigkeiten einwandsfrei hervor, daß die Durchsichtigkeit der Tropfen zur Entstehung der anomalen Beugungsbilder beiträgt, indem diese an um so kleineren Tropfen auftreten, desto größer der Brechungsexponent wird.

Vergleichsmessungen an Staubplatten ergaben keine Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen.

Physikal. Institut der Universität Marburg i. H., Juni 1919.

(Eingegangen 16. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



H. Bohlin.

Inhalt

Seite

1. O. Lehmann. Über Kontaktverdrehung bei schiefwinkelig flüssigen Kristallen 501
2. Wilhelm Trenkle. Die Dispersion der Luft im ultravioletten Spektrum 533
3. K. Försterling. Spezifische Wärme und Zustandsgleichung von Kristallen 549
4. K. Försterling. Über die Verschiebung des Maximums der Reflexion gegen die Lage der Eigenfrequenz 577

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 2.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den Satz Dritte für die verwendeten Worte nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls mehrere verlangt werden, so sind die bei Rücksendung der ersten Korrekturbogen an die Druckerei auf dessen unterer Rand beizuschreiben. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bitte man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Autorkorrekturen. Abänderungen der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzungen derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Redaktionen sind für möglichst sorgfältige Ausführung der Abbildungen und besonders Bildern, Schaltungen (nicht in den Figuren selbst einzuzeichnen). Da die Figuren meist möglichst in den Text eingedruckt werden sollen, ist die Größe der Manuskripte meist genau anzugeben, wie sie eingeliefert.

Bilder sind (im Manuskript oder unten) auf den Rahmen des Manuskriptes bezüglich des Textes anzugeben und zwar möglichst in der in den „Vorschriften über die Abfassung von Arbeiten für die Annalen der Physik“ (Beiblatt zu Heft 1 jeden Jahrganges) angegebenen Weise.

1920. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Über Strukturverdrehung bei schleimig-flüssigen Kristallen;*

von O. Lehmann.

Das Wachsen der Kristalle in polyedrischen oder sonst von der Kugelform stark abweichenden Gestalten, die Abhängigkeit ihrer Elastizität, dielektrischen Polarisation, elektrischen Leitfähigkeit und anderer Eigenschaften von der Richtung, ganz besonders aber die Abbeugung durchgehender Röntgenstrahlen beweisen, daß die Kristalle aus sehr kleinen Teilchen gesetzmäßig aufgebaut sind, welche nicht nur zentrale Kräfte, ähnlich der Gravitationskraft, sondern, wie aus dem Verhalten flüssiger Kristalle folgt, auch richtende Kräfte (Kräftepaare), ähnlich elektrischen Dipolen oder Magnetnadeln aufeinander ausüben.

Die Übereinstimmung der Umwandlungstemperaturen enantiotroper Modifikationen bei Umwandlung im einen und anderen Sinn[1]), die Raumgitterstörung durch mechanische Deformation[2]) und fremde Beimischungen[3]), die Existenz flüssiger Kristalle[4]) und das Verhalten amorpher Körper[5]) beweisen ferner, daß die aus alter Zeit stammende *Identitätstheorie der Aggregatzustände* (welche noch immer in Lehrbüchern als Axiom eingeführt wird), gemäß welcher die Kristallteilchen, einfache chemische Moleküle, ebenso wie die Gasmoleküle (in Fig. 1 schematisch für zwei einwertige Atome dargestellt) sein sollen, unzutreffend ist.

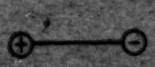


Fig. 1.

Zu gleichem Ergebnis führen die Braggschen Untersuchungen über Röntgenstrahleninterferenzen[6]), nach welchen

1) Vgl. O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. Wiesbaden, J. F. Bergmann 1918, S. 261.
2) Derselbe, ebenda, S. 264.
3) Derselbe, ebenda, S. 270.
4) Derselbe, ebenda, S. 273ff.
5) Derselbe, ebenda, S. 263 u. 507.
6) W. H. u. W. L. Bragg, Zeitschr. anorg. Chem. 90, S. 153. 1914.

beispielsweise in Kristallen von Chlornatrium Natrium- und Chloratome regelmäßig miteinander abwechseln, daß also, wenn man sich auf eine Ebene beschränkt, die Struktur eines kleinsten Kristallpartikelchens die in Fig. 2 dargestellte sein müßte, wobei Kreise mit + Zeichen Natrium, solche mit − Zeichen Chloratome vorstellen mögen. Da Natrium und Chlor beide einwertig sind, wäre das Partikelchen nicht ein aus zwei Gasmolekülen (Fig. 1) zusammengesetztes chemisches Molekül im Sinne der gewöhnlichen, die Grundlage der Chemie bildenden Strukturtheorie. Insofern ein Chlornatriumkristall ein regulärer Würfel ist, darf überdies die Betrachtung nicht auf eine Ebene beschränkt bleiben; man müßte vielmehr dem kleinsten Kristallteilchen eine noch kompliziertere Struktur, nämlich die von Fig. 3 zuschreiben und somit beide Atomarten als dreiwertig betrachten, was mit den chemischen Er-

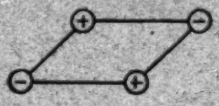


Fig. 2.

Fig. 4.

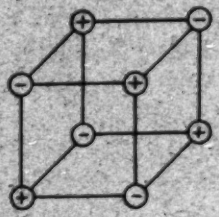


Fig. 3.

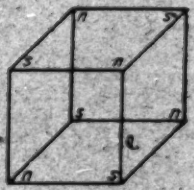


Fig. 5.

fahrungen noch weniger vereinbar ist. Die Vergrößerung des Komplexes durch Hinzufügung weiterer Atome würde sogar Erhöhung der Valenzzahl auf 4 erfordern.

Faßt man die verbundenen Atome als Ionen auf, so würde sowohl das System Fig. 2, wie das System Fig. 3 ein *astatisches elektrisches System* sein, welches keine elektrischen Fernkräfte ausübt und durch solche nicht in bestimmte Richtung gestellt wird, ähnlich wie eine gehärtete Stahlplatte (Fig. 4) oder ein Stahlwürfel (Fig. 5), deren Ecken abwechselnd entgegengesetzte Magnetpole aufweisen, *astatische Magnetsysteme* sind.

Meine eigenen Untersuchungen über die eingangs genannten Erscheinungen[1]) hatten auf ganz anderem Wege zu dem Ergebnis geführt, daß die Gasmoleküle sich zu Kom-

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallographie 1. S. 97. 1877; Molekularphysik 1888/89; Zeitschr. phys. Chem. 71. S. 355. 1910.

plexen, den Flüssigkeitsmolekülen und diese zu noch größeren Komplexen (andere Modifikationen) vereinigen können, obschon die Wertigkeiten der chemischen Strukturtheorie dies nicht als möglich erscheinen lassen. Doppelsalze und kristallwasserhaltige Salze waren ein anderer Fall lockerer chemischer Verbindungen, für welche die gewöhnlichen Valenzen nicht maßgebend waren, die man deshalb, im Gegensatz zu den atomistischen, als „*Molekularverbindungen*“[1]) bezeichnete. Aus diesem Grunde betrachtete ich auch die sogenannten „*drei Aggregatzustände und Modifikationen eines Körpers*“ als „*molekular-isomere*“ (physikalisch-isomere) *chemische Verbindungen*, da sie im Gegensatz zu den atomistisch-isomeren sehr leicht (z. B. schon durch Temperatur- und Druckänderungen) ineinander umgewandelt werden können und in manchen Fällen sich mischen (z. B. Gas- und Flüssigkeitsmoleküle bei der kritischen Temperatur) in einem stark von Temperatur und Druck abhängigen Mengenverhältnis (chemisches Gleichgewicht).

Vom Standpunkt der elektromagnetischen Theorie der Materie und auf Grund des Verhaltens der flüssigen Kristalle ergaben sich für die Konstitution der Moleküle der letzteren wieder auf ganz anderem Wege dieselben Strukturbilder.[2]) Speziell wurden hier Magnetfelder erzeugt durch kreisende Elektronen als Ursache der abwechselnd entgegengesetzten Polarität der Würfelebenen angenommen.[3])

Die Erscheinungen der Radioaktivität, der gesetzmäßigen Anordnung der Linien in Licht- u. Röntgenspektren, die Quantentheorie usw. führten in einzelnen Fällen zur Konstruktion von Atom- und Molekularmodellen (für Wasserstoff von Debye, für Sauerstoff von Sommerfeld), welche mit den Eigenschaften der betreffenden Stoffe in guter Übereinstimmung stehen und deren neueste von Born[4]) ersonnene Arten sich

1) Vgl. A. Werner, Neuere Anschauungen a. d. Geb. d. anorgan. Chemie. 3. Aufl. 1913; „*Scheinassoziationen*“ von van der Waals.

2) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 10. S. 553. 1909; Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 344ff.; Prometheus 25. S. 4. Fig. 3. 1913; A. Landé, Ber. d. D. Phys. Ges. 21. S. 2, 644, 653. 1919.

3) Derselbe, Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 354—356. Fig. 227 u. 231.

4) M. Born, Ber. d. D. Phys. Ges. 20. S. 210, 230. 1918; vgl. auch A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien 1919 u. K. Fajans, Radioaktivität 1919.

wenig von den genannten unterscheiden, die von mir aus dem Verhalten der flüssigen Kristalle abgeleitet wurden, insofern sie ebenfalls räumlich astatische Systeme sind. Nahe zusammengebracht müssen astatische Magnetsysteme, wie Fig. 5, Richtkräfte aufeinander ausüben, durch welche sie, falls sie hinreichend leicht beweglich sind, gezwungen werden, sich zu *Raumgittern* zu ordnen. Könnte man annehmen, es bestünden zugleich abstoßende Kräfte zwischen ihnen (etwa infolge geeigneter Verteilung der elektrischen Ladungen), welche die magnetischen Anziehungskräfte bei gewissem Abstand gerade kompensieren[1]) und wäre dieser Abstand gleich dem Durchmesser, so würden sich parallel ineinandergestellte Raumgitteranordnungen der verschiedenen Atomarten ergeben, wie sie nach der auf die Braggschen Untersuchungen gegründeten *„Atomgruppierungstheorie"*, welche die Kristalle selbst als große Moleküle betrachtet, tatsächlich vorhanden sein soll.[2])

Wie aber auf Grund dieser Annahme die Tatsachen erklärt werden sollen, welche zur Aufstellung der *„Theorie der molekularen Isomerie"* geführt haben, bleibt unklar. Voraussichtlich wird die Anwendung der Röntgenstrahlenmethode auf die genannten Fälle die letztere Theorie bestätigen, nicht aber die Atomgruppierungstheorie. Es wären insbesondere zu untersuchen: die Strukturen der fünf festen Modifikationen des Ammoniumnitrats[3]), die der Eisensalmiak-Mischkristalle[4]) und die der flüssigen Kristalle des Ammoniumoleats[5]) und anderer Stoffe.

---

1) Vgl. mein Buch: Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 356. Fig. 231. Auch Wärme- u. Strahlungsdruck kommen in Betracht.

2) P. v. Groth, Zeitschr. f. Kristallogr. 54. S. 65. 1914; Die Naturwissenschaften 7. S. 648. 1919; W. L. Bragg, X-rays and crystal structure 1915; F. Rinne, Zeitschr. f. anorg. Chem. 96. S. 317. 1916; Sächs. Akad. d. Wiss. 71. S. 81. 1918; Zentralbl. f. Min. 1919. S. 161.

3) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. S. 97. 1877; Molekularphysik 1. 1888; Ann. d. Phys. 8. S. 903. 1902; Zeitschr. phys. Chem. 71. S. 355. 1910; Das Kristallisationsmikroskop. S. 20. 1610.

4) Derselbe, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. S. 479. 1877; 8. S. 528. 1883; Zeitschr. phys. Chem. 1. S. 15. 1887; Molekularphysik 1. S. 375. 1888; Ann. d. Phys. 8. S. 905. 1902; N. Jahrb. f. Mineral. 2. S. 109. 1915.

5) Derselbe, Zeitschr. f. physik. Chem. 18. S. 91. 1895; Flüssige Kristalle 1904. S. 27; Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. 1912. Nr. 13. S. 14; 1913. Nr. 13. S. 4; Zeitschr. f. Kristallogr. 52. S. 592. 1913; Die Lehre von den flüss. Krist. 1918. S. 281.

Eine sichere Unterscheidung von Strukturen, wie sie die Theorie der molekularen Isomerie verlangt, von denjenigen der Atomgruppierungstheorie wird allerdings durch die Röntgenstrahlenmethode kaum möglich. Beschränkt man sich nämlich, der Einfachheit halber, auf zwei Dimensionen, so würde die Struktur einer größeren Masse nach der letzteren Theorie durch Fig. 6 dargestellt. Würde man nun aus dieser die außerhalb der eingezeichneten Quadrate liegenden Atome wegnehmen, so würde sich dadurch die Röntgenstrahleninterferenzfigur nicht merklich ändern, die Intensität der Lichtflecke würde nur etwas geringer werden. Nun sind aber die von den Quadraten

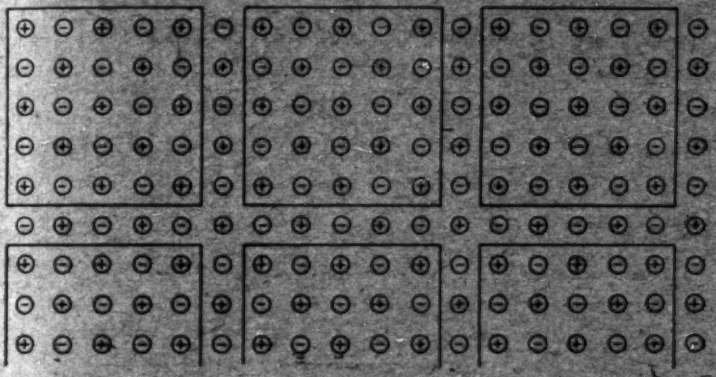


Fig. 6.

umschlossenen Atomgruppen physikalische (Kristall-) Moleküle im Sinne der Theorie der molekularen Isomerie und die Braggsche Auffassung, die Röntgenstrahlenmethode ergäbe die wahre Kristallstruktur, wäre dahin abzuändern, sie ergebe die Struktur der *Kristallmoleküle*[1]) und zwar nach v. Laues Verfahren nur dann, wenn diese sich in geringen Abständen in Raumgitteranordnung befinden, während natürlich bei größeren Abständen oder bei plastisch stark verbogenen oder verdrillten Kristallen eine Superposition der Interferenzflecke der einzelnen

1) Damit stimmen die Ergebnisse bezüglich der sogenannten „künstlichen Zwillingsbildung bei Kalkspat" (vgl. E. Schiebold, Dissert. Leipzig 1918), welche nach meinen Untersuchungen als polymorphe Umwandlung (Änderung der Moleküle) zu betrachten ist (Ann. d. Phys. **50.** S. 562. 1916). Vgl. auch W. Voigt, Ann. d. Phys. **60.** S. 638. 1919.

Kristallmoleküle nicht mehr eintreten wird. Hier kann noch die Methode Debye-Scherrer, die auch auf kristallinische Pulver anwendbar ist, Aussagen über die Struktur der einzelnen Moleküle ermöglichen, natürlich aber nicht über deren Anordnung.

Zum Studium der Anordnung ist nach wie vor die Bestimmung der Auslöschungs- bzw. Verdunklungsrichtungen zwischen gekreuzten Nicols die geeignetste Methode und gerade die *Strukturverdrehungen durch mechanische oder chemische Mittel* dürften am ehesten über die wahre Struktur der Kristalle Aufschluß geben.[1])

Kristalle, bei welchen, wie in Fig. 6 angenommen, die Abstände zwischen den einzelnen Molekülen nur sehr klein sind, dürften hohe Elastizitätsgrenze, also geringe Plastizität zeigen; für homogene schleimig-flüssige Kristalle mit Raumgitterstruktur (oder mindestens parallel gestellten Molekülen), wie sie sich durch Begrenzung mit festen kristallinischen Wänden erzwingen läßt, dürften die Abstände der Moleküle dagegen relativ groß anzunehmen sein, wie auch daraus folgt, daß Lauediagramme bisher nicht erhalten wurden.

Am einfachsten entstehen solche *„erzwungen homogene"* Schichten schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten, wenn man diese durch Erhitzen der zwischen Objektträger und Deckglas kristallinisch erstarrten Schmelze durch Erwärmen über die Umwandlungstemperatur sich bilden läßt, wozu sich besonders Vorländers Paraazoxybenzoesäureäthylester eignet.[2])

Bei solcher enantiotroper Umwandlung entstehen die flüssig-kristallinischen Moleküle, wie sie kurz genannt werden mögen, in regelmäßiger Orientierung gegen die festen, aus welchen sie sich bilden und werden da, wo sie an das Glas angrenzen, durch dessen Adsorptionskraft in dieser Stellung festgehalten. Nach diesen so auf der Glasoberfläche gebildeten anisotropen Häutchen von molekularer Dicke und zäher Konsistenz richten sich die übrigen flüssig-kristallinischen Moleküle, so daß Pseudomorphosen der flüssig-kristallinischen Substanz nach der zuvor vorhandenen fest-kristallinischen ent-

1) Ferner die Analyse durch magnetische (oder elektrische) Kräfte, vgl. O. Lehmann, Phys. Zeitschr. 13. S. 556. 1912.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 12. S. 325. 1903; Flüssige Kristalle 1904. S. 51; Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1911. S. 317.

stehen und zwischen gekreuzten Nicols dieselbe Felderteilung beobachtet wird, wie sie vor der Umwandlung vorhanden war (Fig. 7), wenn auch die Lage der Auslöschungsrichtungen im allgemeinen eine andere ist (Fig. 8) und an den Grenzen Zwischenstellungen der Moleküle auftreten können. Infolge des Dichroismus kann man bei Beleuchtung mit blauem Himmelslicht oder bei künstlichem bläulichen Licht die Grenzen der Felder auch schon bei Benutzung eines einzigen Nicols erkennen. Fig. 9 zeigt schematisch ein solches Präparat im polarisierten Licht vor, Fig. 10 nach der Umwandlung in die

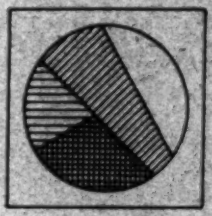


Fig. 7.

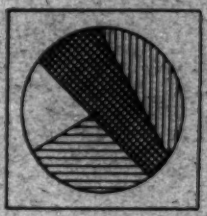


Fig. 8.

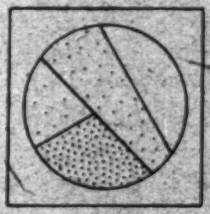


Fig. 9.

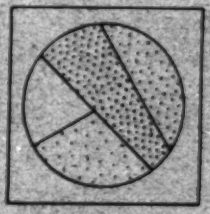


Fig. 10.

schleimig-kristallinische Modifikation, wobei mehr oder weniger intensive gelbe Farbe durch mehr oder weniger dichte Punktierung angedeutet ist.

Zwischen gekreuzten Nicols beobachtet man immer einzelne Felder, welche nicht wie die übrigen bei einer ganzen Drehung des Präparats viermal hell und dunkel werden, sondern gleichmäßig dunkel bleiben wie einachsige zur optischen Achse senkrechte feste Kristallplatten. Hieraus folgt mit Sicherheit, da die Moleküle zweifellos parallel gerichtet sind, daß die schleimig-flüssigen Kristalle der benutzten Substanz optisch einachsig sind. Ob sie dem tetragonalen oder hexagonalen System zugehören, würde sich nur entscheiden lassen, wenn es (wie bei dem schleimig-flüssig-kristallinischen Ammonium-

oleate) gelänge, wenigstens sehr kleine freischwebende Kriställchen von polyedrischer Form zu bekommen, an welchen sich das Vorhandensein von zwei oder drei Nebenachsen feststellen ließe.

Bei erzwungen-homogenen tropfbarflüssigen Kristallen kann man durch gegenseitige Verdrehung der begrenzenden Glasplatten gegeneinander *Schraubenstruktur* hervorbringen, welche sich durch Auftreten von elliptisch- oder zirkular-polarisiertem Licht, sowie durch Drehung der Polarisationsebene äußert.[1]) Die Struktur und das Verhalten solcher verdrehter Schichten kann man sich leicht vorstellen, wenn man die übereinander befindlichen Molekülschichten durch Glasplatten mit Magnetnadeln, welche die Stelle der Moleküle vertreten, ersetzt denkt. Die in Fig. 11 vertikalen Magnetnadeln mögen auf die obere Glasplatte *a b c d* aufgeklebt sein, die horizontalen auf die untere Platte *c f g h*. Zwischen beiden Glasplatten mögen sich drei andere mit beweglichen Magnetnadeln befinden. Die letzteren werden dann Zwischenstellungen einnehmen wie die Figur andeutet, vorausgesetzt, daß sie hinreichend weit voneinander entfernt sind, um nicht durch die daneben befindlichen erheblich beeinflußt zu werden. An Stelle der Magnetnadeln würde man besser, um die störende Wirkung des Erdmagnetismus auszuschalten, astatische Systeme, wie Fig. 4 oder 5 benutzen.

Wie bemerkt, erschien nun von Interesse zu prüfen, ob gleiches auch bei den erzwungen homogenen schleimig-flüssig-kristallinischen Schichten möglich ist. Ich bediente mich dazu einer Vorrichtung ähnlich der früher benutzten[2]), bei welcher das kleine quadratische Deckelglas *D* (Fig. 12) von etwa 4 mm Seitenlänge zwischen zwei steifen Drähten *a*, *b*, (gehalten durch den auf dem drehbaren Objekttisch *B* befestigten Klotz *c*) eingeklemmt war, somit stehen blieb, wenn das Drehtischchen *A*, auf welchem der Objektträger *C* (aus Tempaxglas) mit vier Schrauben unter Luftzwischenraum befestigt war, gedreht wurde. Während nun bei den tropfbar-flüssig-kristallinischen Schichten die Homogenität durch solche Verdrehung nicht gestört wurde, sondern nur elliptische oder zirkulare Polarisation auftrat, zeigte sich hier zwischen gekreuzten Nicols eine Mannig-

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 359, 364; Ann. d. Phys. **51**. S. 353. 1916; **58**. S. 631. 1918.

2) Derselbe, Ann. d. Phys. **51**. S. 364. Fig. 14. 1916.

faltigkeit gewundener schwarzer Streifen (vergleichbar denjenigen bei Schichten tropfbar-flüssig-kristallinischer Schichten mit fremden Beimischungen) und von Polarisationsfarben, die als Subtraktionsfarben infolge Übereinanderlagerung verschieden orientierter Schichten gedeutet werden konnten.[1]) Drehung der Polarisationsebene oder elliptische Polarisation,

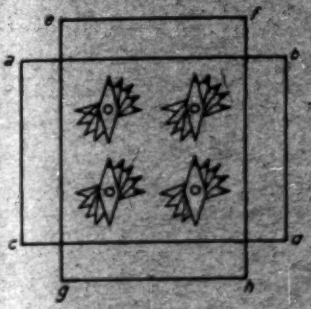


Fig. 11.

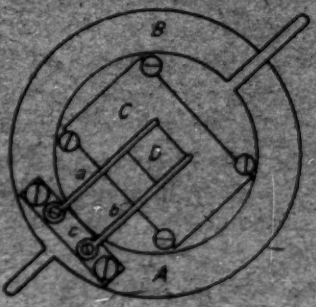


Fig. 12.

wie sie bei schraubenförmiger Strukturverdrehung hätten auftreten müssen, wurden dagegen nicht beobachtet. Ursache ist jedenfalls, daß bei schleimig-kristallinischen Flüssigkeiten die Beweglichkeit der Moleküle eine wesentlich geringere ist als bei tropfbar-kristallinischen, auch mögen die „Häutchen" nicht gleich fest haften wie bei diesen.

Ebenso wurde keine Schraubenstruktur erhalten, wenn durch Verschiebung quer zur Grenze zweier Felder (Fig. 13)

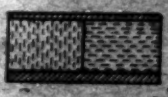


Fig. 13.

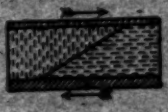


Fig. 14.

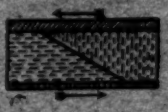


Fig. 15.

zwei verschieden orientierte anisotrope Häutchen übereinander gebracht wurden. Es schien sich hier einfach gemäß Figg. 14 und 15 die eine Hälfte über die andere zu verschieben, indem sich die Grenzfläche mehr und mehr schief stellte. Wegen Anisotropie der inneren Reibung verhält sich dabei wahrscheinlich die eine Schicht wie ein zäheres Medium gegenüber der

1) Vgl. auch die ähnlichen Streifen bei 10-Bromphenanthren-3- oder -6-sulfosäurehydrat, Ann. d. Phys. 55. S. 51. 1918.

anderen, wie ich daraus schließe, daß die Richtung der Verschiebung nicht gleichgültig war. Während bei Zerrung etwa nach Fig. 14 zahlreiche, eine starke Trübung bedingende konische Störungen[1]) auftraten, blieben solche bei der entgegengesetzten Zerrung Fig. 15 aus oder verschwanden, falls sie infolge einer Verschiebung erster Art bereits vorhanden waren.

Zum Teil mögen die beobachteten Erscheinungen auch auf Anschmiegung der Moleküle an das Glas beruhen, namentlich bei stärkerem Anpressen des Deckglases gegen den Objektträger, wobei die Orientierung der Moleküle der „Häutchen" nicht bestehen bleibt, sondern diese sich ebenso wie die übrigen sich so einstellen, daß die optische Achse senkrecht zum Glase wird, wie wenn sie Blättchen senkrecht zur optischen Achse wären, die sich mit ihrer Fläche dem Glase anschmiegen.[2]) Auch hierdurch muß sich die Ordnung der Polarisationsfarbe erniedrigen, wenn die Anschmiegung der einen Glasfläche eintritt. Erfolgt sie an beiden, so verschwinden die Farben natürlich ganz.

Von besonderem Interesse ist der *Einfluß der Deformation auf die konischen Störungen*. Um ihn zu beobachten, stellt man sich konische Störungen mit horizontaler Achse her, wie sie sich ganz von selbst ergeben, wenn die aus reiner isotroper Schmelze gebildeten langen zylindrisch-stäbchenförmigen halbisotropen[3]) flüssigen Kristalle zusammenfließen. Treffen sie unter rechtem Winkel zusammen, wie Fig. 16a andeutet, in welcher die Richtung der Molekularachsen (optischen Achsen) durch Strichelchen gekennzeichnet ist, so wird (weil die Moleküle ihre Lage tunlichst beizubehalten suchen), ihre Stellung eine vermittelnde wie bei Fig. 16b; es bildet sich eine *einfache konische Störung*. Stellt man sich die Moleküle als Blättchen senkrecht zur Richtung der optischen Achsen vor, was mit den Erscheinungen beim Zusammenfließen und bei der Anschmiegung der Kristalle, insofern diese durch Hin- und Herschieben des Deckglases befördert wird, am besten vereinbar ist, so wäre deren Orientierung durch die Figg. 17a und 17b darzustellen. Allerdings ist nur in der gezeichneten Durchschnittsebene die Lage der Blättchen im Gebiete der

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 304ff.

2) Derselbe, ebenda, S. 299ff.; Ann. d. Phys. 55. S. 94. Fig. 64. 1918.

3) Derselbe, ebenda, S. 283, § 7.

konischen Störung eine vermittelnde, in der dazu senkrechten Durchschnittsebene wäre sie geradezu gekreuzt. Hieran würde sich auch nichts ändern, wenn man sich die Moleküle als Stäbchen entsprechend den Strichelchen von Fig. 16a und 16b vorstellt, wie ich es früher getan hatte.[1]) Aus diesem Grunde wohl setzt sich die konische Störung über die Grenzfläche hinaus fort und wird zu einer *doppelt konischen Störung*, wodurch allenthalben der Übergang aus einer Orientierung der Moleküle in die andere ein stetiger wird.[2]) Die Entstehung doppeltkonischer Störungen beim Zusammentreffen der abgerundeten Enden von Stäbchen erklärt sich vielleicht einfacher als ich früher (a. a. O. S. 305) angenommen hatte, nämlich dadurch, daß vom Treffpunkt aus beim Zusammenfließen die Masse radial nach dem Umfang strömt. Jedenfalls ist eine so durch Abkühlung stark erhitzter Schmelze zwischen Objektträger und Deckglas entstandene flüssig-kristallinische Schicht

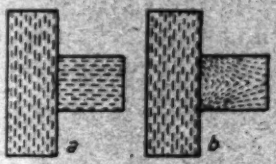


Fig. 16.

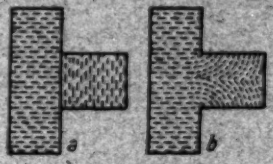


Fig. 17.

nicht wie die eingangs betrachtete aus erzwungen homogenen Feldern (Figg. 7—10) zusammengesetzt, sondern eine einheitliche Masse, deren Struktur aber infolge der Anwesenheit zahlreicher doppeltkonischer Störungen (deren Achse häufig gekrümmt ist) nicht als homogen bezeichnet werden kann. Achsen und Basislinien der doppeltkonischen Störungen sind Unstetigkeitslinien der Struktur, die an Stelle der Unstetigkeitsflächen bei den erstgenannten oder bei festen kristallinischen Stoffen treten. Da die zusammenfließenden Stäbchen naturgemäß der Glasfläche parallel, d. h. horizontal liegen, gilt dies auch von den Achsen der doppeltkonischen Störungen, sowie von den Molekülreihen einer durch Zusammenfließen von Stäbchen gebildeten Schicht. Zur Erkennung ihres Verlaufs eignen sich besonders zwischen gekreuzten Nicols bei

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 287.

2) Derselbe, ebenda, S. 331. Figg. 134—137 u. 332.

verschiedenen Orientierungen des Präparats aufgenommene Photographien[1]), aus welchen man erkennt, daß die Molekülreihen, welche zugleich den Verlauf der optischen Achsen angeben, überall geradlinig sind. Im natürlichen Licht erscheinen die doppeltkonischen Störungen dem unbewaffneten Auge als Trübung, unter dem Mikroskop als blaßgraue Rhomben mit schwarzen Diagonalen, von welchen die längere die Achse der konischen Störungen ist, die kürzere deren Basis (als Projektion in Form einer geraden Linie gesehen). Im polarisierten Licht erscheinen je nach dem Azimut der Polarisationsebene die Rhomben sehr dunkel, umfaßt von hellen Linien oder gar nicht. Zur Beobachtung des Verhaltens einer solchen Schicht bei Verdrehung mittels des Apparates Fig. 3 eignen sich besonders Stellen letzterer Art, an welchen im polarisierten Licht nur die beiden Diagonalen erscheinen. Findet die Verschiebung der beiden Glasplatten in der Richtung der längeren Diagonale statt, so muß sich naturgemäß der Doppelkegel aufrichten,

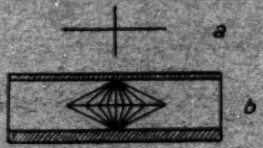


Fig. 18.

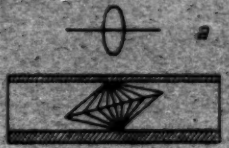


Fig. 19.

Fig. 20.

wie die Figg. 18a, 19a, 20a von oben gesehen (im Grundriß) und Fig. 18b, 19b und 20b im Aufriß darstellen. Man kann dies mit Leichtigkeit verfolgen, sowie auch die Senkung in die frühere Lage bei entgegengesetzter Verschiebungsrichtung und die Aufrichtung des anderen Endes bei Fortsetzung der letzteren.

Über die Stellung Fig. 20 läßt sich die Achse nicht aufrichten. Bei fortgesetzter Verschiebung spalten sich ihre Enden (Fig. 21) und schließlich setzt sich die Spaltung der ganzen Länge nach fort; auch die Ellipse zerteilt sich und die beiden so entstandenen Bogen vereinigen sich mit den Spaltungsstücken der Achse zu zwei geschlossenen Halbringen (Fig. 22), zwischen welchen dann neue kleine konische Störungen auf-

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle. 1904. Taf. 5. Fig. 3; Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 311. Fig. 65.

treten (Fig. 23). Öfter sieht man gleichzeitig zu beiden Seiten senkrecht zur Richtung der Kegelachse kleinere parallele doppeltkonische Störungen aus der großen gewissermaßen herausspringen (Fig. 24), auch können ganze Serien solcher in Bogenform aus der ursprünglichen Kegelbasis nach beiden Seiten sich ablösen, während sich die Kegelachse spaltet (Fig. 25); zuweilen gehen in dieser Art ganze Schwärme von Ketten kleiner konischer Störungen von der großen aus. Die Lichtbrechung spielt bei diesen Vorgängen eine große Rolle und täuscht Erscheinungen vor, die in Wirklichkeit ganz anders verlaufen, als man sie zu sehen glaubt. Es ist deshalb nicht leicht zu sagen, welches hierbei die wirklichen Strukturänderungen sind.

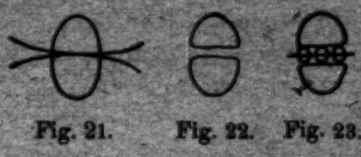


Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23.

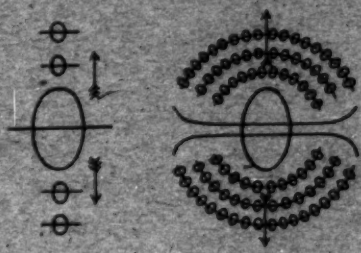


Fig. 24. Fig. 25.

Fig. 26.

Steht die doppeltkonische Störung vor oder nach der Teilung symmetrisch zu den Diagonalen des Nicols, welcher unten (als Polarisator) eingeschaltet sein möge, so sieht man innerhalb der beiden Ellipsenbögen blaßgelbe blaßgrau umrandete rundliche Flecke (Fig. 26a). Dreht man das Präparat um 45° nach der einen oder anderen Seite, so tritt nur ein intensiv gelber Fleck mit schwarzer Umrandung im einen (Fig. 26b) bzw. anderen Ellipsenbogen (Fig. 26c) auf. Verwendet man aber das Nicolsche Prisma oben als Analysator, so erscheinen bei der symmetrischen Stellung Fig. 26a beide Flecke intensiv gelb mit dunkler Umrandung oder sie fehlen ganz, das Feld ist weiß (nach Drehung um 90°). In den 45°-Stellungen sind die Flecke dagegen nur schwach zu sehen, ähnlich wie zuvor bei Fig. 26a. Demnach ist somit hier nicht gleichgültig, ob das Nicolsche Prisma unten oder oben eingeschaltet wird, die doppeltkonische Störung verhält sich in der verdrehten Lage so, wie wenn sie Schraubenstruktur hätte.

Ob solche tatsächlich durch mechanische Verdrehung hervorgerufen wurde oder ob es sich um eine Wirkung der natürlichen Struktur der doppeltkonischen Störung handelt, ließe sich durch Beobachtung *schräger doppeltkonischer Störungen* in nicht deformierten Schichten feststellen. Im Prinzip ist dies möglich, da die Achse der konischen Störungen immer der optischen Achse der flüssigen Kristalle oder flüssig-kristallinischen Schichten, in welchen sie entstehen, parallel ist.

Beispielsweise bilden sich in einer halbisotropen auf gesättigter Lösung schwimmenden, an die Grenze gegen Luft (wohl infolge der Wirkung der „Richtkraft-Oberflächenspannung“[1]) angeschmiegten Schicht nahe gleichgroße konische Störungen aus, deren Achse ebenso wie die optische Achse senkrecht zur Oberfläche ist.[2]) Ursache ihrer Bildung dürften die infolge Verminderung der gewöhnlichen Oberflächenspannung durch die Erwärmung hervorgerufenen Kontaktbewegungen (Wirbel infolge kapillarer Ausbreitung) sein, durch welche von ungefähr gleichweit voneinander abstehenden Punkten aus radiale Strömungen in der Flüssigkeit entstehen, die ganz wie die oben erwähnten beim Zusammenfließen der stäbchenförmigen Kristalle sich bildenden radialen Strömungen die konische Anordnung der Molekülachsen zur Folge haben.

Anschmiegung läßt sich selbst noch an der Grenze flüssiger Kristalle gegen eine andere Flüssigkeit (statt gegen Luft) beobachten[3]), dagegen nicht an der Grenze gegen die isotrope Schmelze oder gegen die eigene Lösung, da hier offenbar die Zentralkraft-Oberflächenspannung zu schwach ist und nur die Bildung ellipsoidischer (oder stäbchenförmiger) Gestalt der flüssigen Kristalle hervorzubringen vermag oder umgekehrt, falls Tröpfchen der isotropen Flüssigkeit in den Kristall eingeschlossen sind, ellipsoidische Form der letzteren, derart, daß die Längsachse des Ellipsoids der optischen Achse des Kristalls parallel geht. In letzterem Fall sieht man häufig in dieser Richtung an den stark gewölbten Stellen der ellipsoidischen Tröpfchen konische Störungen auftreten, deren Achse eben-

1) O. Lehmann, Verh. d. Deutschen phys. Ges. 16. S. 443. 1914.
2) Derselbe, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 212. Fig. 68 u. 69.
3) Derselbe, ebenda, S. 302. Fig. 47.

falls dieselbe Richtung hat.[1]) Ursache ist wohl wieder eine dort eintretende radiale Strömung. Ferner bilden sich annähernd gleichgroße konische Störungen mit vertikaler, der optischen Achse parallelen Achse in halbisotropen an Glas angeschmiegten Schichten, falls bis zur Bildung isotroper Schmelze an der Unterseite, also bis zur Loslösung der flüssig-kristallinischen Schicht vom Glase erhitzt wird.[2]) Kontaktbewegungen scheinen auch hier die Ursache zu sein in Verbindung mit dem Umstand, daß sich infolge der Loslösung vom Glase die Richtkraft-oberflächenspannung frei betätigen kann. Die Bildung gleichgroßer „Perlen" (d. h. konischer Störungen) am freien Rande angeschmiegter Schichten[3]) steht augenscheinlich damit im Zusammenhang.

Erzeugt man in gleicher Weise in erzwungen homogenen Schichten durch Erwärmung konische Störungen, so steht deren Achse natürlich nicht senkrecht zum Glase, sondern parallel zur Kristallachse, also in jedem Feld anders.[4]) Statt kreisförmig erscheint dementsprechend im allgemeinen die Kegelbasis elliptisch oder parabolisch, nur in denjenigen Feldern, die beim Drehen des Präparates immer dunkel bleiben, bei denen also die Achse senkrecht zum Glase ist, ist sie ein Kreis wie bei angeschmiegten Schichten.

Ich habe nun, um die oben aufgeworfene Frage zu entscheiden, das Verhalten solcher Störungen mit elliptischer Basis im polarisierten Licht untersucht, konnte aber nur einfache (nicht doppelt-)konische Störungen erhalten, welche immer das Aussehen von Fig. 27a und b hatten, gleichgültig, ob das Nicolsche Prisma unter, oder über dem Präparat eingeschaltet wurde. Gründe dafür, daß bei Hinzufügung des zweiten Teils einer doppeltkonischen Störung eine Änderung eintreten müßte, lassen sich nicht erkennen, so daß wohl zu schließen ist, daß die tatsächlich im fraglichen Fall beobachtete *Schraubenstruktur eine Folge der Deformation ist.*

Fig. 27.

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 344. Fig. 164 u. 165.

2) Derselbe, ebenda, S. 312. Fig. 70 u. 71.

3) Derselbe, ebenda, S. 322ff.

4) Derselbe, ebenda, S. 318. Fig. 83.

Da bei tropfbar-flüssigen Kristallen ganz ähnliche Verdrehungen, wie sie auf mechanischem Wege zu erhalten sind, auch durch fremde Beimischungen erhalten werden können[1]), versuchte ich, ob nicht durch Mischung zweier verschiedenartiger schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten Schraubenstrukturen zu erhalten wären. Bei Mischungen der schleimig-flüssig-kristallinischen Hydrate von Ammoniumoleat, Dimethylaminoleat, Trimethylaminoleat, Kaliumoleat und Lezithin, die sich anscheinend in allen Verhältnissen mischen, konnte ich keine Drehung der Polarisationsebene oder Zirkularpolarisation (wie sie bei Verdrehung doppeltbrechender Lamellen übereinander eintreten müßte, beobachten. Dies ist auch natürlich, da sich die genannten Stoffe so verhalten, wie wenn sie aus blättchenförmigen einachsigen Molekülen beständen, deren optische Achse senkrecht zur Fläche sind und deren Orientierung in ihrer Ebene sich beständig ändert (halbisotrope Struktur).[2])

Einen weiteren Versuch machte ich mit Paraazoxybenzoesäureäthylester, welcher sich in allen Verhältnissen mit Anisalaminozimtsäureäthylester mischt, obschon im festen Zustand keine Isomorphie vorhanden ist, wie man leicht daran erkennen kann, daß beim Erstarren der in Berührung gebrachten flüssig-kristallinischen Schichten die sich bildenden festen Kristalle des ersteren Esters starke Krümmungen und schließlich sphärolithische Verzweigungen erleiden, sobald sie in die Mischzone beider Ester hineinwachsen. Die flüssigen Mischkristalle sind von den Kristallen der reinen Substanzen nach Form, mechanischen und optischen Eigenschaften kaum zu unterscheiden und da diese einachsig sind, war auch hier Strukturverdrehung nicht zu beobachten. Gleiches gilt für die schleimig-flüssig-kristallinischen Mischungen von Paraazoxybenzoesäureäthylester und Paraazoxyzimtsäureäthylester.

Da, wie oben bemerkt (S. 507), anzunehmen ist, daß die flüssig-kristallinische Modifikation des Paraazoxybenzoesäureesters (d. h. das Kristallmolekül derselben) einem einachsigen System angehört und gleiches schon mit Rücksicht auf die chemische Verwandtschaft auch für die beiden anderen Stoffe anzunehmen sein wird (bei welchen direkte Prüfung wegen der Unmöglichkeit erzwungen homogene Schichten herzustellen,

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 58. S. 631. 1919.
2) Derselbe, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 238.

nicht ausführbar ist), da man also annehmen muß, daß die Moleküle der gemischten Stoffe sämtlich zur optischen Achse senkrechte Blättchen sind, so ließe sich in der Tat auch hier nicht einsehen, weshalb Drehung der Polarisationsebene auftreten sollte, selbst wenn die Blättchen gegeneinander gedreht würden, denn bei den Glimmerkombinationen von Reusch, durch welche solche Drehung hervorgerufen wird, sind nicht einachsig sich verhaltende, sondern doppeltbrechende Blättchen schraubenförmig übereinandergeschichtet.

Besserer Erfolg war deshalb zu erwarten bei *Cholesterylverbindungen*, deren Schillerfarben schon früher zur Annahme von Schraubenstrukturen, hervorgebracht durch Mischung zweier flüssig-kristallinischen Modifikationen geführt hatten[1]), wodurch die Zweiachsigkeit oder mindestens doppelbrechende Natur der Molekülblättchen nach obigen Überlegungen außer Zweifel wäre. Da von manchen die Richtigkeit der von mir gegebenen Erklärung der Schillerfarben (durch Mischung zweier Modifikationen) bestritten wird[2]), wäre also zu prüfen, ob durch Mischung von zwei *verschiedenartigen* Cholesterylverbindungen Schraubenstruktur erhalten werden kann. Dies trifft in der Tat zu und zwar erklären sich dadurch die bisher rätselhaften von mir früher als „Schwebungen der Homöotropie" bezeichneten eigentümlichen optischen Erscheinungen bei Mischungen von Cholesterylchlorid und Cholesterylcinnamylat[3]), die ich damals durch beschränkte Mischbarkeit (Heterotropie) erklären zu können glaubte. An Stelle des Cholesterylcinnamylats verwendet man besser Cholesterylpropionat oder Cholesterylcaprinat.[4]) Man bringt kleine Mengen der beiden Stoffe nebeneinander auf einen Objektträger, bedeckt mit einem etwa 25 qmm großen Deckglas, schmilzt, bewirkt durch Hin- und Herschieben des Deckglases gute Mischung der beiden Stoffe und läßt dann bis zum Entstehen der flüssig-kristallinischen Modifikationen abkühlen, wobei man durch wiederholtes An-

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüss. Kristallen. 1918. S. 350.

2) W. Voigt, Physik. Zeitschr. 17. S. 159. 1916.

3) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 7. S. 578. 1906; 2. S. 583. 1910; Zeitschr. phys. Chem. 78. S. 598. 1910; Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 235; Die Lehre von den flüss. Kristallen. 1918. S. 349.

4) Der früher empfohlene Metatolylcholesterylester ist dagegen nicht geeignet.

drücken und Verschieben des Deckglases mit der Präpariernadel die Anschmiegung der Schichten an das Glas begünstigt.

Fig. 28 stellt schematisch ein solches Präparat dar, bei welchem links Cholesterylchlorid, rechts Cholesterylpropionat (oder -caprinat) vorhanden ist. In den Feldern *g h i k* und *n o p q* (infolge von Anschmiegung schwarz) befinden sich die in höherer Temperatur stabilen Modifikationen I, in den Feldern *a b e f* und *l m c d* die bei niederer Temperatur stabilen Modifikationen II. In den Mischgebieten der beiden Modifikationen zeigen sich die Schillerfarbenspektren und zwar beginnend mit Violett bei *g h* bzw. *n o* und endigend mit Rot bei *e f*

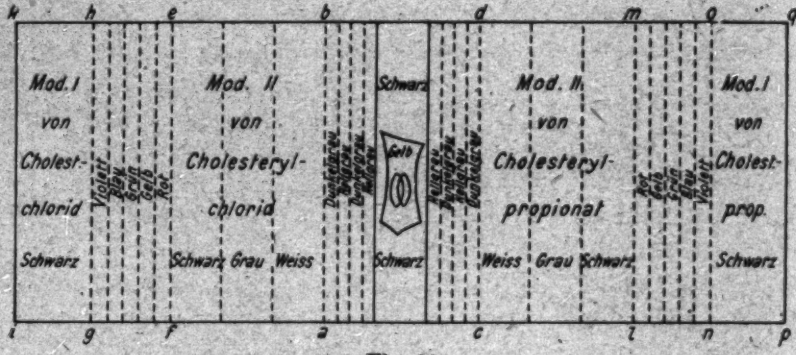


Fig. 28.

bzw. *l m*. Alle diese Felder sind von feinen „öligen Streifen" durchzogen, welche gegen *a b* bzw. *c d* hin besonders dick und einfach werden. Sie setzen sich wohl auch als graue kammartige Vorragungen über *a b* bzw. *d c* hinaus in das *Mischgebiet der II. Modifikationen beider Stoffe a b c d* hinein fort, welches, da sich die Mischung besonders leicht anschmiegt, in der Regel gleichmäßig schwarz (ohne ölige Streifen) erscheint, aber beim Andrücken des Deckglases mittels einer Prägniernadel plötzlich aufblitzt, indem sich dann die Molekülachsen vorübergehend schief stellen. Die angrenzenden Felder *e f a b* und *l m c d* sind indes nicht nur wegen des feinen Gewirrs von öligen Streifen nicht völlig dunkel, sondern auch deshalb, weil in der Nähe der Grenzen *a b* bzw. *c d* etwas von der anderen Substanz als Verunreinigung beigemischt ist, wodurch Drehung der Polarisationsebene hervorgerufen wird. Fig. 29 deutet die Zunahme der Helligkeit gegen das schwarze

Mischgebiet an unter der Annahme, daß es sich um eine Kombination von Cholesterylchlorid- und -cinnamylat handle. Ganz ebenso hat man sich bei Fig. 28 die Helligkeitsverteilung vorzustellen. Von *e f* gegen *a b* bzw. von *l m* gegen *c d* hin nimmt die infolge der Anschmiegung vorhandene Dunkelheit der Felder beständig ab und die an *a b* bzw. *c d* angrenzenden Zonen erscheinen geradezu weiß oder hellgelb. Durch Drehen des Präparates ändert sich die Helligkeit nicht, es handelt sich also um *Drehung der Polarisationsebene, die um so größer wird, je mehr der einen Substanz von der anderen beigemischt ist*, also um *Schraubenstruktur, herbeigeführt durch fremde Beimischung*, nach welcher eben gesucht wurde.

Um Dunkelheit (dunkelblau oder dunkelbraun) zu erhalten, muß man auf der Seite des Chlorids Fig. 28 an der Stelle stärkster

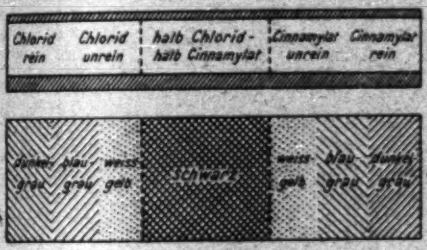


Fig. 29.

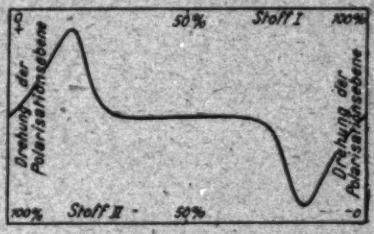


Fig. 30.

Drehung (bei *a b*) den Polarisator um etwa 25° entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehen, auf Seite des Propionats (bei *c d*) etwa ebensoviel im Sinne des Uhrzeigers. *Die Drehungen, welche durch allmähliche Zumischung von Chlorid zu Propionat hervorgebracht worden sind, also entgegengesetzt gleich denen, welche durch Zumischung von Propionat zu Chlorid entstehen*, eine Regel, die an das Gesetz von Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erinnert und jedenfalls dazu beitragen kann, die Natur der Schraubenstruktur weiter aufzuklären. Sie läßt es auch als selbstverständlich erscheinen, daß in dem dunkeln Mischgebiet, in welchem die Stoffe in *annähernd gleichen Mengen gemischt sind, keine Drehung der Polarisationsebene auftritt*, womit wohl auch in Zusammenhang steht, daß hier besonders leicht Anschmiegung erfolgt. Fig. 30 sucht den Zusammenhang der Drehung mit dem Mischungsverhältnis (fast senkrechten Abfall gegen die Mitte) zu veranschaulichen.

Die Vorsprünge an Schwarz (Fig. 29), von welchen auf S. 518 die Rede war, bilden sich gewöhnlich erst nach einiger Zeit. In der Regel schiebt sich beim Abkühlen eine gleichmäßig hellgraue Schicht über *a b* in das schwarze Gebiet vor mit einem oder mehreren (bis zu vier dunklen zu *a b* parallelen Streifen, Fig. 31 *a*). Beim Erwärmen zieht sie sich wieder zurück, wobei die Streifen deutlicher hervortreten, dagegen schiebt sich nun eine ganz ähnliche gestreifte dunkle Schicht von *c d* aus vor (Fig. 31 b). Die Streifen verschwinden bei bestimmter Stellung (gewöhnlich, aber keineswegs immer, wenn die Längsrichtung einer Nicoldiagonale parallel ist) fast ganz, insofern dann die zwischenliegenden hellen Streifen gleich dunkel werden; sie treten umgekehrt um so stärker hervor, je mehr man sich der

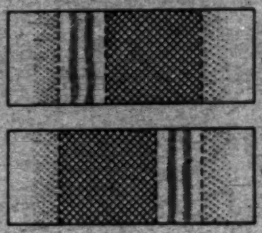


Fig. 31.

Fig. 32.

um 45° gedrehten Stellung nähert, da dann die hellen Streifen des Maximum an Helligkeit erreichen, während die dunkeln immer gleich dunkel bleiben.

Schiebt man einen Gips- oder Quarzkeil, welcher mit einer entgegengesetzt orientiert planparallelen Platte verbunden ist, so daß der dunkle Streifen, welcher der Dicke Null entspricht, sich nicht an der Schneide des Keils, sondern in einiger Entfernung davon befindet, so über die Streifen des Präparats, daß sein dunkler Streifen quer zu ersteren steht, so nimmt der letztere Streifen Zickzackform an, wie Fig. 32 zeigt, und gleiches gilt für die farbigen Streifen an anderen Stellen des Keils. Es folgt somit, daß *die hellen Streifen abwechselnd entgegengesetzte Doppelbrechung zeigen* und zwar bis zur Mitte (in Fig. 32 durch die punktierten Linien angedeutet) zunehmend bis zu einem Maximum. Die frühere Annahme, daß die Zusammensetzung der Schicht eine entsprechend wechselnde sei (Schwebungen der Homöotropie), ist unnötig, denn ein derartiges Streifensystem erhält man auch durch Kombination

eines Keils aus einer die Polarisationsebene drehenden Substanz mit einer planparallelen doppelbrechenden Platte, wie Fig. 33 andeutet, in welcher die Schwingungsrichtungen der an verschiedenen Stellen aus dem Keil austretenden Strahlen durch große Pfeile dargestellt sind und die der durch die doppelbrechende Platte gehenden (durch die Schwingungsellipse be-

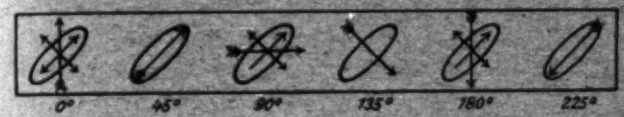


Fig. 33.

stimmten) Komponenten durch kleine Pfeile. Bei 90° und 180° erhält man (entgegengesetzt-) elliptisch- oder zirkular-polarisiertes Licht, bei 45, 135 und 225° dagegen geradlinig polarisiertes. Bei Drehung des Systems um 45° vertauschen diese Stellen ihre Rollen, so wie man auch an dem wirklichen Präparat die Streifen wandern sieht.

Als Ursache der Entstehung einer Schicht mit variabler Drehung der Polarisationsebene ähnlich der des Keils ist wohl das mit sinkender bzw. steigender Temperatur veränderliche Mischungsverhältnis der Moleküle zu betrachten, insofern bei Annäherung an die Erstarrungstemperatur auch Moleküle der festen Modifikationen sich bilden, vielleicht dadurch bedingte Änderung der Anschmiegung.

Ursache der Bildung der doppelbrechenden Schicht, welche übrigens mit der drehenden identisch sein kann, dürfte Verminderung der Anschmiegung oder Zerrung infolge der durch die Temperaturänderungen bedingten Strömungen sein. Letztere könnten auch das entgegengesetzte Verhalten auf beiden Seiten (Fig. 30a und b) erklären, welches übrigens auch das umgekehrte sein oder ganz fehlen kann. So ist bei Zeichnung von Fig. 28 angenommen, daß die hellen und dunklen Streifen auf beiden Seiten ganz symmetrisch auftreten. Nach energischem Streichen des Deckglases mit der präparierten Nadel kann das schwache Mischgebiet für einige Sekunden hell bleiben. Dabei verschwinden auch die erwähnten kammförmigen Fortsätze bei *a b* bzw. *c d*, stellen sich aber alsbald wieder her. Sie sind ihrer Natur nach identisch mit den gestreiften grauen

Schichten (Fig. 81a, b), zeigen also auch Drehung der Polarisationsebene und falls sie einer Nicoldiagonale parallel sind, in der Mitte einen dunkeln Streifen und dunkle Umrandung (Fig. 34a) bei Drehung um 45° in der Mitte einen hellen Streifen, eingefaßt von zwei dunkeln (Fig. 34b). Sie sind als Enden öliger Streifen zu betrachten.

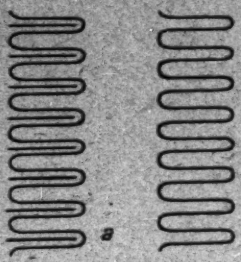


Fig. 34.

Vereinzelte solche ölige Streifen (z. B. kleine in sich geschlossene Ringe, Bögen usw. mit entsprechenden Auslöschungen[1]) finden sich manchmal auch frei im schwarzen Felde, ferner nicht angeschmiegte Stellen mit dunklen Streifen[2]), wie Fig. 35 andeutet, sowie Fig. 28 in der Mitte (nur ein Fleck mit vier Streifen, einem halben Kern- und einem Konvergenzpunkt verbindend), welche beim Drehen des Präparates viermal hell (weiß bis gelb oder rot) und dunkel werden wie Kristalle. Es kommt auch vor, daß die ganze in Fig. 28 und 29 als schwarz angenommene Mischungszone Doppelbrechung oder Drehung der Polarisationsebene zeigt, nämlich bei dickeren Schichten, wobei die Anschmiegung nur unvollkommen ist oder ganz ausbleibt. Die Erscheinungen zeigen dann manche Ähnlichkeit mit den bei 10-Bromphenanthren-3- oder -6-sulfosäurehydrat[3]) beschriebenen, lassen sich aber wie diese schwer im einzelnen entwirren.

Fig. 35.

In einzelnen Fällen scheint auch Lamellenbildung vorzukommen, wenigstens zeigte sich zuweilen bei *streifend* einfallendem Licht ein schwaches *Spektrum*, vergleichbar dem Schillerfarbenspektrum. Schillerfarben selbst wurden nicht beobachtet, namentlich nicht an den einfachen, lediglich die Polarisationsebene drehenden Mischschichten.

Noch interessanter als die eben besprochenen Mischungen sind solche von Cholesterylchlorid und Cholesteryloleat, weil man hier einzelne voneinander getrennte Kristallindividuen erhält, deren Struktur mit aller Genauigkeit untersucht werden

1) Vgl. O. Lehmann, Ann. d. Phys. 55. S. 91. Fig. 44. 1918.
2) Derselbe, ebenda, S. 94. Fig. 71a, b, c, d.
3) Derselbe, Ann. d. Phys. 55. S. 100. Figg. 84—86. 1918.

kann. Die dem Oleat beigemischte freie Ölsäure wirkt nämlich als Lösungsmittel, aus welchem sich sehr kleine flüssige Kristalle ausscheiden, die sich dann allmählich durch Zusammenfließen vergrößern und durch die Wirkung der molekularen Richtkraft einfachere Struktur annehmen. Infolge der schleimigen Konsistenz nimmt das Zusammenfließen lange Zeit in Anspruch und man läßt deshalb am besten, ehe man die Beobachtungen beginnt, das Präparat, das wie die vorbesprochenen durch Nebeneinanderschmelzen der beiden Stoffe unter Deckglas und wiederholtes Hin- und Herschieben des letzteren hergestellt wurde, zunächst einige Stunden bei Zimmertemperatur liegen.

Auf der Seite des reinen Cholesteryloleats sieht man dann die normalen, kleinen stäbchenförmigen Kristalle, welche gegen die Seite des Chlorids hin immer größer werden, offenbar infolge geringer Beimischung von Chlorid, oft so groß, daß sie lange, sich durch das ganze Gesichtsfeld hindurch erstreckende, halbisotrope Zylinder bilden. Sie gleichen ganz den aus alkoholischer Lösung sich ausscheidenden schleimig-flüssigen Kristallen von Ammoniumoleathydrat und zeigen ebenso wie diese häufig doppeltkonische Störungen.[1])

Auf diese im wesentlichen homogenen, stäbchenförmigen, flüssigen Oleatkristalle folgen dann nach der Seite des Chlorids hin sehr fein schraffierte ellipsoidische oder kugelige Tropfen[2]), deren Struktur um so einfacher und gröber wird, je mehr man sich der Chloridseite nähert. Manche der Stäbchen an der Übergangsstelle sind teilweise oder ganz mit dieser tropfbar flüssigen Mischkristallmasse überzogen; die Schraffierung des Überzugs ist aber nicht, wie man erwarten könnte, regelmäßig orientiert gegen die Struktur der Stäbchen, sie ist auch nicht einmal gleichmäßig, sondern zeigt sehr vielfache Wechsel und ist so fein, daß, wie in anderen Fällen starker Strukturstörung[3]), nur die Stellen plötzlicher Richtungsänderung deutlich hervortreten. Man muß hiernach die großen Stäbchen mit vereinzelten konischen Störungen als oleatreiche Mischkristalle auffassen, die fein schraffierten Tropfen und Überzüge als chloridreiche. Daraus, daß die Grenze zwischen Überzug und Grund-

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen, S. 304ff.
2) Derselbe, ebenda S. 466ff.
3) Vgl. O. Lehmann, Flüssige Kristalle. Taf. 34. Fig. 1.

masse immer sehr scharf zu sehen ist (Fig. 36), folgt, daß die Mischung der beiden flüssig-kristallinischen Stoffe nicht in beliebigem, sondern nur in beschränktem Verhältnis möglich ist.

Zwischen den ellipsoidischen chloridreichen Mischkristalltropfen und den auf der anderen Seite des Präparats auftretenden winzigen stäbchenförmigen flüssigen Kristallen der Mod. II des reinen Cholesterylchlorids läßt sich eine Grenze nicht auffinden. Auch hier wächst von der Seite der reinen Substanz an die Größe der Individuen infolge der Aufnahme des Oleats, doch kommt es nicht zur Bildung deutlicher Stäbchen, sondern die ersten unterscheidbaren Individuen sind bereits äußerst fein schraffierte Tropfen mit häufigem Wechsel der Schraffierungsrichtung, ganz wie auf der Oleatseite. Gegen letztere hin wird die Schraffierung gröber und regelmäßiger, ebenso wie auch die Schraffierung der Tropfen auf der Oleatseite gegen die Chloridseite hin gröber und regelmäßiger wird. Gegen die Mitte hin gehen also die schraffierten Tropfen auf beiden Seiten zunächst in solche mit stark- und dann in solche mit schwachverdrehter Struktur über, in der Mitte selbst finden sich Tropfen fast ohne Verdrehung, allerdings meist wie auch die übrigen auf einer Seite an das Glas angeschmiegt und deshalb von anderem Aussehen und anderer Struktur als freischwebende Kristalltropfen. Die in zweiter Hauptlage befindlichen gehen aus den angeschmiegten schraffierten Tropfen dadurch hervor, daß die Zahl der Streifen ab- und ihre Breite zunimmt, bis schließlich nur noch ein einziger sehr breiter Streifen in der Mitte vorhanden ist, wie die Figg. 37a, b, c andeuten. Diese Figuren sind gezeichnet in der Annahme, daß die Längsrichtung der Streifen der kurzen Nicoldiagonalen parallel ist; bei Verdrehung um 90° erscheinen die Streifen nur sehr blaß, z. B. tritt an Stelle der Fig. 37c, welche die einfachste Tropfenform darstellt, Fig. 38. Zwischen gekreuzten Nicols wird der Anblick der in Fig. 39 skizzierte. Zu beiden Seiten sind schwarze Streifen, in der Mitte eine langgezogene blaue Ellipse (entsprechend dem Streifen Fig. 37c) mit roter Umsäumung

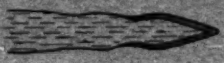


Fig. 36.

Fig. 37.

(punktiert). Bei Drehung des Präparats um 45° werden die zuvor weißen Felder schwarz, die schwarzen Streifen weiß und die blaue Ellipse hellgelb (Fig. 40). Bei parallelen Nicols erscheint, wie Fig. 41 andeutet, die Mitte der Ellipse rotgelb, ihr Rand tief dunkelblau, fast schwarz und die Spitzen der

Fig. 38. Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

beiden von ihr abgegrenzten Sicheln sind grau. Bei den angeschmiegten Tropfen mit zahlreichen Streifen, Fig. 37a, b, verhalten sich die letzteren beim Drehen des Präparats zwischen gekreuzten Nicols wie einachsige Kristallnadeln, d. h. sie werden bei einmaliger Drehung viermal hell und dunkel, letzteres dann, wenn sie den Nicoldiagonalen parallel sind; die Zwischenräume bleiben zuweilen (nicht immer) dunkel, wie es der Anschmiegung entspricht (Fig. 42).

Durch Beobachtung im Kapillarrotator[1]) kann man sich davon überzeugen, daß die Tropfen mit einfacher Schraffierung wirklich angeschmiegt sind, da die an vertikaler Rohrwand sitzenden erscheinen, wie Fig. 43 zeigt. Freischwebende Tropfen

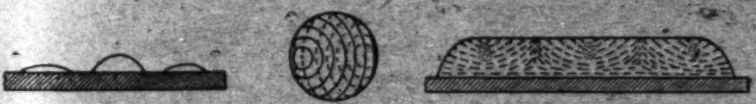


Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45.

lassen auch die Schraffierung auf der Rückseite erkennen, wie z. B. der Tropfen mit schräger Achse (Fig. 44) mit ringförmiger Schraffierung oder Tropfen mit Spiralschraffierung, wie sie früher eingehend untersucht und beschrieben wurden.[2])

Aus jenen älteren Untersuchungen und den neuesten[3]) folgt, daß die Struktur der angeschmiegten Tropfen die in Fig. 45 dargestellte sein muß, wobei die Linien die Normalen zu den optischen Achsen (die Richtungen der blättchenförmig

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 368.
2) Derselbe, ebenda S. 450 ff.
3) Derselbe, Ann. d. Phys. 58. S. 644 ff. 1919.

gedachten Moleküle) bedeuten und Punktierung Stellen mit regellos gelagerten Molekülen (also kleinem Brechungsindex), welche die starke Lichtbrechung der Streifen bedingen. Die dazwischenliegenden Konvergenzstellen der Moleküle sollten als feine Trennungslinien erscheinen, doch treten solche hier (vermutlich der geringen Lichtbrechung wegen) nur undeutlich hervor oder entziehen sich vollständig der Beobachtung.

Fig. 46 stellt einen Tropfen mit nur zwei Streifen in natürlichem Licht dar. Zwischen gekreuzten Nicols erscheinen die

Fig. 46.

Fig. 47.

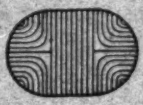


Fig. 48.

beiden Streifen in der Hellstellung gelbrot, zwischen parallelen in derselben Stellung blau. Das dazwischenliegende angeschmiegte Gebiet kann im ersten Fall schwarz, im anderen weiß erscheinen; es kann aber auch entsprechend der Struktur eines Konvergenzpunktes ein schwarzes bzw. weißes (schiefgezogenes) Kreuz zeigen, ähnlich wie in ausgedehnten homo-

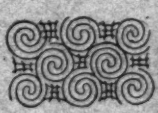


Fig. 49.

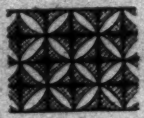


Fig. 50.

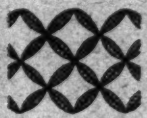


Fig. 51.

genen angeschmiegten Schichten da und dort einzelne Kern- und Konvergenzpunkte (ganze oder halbe) mit entsprechenden Streifen aufzutreten pflegen.

Gewöhnlich sind zwei oder mehr schraffierte Tropfen regelmäßig vereinigt, besonders häufig drei oder vier. Letzteren Fall stellen die Figg. 47 und 48 dar. Ferner ist häufig die Anordnung der Streifen eine spiralige und aus solchen Spiralen können sich regelmäßige quadratische Systeme bilden (Fig. 49), welche zwischen gekreuzten Nicols Systeme von schwarzen Kreuzen bilden (Figg. 50 u. 51), wie sie auch in anderen Fällen beobachtet wurden.

Bei großer Konzentration können zahlreiche Tropfen zu zusammenhängenden Schichten sich vereinigen, bei welchen je nach der Zusammensetzung die Dichte der Schraffierung von Stelle zu Stelle sich ändert. Beispielsweise ist in Fig. 52 eine solche Schicht skizziert, welche auf der einen Seite vorwiegend Oleat, auf der anderen vorwiegend Chlorid enthält und deshalb auf diesen Seiten feine Schraffierung zeigt, welche gegen die Mitte zu gröber wird und in der Mitte unter starker Verbreiterung sich allmählich verliert. Da die Streifen Aus-

Fig. 52.

löschungen parallel ihrer Längsrichtung zeigen, bildet sich bei ringförmig geschlossenen Streifen zwischen gekreuzten Nicols natürlich ein schwarzes Kreuz, welches bei verwaschen auslaufenden Streifen sich in die streifenlose angeschmiegte Masse hinein fortsetzen kann, da diese im allgemeinen wegen Drehung der Polarisationsebene nicht dunkel, sondern hell erscheint.

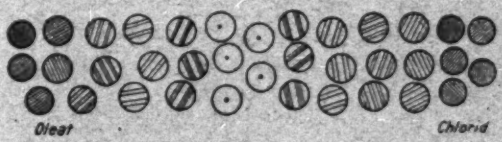


Fig. 53.

Um die Verhältnisse besser übersehen zu können, ist in Fig. 53 von solchen Komplikationen abgesehen und der einfache Fall angenommen worden, der auch wirklich vorkommt, daß sich überall nur einfache runde angeschmiegte Tropfen ausgeschieden haben und zwar bei vorherrschendem Oleat auf der linken Seite und vorherrschendem Chlorid auf der rechten Seite. In der Mitte sind, was ebenfalls häufig zutrifft, angeschmiegte Tropfen in I. Hauptlage, welche naturgemäß zwischen gekreuzten Nicols ein schwarzes Kreuz zeigen, dessen Arme sich aber nicht bis zum Rande erstrecken. Fig. 54 zeigt einen besonders großen Tropfen dieser Art zwischen gekreuzten

Nicols. Er erscheint im wesentlichen weiß, den fehlenden Kreuzarmen entsprechend finden sich aber in der Nähe des Randes elliptische rotgelbe Flecken. Bei parallelen Nicols tritt, wie in Fig. 55 angedeutet, ein graues Kreuz in der Randzone unter 45° auf, die Randzone selbst ist blaugrün (punktiert) gefärbt. Die Mitte des Tropfens ist gleichförmig gelb und durch einen dunkelvioletten Ring von der Randzone geschieden. Beim Drehen des Präparates ändern sich in beiden Fällen natürlich die Erscheinungen nicht, da alles rings um die Mitte symmetrisch ist.

Es kommen auch Tropfen mit schiefstehender Achse vor, bei welchen deutlich erkennbar ist, daß die Randzone in ihrer Struktur einem Streifen äquivalent ist, indem die elliptisch gewordene Randzone geradezu den ersten Streifen darstellt, auf welchen ein zweiter paralleler folgt (Fig. 56). Das schwarze Kreuz zeigt sich innerhalb der Ellipse im wesentlichen unverändert. Es gibt übrigens auch symmetrische Tropfen, bei welchen das schwarze Kreuz ganz fehlt, die zwischen gekreuzten Nicols z. B. als gelbrote Scheiben erscheinen, deren Farbe sich beim Drehen des Präparates nicht ändert, wohl aber beim Drehen des Analysators, wobei sie in die komplementäre blauviolette übergeht, ganz wie bei einer die Polarisationsebene drehenden Quarzplatte.

Fig. 54.

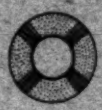


Fig. 55.

Fig. 56.

Man könnte sich nun hinsichtlich des Grundes der eigenartigen Erscheinung die Vorstellung machen, die einfachen Kristalltropfen seien eine chemische Verbindung von Oleat und Chlorid, etwa eine Molekularverbindung, und diese Verbindung habe die Fähigkeit, sowohl Chlorid wie Oleat als Beimischung aufzunehmen und erfahre dadurch eine um so stärkere Strukturverdrehung, je größer der Gehalt an fremder Substanz, was eben durch die zunehmende Feinheit der Schraffierung sowohl nach der Chlorid- wie nach der Oleatseite (Figg. 52 u. 53) zum Ausdruck käme.

Dieser Annahme widerspricht aber, daß die Kristalltropfen *zunehmende Drehung der Polarisationsebene gegen die Mitte hin* zeigen und zwar *zu beiden Seiten der Mitte von entgegengesetztem Sinn* ganz wie die oben behandelten Präparate (Figg. 28 u. 29).

In der Mitte liegen Kristalltropfen von entgegengesetztem Drehungssinn unmittelbar nebeneinander, wie man leicht ersieht, wenn der zum Analysator gekreuzte Polarisator einmal etwa um 45° nach rechts, dann um 45° nach links gedreht wird. Die bei gekreuzten Nicols schwarzen bzw. grauen Kreuze (Fig. 57a) drehen sich mit halber Geschwindigkeit mit, *verhalten sich aber ganz verschieden*, insofern bei Drehung nach *rechts die Kreuze auf der Oleatseite dunkelblau werden* und sich

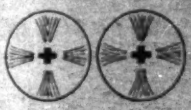


Fig. 57a.

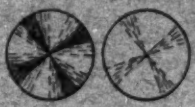


Fig. 57b.

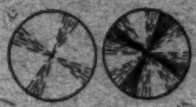


Fig. 57c.

stark ausdehnen, ferner die zwischenliegenden Felder grau, während sie auf der *Chloridseite fast verschwinden*, so daß die Tropfen als weiße Scheiben erscheinen (Fig. 57b). Bei Drehung nach *links* ist das Verhalten genau umgekehrt, es werden die Tropfen der *Chloridseite dunkel*, die der *Oleatseite hell* (Fig. 57c). Analoges gilt für Tropfen in II. Hauptlage, welche jeweils dann dunkelblau werden, wenn die Verbindungslinie der Pole einem blau gewordenen Kreuzarm parallel ist, weiß dagegen, wenn sie einem weißen Kreuzarm parallel geht (Fig. 58). Ist nur wenig Lösungsmittel vorhanden, so daß sich die Tropfen zu einer zusammenhängenden Schicht vereinigen, so gilt auch für diese das gleiche. Dieselbe zeigt, wie schon oben bemerkt, gegen die Oleat- bzw. Chloridseite hin äußerst feine Schraffierung (Fig. 52) mit häufigem Richtungswechsel, der besonders zwischen gekreuzten Nicols auffällt, da alle die Felder, in welchen die Schraffierung einer Nicoldiagonale parallel läuft, dunkel erscheinen, ebenso wie diejenigen Felder, in welchen Anschmiegung stattgefunden hat, so daß die optische Achse in die Sehrichtung fällt. Gegen die Mitte zu zeigen namentlich die angeschmiegten Felder deutliche mehr und mehr wachsende Aufhellung und die Mitte selbst ist bei der gewöhnlichen Dicke der Präparate gelbrot. Sie zeigt aber dunkle Streifen entsprechend Kern- und Konvergenzpunkten, wie bei gewöhnlichen tropfbar-

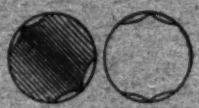


Fig. 58.

flüssig-kristallinischen Schichten[1]) und auch entsprechend halben Kern- und Konvergenzpunkten wie bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat[2]), bei welch letzterem ebenfalls starke Drehung der Polarisationsebene zu beobachten ist. Je nachdem man den Polarisator nach rechts oder links dreht, werden die dunkeln Streifen dunkelblau bzw. hellgrau oder umgekehrt (wie bei Fig. 57b und 57c) und auch die Felder nehmen im ersten Fall einen dunklen gewöhnlich braunen Ton an, die auf der anderen Seite werden umgekehrt hell, fast weiß. Die Grenze zwischen rechts- und linksdrehender Masse ist nicht geradlinig, sondern ganz unregelmäßig, es gibt wohl auch dazwischen Gebiete ohne Drehung entsprechend den unverdrehten Tropfen.

Man hat also ganz wie bei den zuerst behandelten Präparaten die eigentümliche Erscheinung, daß Zumischung von wenig Chlorid zu Oleat Drehung der Polarisationsebene nach links hervorruft, Zumischung von wenig Oleat zu Chlorid ebenso starke Drehung nach rechts. Daß die Mitte keine Drehung zeigt, könnte also so gedeutet werden, daß hier beide Stoffe in solcher Menge gemischt sind, daß sich die Drehungen aufheben. Es würden also die unverdrehten Tropfen in der Mitte nicht eine chemische Verbindung von Chlorid und Oleat sein, sondern eine Mischung zu etwa gleichen Teilen. Die Erscheinung, daß zu beiden Seiten der Mitte (ohne Drehung der Polarisationsebene und ohne Strukturverdrehung) zunächst starke Drehung der Polarisationsebene auftritt und wie hier stetige Abnahme der Drehung bei gleichzeitiger Zunahme der Feinheit der Schraffierung zu beobachten ist, fand sich ebenso bei den oben behandelten anderen Stoffpaaren, wobei kein Grund zur Annahme einer chemischen Verbindung vorlag, was somit für diese Erklärungsweise sprechen würde. Wäre sie richtig, so müßte es wirklich kontinuierlichen Übergang von den stäbchenförmigen schleimig-flüssigen Kristallen des Cholesterylchlorids (mit konischen Störungen) bis zu den kugeligen Mischkristalltropfen (welche im wesentlichen dieselbe Struktur aufweisen wie normale Kristalltropfen[3]) geben und zwar unter

1) Vgl. O. Lehmann, Die Lehre von d. flüss. Kristallen. S. 421 ff.
2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 55. S. 97. 1918.
3) In einem Fall beobachtete ich sogar bei einem Tropfen in II. Hauptlage eine windschief gebogene Trennungslinie wie bei Kristalltropfen von Paraazoxyphenetol und Anisaldazin. Vgl. die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 421. Fig. 361.

Vermittlung der ellipsoidischen sehr fein schraffierten Mischkristalltropfen, wie ich schon früher vermutete und zwar wäre der Übergang hier noch vollkommener als bei den früher beobachteten Mischungen (Cholesterylbenzoat und Paraazoxyphenetol), weil die gemischten Stoffe chemisch näher verwandt sind. Da indes, wie die Untersuchungen ergeben haben, die Schraffierung nicht in die Tiefe dringt, der Kern der Kristalle, welche richtiger als geschichtete Mischkristalle bezeichnet würden, viel mehr homogene Struktur besitzt, so erklärt sich die Zunahme der Drehung der Polarisationsebene gegen die Mitte hin wohl einfach durch die Abnahme der Strukturverdrillung (Schraffierung), da sie um so vollkommener auftreten muß, je mehr die Richtung der optischen Achsen der Schichtung sich nähert. Die Drehung der Polarisationsebene hat also mit der durch die Schraffierung zum Ausdruck kommenden Strukturverdrillung direkt nichts zu tun. Letztere müßte eigentlich der chemischen Zusammensetzung gemäß mit der Feinheit der Schraffierung zunehmen, nimmt aber in Wirklichkeit ab (vgl. Fig. 30), weil sie ihrer Natur nach überhaupt nur in der Richtung der optischen Achse und wenig davon abweichenden Richtungen beobachtet werden kann.

Da ihr Auftreten auf Cholesterylverbindungen und die bekannten Vorländerschen Stoffe beschränkt ist, muß wohl angenommen werden, daß die betreffenden flüssigen Kristalle dieser Stoffe, obschon im halbisotropen angeschmiegten Zustande scheinbar optisch einachsig, in Wirklichkeit optisch zweiachsig sind, und daß bei Mischung derselben schraubenartige Verdrehungen der zweiachsigen blättchenförmigen Moleküle auftreten analog den Glimmerkombinationen von Reusch und zwar so, daß beim Überwiegen des einen Stoffes die Verdrehung im Sinne des Uhrzeigers stattfindet, beim Überwiegen des anderen in entgegengesetztem Sinne. Daß auch der Windungssinn der spiralförmigen Schraffierungen zu beiden Seiten der Mitte, wie man vermuten könnte, und demgemäß der etwaige Rotationssinn der Tropfen[1]) die entgegengesetzte wäre, habe ich nicht beobachten können. Die Tropfen ertragen keine Erwärmung, welche hinreichend wäre die Erscheinung der Rotation hervorzubringen.

---

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 437.

Zusammenfassung.

Erzeugung von Schraubenstruktur durch mechanische Verdrehung ist bei erzwungen homogenen schleimig-flüssigen Kristallen nicht möglich, bei solchen mit konischen Strukturstörungen nur in geringem Maße und nur bei starker Deformation der letzteren. Durch fremde Beimischungen (Bildung von Mischkristallen) entsteht Schraubenstruktur dann, wenn sich die Moleküle (die nicht als einfache chemische Moleküle aufzufassen sind, sondern als größere Atomaggregate), nicht wie einachsige Blättchen verhalten, was z. B. für die Cholesterylverbindungen zutrifft. Sie äußert sich in Drehung der Polarisationsebene bei angeschmiegten Schichten, welche sich trotz der Zweiachsigkeit der Moleküle als einachsig verhalten, weil nur die Ebenen der Blättchen parallel bleiben, während die Kantenrichtungen sich beständig ändern. Diese Drehung *wächst bei geringem Zusatz eines Stoffes II zum Stoff I mit der Menge des Zusatzes* bis zu einem *Maximum* und verschwindet dann, falls Anschmiegung eintritt, weil sie bei Zusatz von Stoff I zu Stoff II im Fall des Maximums ungefähr *ebenso groß ist, aber den entgegengesetzten Sinn hat.* Findet keine Anschmiegung statt, so zeigt sich im Fall des Maximums ein *schroffer Umschlag von Rechts- und Linksdrehung.* Wird in einer keilförmigen Schicht gleichzeitig gewöhnliche Doppelbrechung durch Schiefstellung der Moleküle hervorgerufen, so zeigen sich die optischen Erscheinungen, welche früher durch Schwebungen der Homöotropie zu erklären versucht wurden.

Karlsruhe, Physik. Institut der techn. Hochschule.
30. August 1919.

(Eingegangen 3. September 1919.)

2. *Die Dispersion der Luft im ultravioletten Spektrum;*

von Wilhelm Traub.

(Tübinger Dissertation.)

Das theoretische Interesse, das die Refraktion und Dispersion in Gasen bietet, ist ein erhöhtes geworden durch die Arbeiten über den Molekülbau von Debeye[1]) und Sommerfeld.[2]) Die Refraktion und Dispersion der Luft hat vorwiegend praktische Bedeutung. Was das zahlreiche Beobachtungsmaterial anbelangt, so weichen die absoluten Werte bei allen Gasen stark voneinander ab. Bei Luft schwanken die Angaben für $(n-1)\,10^7$ zwischen 2918 (Lorenz) und 2954 (Ketteler) für $\lambda = 5462$. Bei genauer Betrachtung dürfte ja einigen Arbeiten nicht allzuviel Gewicht beigelegt werden, sei es, daß sie weniger sorgfältig ausgeführt worden sind, sei es, daß die angewandte Methode keine größere Genauigkeit zuläßt.

Völlige Unsicherheit in die Beobachtungen der Refraktion der Luft brachte die Arbeit von Posejpal.[3]) In $n-1 = Kp(1+\beta p)$ findet er für Drucke unterhalb 1 Atmosphäre für β einen mehr als viermal so großen Wert wie die seitherigen Beobachter. Seine Methode, den Koeffizienten β zu bestimmen, ist den bisher angewandten überlegen. Aus seinen Beobachtungen erhält Posejpal für 0° und 760 mm Druck $(n-1)\,10^7 = 2916{,}7 \pm 1{,}4$ (für $\lambda = 5462$ Å.E.), den er als „korrigierten Wert der Luftrefraktion" bezeichnet. Posejpal sieht eine Bestätigung seiner Messungen darin, daß sein Wert mit dem von Lorenz[4]) übereinstimmt. Lorenz beobachtet die Verschiebung des in einem Jaminschen Interferenzialrefraktor zustande gekommenen Interferenzsystems bei einer Druckänderung von 0 bis etwa 760 mm, und es ergibt sich

1) P. Debeye, Sitzungsberichte der Bayer. Akademie zu München 1915. S. 1.

2) A. Sommerfeld, Annalen d. Phys. 53. S. 508. 1917.

3) V. Posejpal, Annalen d. Phys. 53. S. 629. 1917.

4) L. Lorenz, Wied. Annalen 11. S. 70. 1880.

so unabhängig von β der richtige Wert für $n-1$ (denn es ist dann in Formel (4) S. 538 $p_1 + p_2 \sim 760$). Allerdings haben andere Forscher größere Druckunterschiede angewandt und Posejpal sieht hierin den Grund größerer Werte für $n-1$. Aber gerade bei Koch[1]) war $p_1 + p_2$ wenig von 760 mm verschieden, worauf Koch ausdrücklich aufmerksam macht. Koch findet aber für $(n-1)\,10^7$ den Wert 2937. Dieser Widerspruch ist vollständig.

Was die Dispersion im Ultraviolett anbelangt, so ist sie für kein Gas weiter als bis 2300 Å.E. untersucht worden. Den Dispersionsverlauf der Luft haben verfolgt: Koch[2]) bis 2379 Å.E., Kayser und Runge[3]) bis 2360 Å.E. Außer den Absolutwerten zeigen auch die Dispersionsmessungen erhebliche Abweichungen:

λ	Kayser u. Runge	Koch	Diff.
Å.E.	$(n-1)\,10^7$	$(n-1)^7$	
5462	2926,5	2937,0	10,5
2577	3146,9	3165,0	18,1

Außer Koch und Kayser und Runge haben noch Rentschler[4]) und Howell[5]) die Dispersion der Luft im Ultraviolett untersucht (mittelst Perot-Fabry-Interferometer). Rentschler kam nur bis 3341 Å.E., Howell bis 2652 A.E. (Statt versilberter Interferometerplatten und eines Konkavgitters wie Rentschler, benützt Howell vernickelte Platten und einen Quarzspektrographen.) Beide konnten keine größere Genauigkeit erreichen.

Aus oben erwähnten Gründen veranlaßte mich Herr Professor Paschen, die Absolutwerte möglichst genau zu bestimmen (die Absicht war, die vierte Stelle in $(n-1)\,10^7$ festzustellen) und den Dispersionsverlauf möglichst weit ins Ultraviolett zu verfolgen. Ich habe die Untersuchung für Luft ausgeführt.

Versuchsanordnung.

Bevor ich die angewandte Methode bespreche, möchte ich kurz über eine andere Methode berichten, die ich zuerst

1) J. Koch, Nova acta Regiae Soc. Scient. Upsaliensis, Ser. IV, Vol. 2, No. 5, S. 24.
2) J. Koch, Arkiv för Mat., Astron. och Fysik 8. S. 20. 1912.
3) H. Kayser u. C. Runge, Wied. Annalen 50. S. 293. 1893.
4) H. C. Rentschler, Astrophys. Journ. 28. S. 435. 1908.
5) J. Howell, Physical Review Ser. 2. 6. S. 81. 1915.

ausprobiert und die sich ihrer großen Einfachheit halber (das ganze Interferometer besteht aus einem einzigen Objektiv) auszeichnet, die ich aber aus gleich zu besprechenden Gründen schließlich doch nicht angewandt habe. Sie schließt sich eng an die von Rayleigh, Ramsay und Travers[1]) und Dorns Schülern[2]) angewandte Methode an (Beugung an einem Doppelspalt) und ist die folgende (Fig. 1): S ist ein mikro-

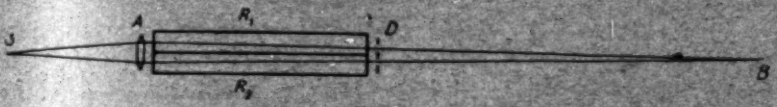


Fig. 1.

metrisch fein verstellbarer Spalt (Spaltöffnung horizontal). Sein von dem achromatischen Objektiv A (Brennweite 25 cm) entworfenes Bild würde bei B entstehen ($A\,B \sim 150$ cm). D ist ein Doppelspalt (ebenfalls horizontal). Seine Zwischenwand war 1,5 mm, die Öffnungen je 0,75 mm breit. Macht man den Spalt S genügend eng, so treten bei B (horizontale) Interferenzen auf. Zwischen A und D befand sich das 60 cm lange Doppelrohr $R_1\,R_2$ aus Messing. Die (horizontale) Trennungswand von R_1 und R_2 hatte eine Dicke von 1 mm. Die Verschlußplatten waren so aufgekittet, daß die Kittschicht an der Zwischenwand zwischen R_1 und R_2 nicht breiter als 1 mm war. An dem Orte größter Schärfe der Interferenzen (etwa bei B) befand sich der Spalt des Spektralapparates, der die horizontalen Interferenzen spektral zerlegte.

Die Interferenzen waren bei obigen Dimensionen noch sehr eng. Sie hatten bei $\lambda = 2140$ Å.E. einen Abstand von 0,09 mm. Noch stärkere Vergrößerung hatte zu große Lichtschwächung zur Folge und die Zwischenwand des Doppelspaltes konnte auch kaum schmäler als 1,5 mm gemacht werden. Der kleine Abstand der Interferenzen ist der Nachteil der Methode: Steht z. B. der Spektralapparat nicht absolut fest und verschiebt sich dadurch etwa die über den Spalt des Spektralapparates angebrachte Marke (Spinnfaden) nur um $^1/_{100}$ mm, so gibt das bei $\lambda = 2100$ Å.E. schon einen Fehler

1) Lord Rayleigh, W. Ramsay und M. W. Travers, Proc. Roy. Soc. **62**. S. 228. 1898; **64**. S. 198. 1899.

2) Vgl. z. B. K. Herrmann, Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellsch. 1908. S. 210.

von $^1/_{10}$ einer Streifenbreite. Außerdem gelang es mir nicht, unterhalb 2100 Å.E. brauchbare Interferenzen zu bekommen. Es wurde deshalb die Jaminsche Anordnung vorgezogen. Im wesentlichen wurde Flußspatoptik verwendet. Jaminsche Refraktorplatten aus Flußspat von den gewöhnlichen Dimensionen standen natürlich nicht zur Verfügung. Als solche diente vielmehr eine in zwei Teile zerschnittene exakt planparallele Flußspatplatte von 5 mm Dicke. Auch hier wie bei der zuerst besprochenen Methode mußte die Wand des Interferenzdoppelrohrs möglichst dünn sein; sie hatte eine Dicke von 1 mm und die planparallelen Flußspatverschlußplatten waren wieder so aufgekittet, daß die Kittschicht zwischen den beiden Röhren nicht breiter als 1 mm war. Die Anordnung war im einzelnen die folgende (Fig. 2):

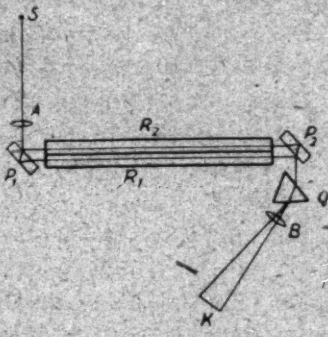


Fig. 2.

Der vertikale Spalt S stand im Brennpunkt des achromatischen Objektivs A (Brennweite 25 cm). P_1 und P_2 sind die Refraktorplatten; R_1 R_2 das 51 cm lange Doppelrohr aus Messing. Das achromatische Objektiv B (Brennweite ebenfalls 25 cm) entwarf bei K, dem Ort der photographischen Platte, ein scharfes Bild der horizontalen, durch das Prisma Q (im sichtbaren Spektrum ein Glasprisma mit großer Dispersion, im Ultraviolett bis 2026 Å.E. ein Quarzprisma, bis 1854 ein Flußspatprisma) spektral zerlegten Interferenzen. Befindet sich der achromatische Streifen (Gangunterschied 0) im Gesichtsfeld bei K, so erscheint das Spektrum bei Belichtung mit weißem Licht von nach Violett konvergierenden Interferenzen durchzogen — ein zum achromatischen Streifen symmetrisches Bild.

Über die Mitte des Spaltes S war als Marke ein Kokonfaden gezogen und der Refraktor so justiert, daß bei kommunizierenden Interferenzröhren (die Röhren R_1 und R_2 konnten in der gewöhnlichen Weise unter sich, sowie mit Zuleitungsröhren für die Gase, mit Manometer und Pumpe in Verbindung gesetzt werden) das Bild des Kokonfadens in

der Mitte des achromatischen Streifens bei K zu sehen war. Bei Beobachtungen im äußersten Ultraviolett war außerdem noch bei K eine Marke angebracht, da hier die Spaltmarke auf der photographischen Platte nicht immer mit gewünschter Deutlichkeit hervortrat.

Wird etwa durch Druckänderung in der einen Röhre ein Gangunterschied hervorgebracht, so liegen im kontinuierlichen Spektrum die Interferenzen schief und es kann mit Hilfe des kontinuierlichen Spektrums festgestellt werden, wieviel Interferenzbanden für irgendeine Wellenlänge mehr gewandert sind als für eine andere.

Zur genauen Bestimmung und Konstanthaltung der Temperatur waren die Interferenzröhren in ein Wasserbad gesetzt. Das Thermometer war in fünfzigstel Grade geteilt und mit dem Normalthermometer verglichen. Das zur Druckablesung benutzte Manometer hatte einen lichten Durchmesser von etwa 16 mm, so daß der Fehler infolge Kapillardepression sicher kleiner als $^1/_{10}$ mm war. Zur völligen Trocknung der Interferenzröhren waren an ihnen Behälter mit Phosphorpentoxyd angebracht.

Um eine etwaige Durchbiegung der planparallelen Verschlußplatten der Interferenzröhren festzustellen, wurde das Interferenzsystem bei kommunizierenden luftleeren, sowie bei kommunizierenden, mit Luft von Atmosphärendruck gefüllten Röhren photographiert. Weder eine Verschiebung, noch ein Unschärferwerden der Interferenzen konnte festgestellt werden, ein Zeichen, daß sich die Platten nicht durchbogen.

Die Formel für $n - 1$.

Es sei L die Länge der Interferenzröhren,
s die Zahl gewanderter Streifen,
λ_0 die Wellenlänge im Vakuum,
λ_1 die Wellenlänge beim Druck p_1,
λ_2 die Wellenlänge beim Druck p_2,

(die Temperatur sei zunächst als konstant vorausgesetzt), dann ist:

$$\frac{L}{\lambda_1} - \frac{L}{\lambda_2} = s$$

oder

$$L\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_2}\right) = s\lambda_0$$

oder

$$n_1 - n_2 = \frac{s \cdot \lambda_0}{L}$$

oder

$$(1) \qquad (n_1 - 1) - (n_2 - 1) = \frac{s \cdot \lambda_0}{L}.$$

Nun gilt allgemein

$$(2) \qquad n - 1 = c\,(p + \beta\, p^2),$$

also auch

$$n_1 - 1 = c\,(p_1 + \beta\, p_1^2),$$

$$n_2 - 1 = c\,(p_2 + \beta\, p_2^2),$$

damit nach (1)

$$(3) \qquad c\left\{(p_1 - p_2) + \beta(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)\right\} = \frac{s \cdot \lambda_0}{L}.$$

Ist n_0' der Brechungsexponent bei 760 mm, so ist nach (2) und (3)

$$n_0' - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \beta \cdot 760)}{L\,(p_1 - p_2)\,[1 + \beta(p_1 + p_2)]}.$$

Will man den Brechungsexponenten auf 0^0 reduzieren, so hat man $n_0' - 1$ mit $1 + \alpha t$ zu multiplizieren; es ist also

$$n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \beta\, 760)\,(1 + \alpha\, t)}{L\,(p_1 - p_2)\,[1 + \beta(p_1 + p_2)]}$$

oder

$$n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha\, t)}{L\,(p_1 - p_2) \cdot \dfrac{1 + \beta(p_1 + p_2)}{1 + \beta \cdot 760}}$$

oder, da β eine kleine Größe,

$$(4) \qquad n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha\, t)}{L\,(p_1 - p_2)\,\{1 - \beta\,[760 - (p_1 + p_2)]\}}.$$

Nach Mascart ist nun $\beta = 0{,}0000007$, nach Kayser $0{,}00000095$. Die neueste Arbeit über die Abhängigkeit des Brechungsexponenten vom Druck ist die schon erwähnte von Posejpal. Er findet $\beta = 0{,}00000896$. Aber selbst dann würde die Korrektion $\beta\,[760 - (p_1 + p_2)]$ die Fehlergrenze nicht übersteigen, da bei meinen Messungen $760 - (p_1 + p_2)$ durchschnittlich weniger als 30 mm betrug. An Stelle der Formel (4) benutzte ich deshalb die Formel

$$(5) \qquad n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha\, t)}{L\,(p_1 - p_2)},$$

die man unter der Annahme $n - 1 = c\,p$ abgeleitet hätte.

Für a wurde nach übereinstimmenden Messungen von Regnault und Chappuis der Wert 0,00367 benutzt.

Beobachtungen.

Aus Formel (4) oder (5), S. 538, folgt, wenn n_1 bzw. n_2 die Brechungsexponenten für die Wellenlängen λ_1 bzw. λ_2 bedeuten:

$$\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{s_1 \lambda_1}{s_2 \lambda_2}.$$

Weiß man also, wieviele Interferenzen für die verschiedenen Wellenlängen bei einer Druckänderung in einer Röhre gleichzeitig über den Kokonfaden gewandert sind, so ist die Dispersion damit charakterisiert. Zur Bestimmung des Absolutwertes des Brechungsexponenten für irgendeine Wellenlänge ist noch die genaue Kenntnis der Druckänderung, Temperatur und Länge der Interferenzröhren erforderlich [Formel (5)]. Als Ausgangspunkt wurde die grüne Hg-Linie gewählt. Für sie wurde der Absolutwert genau bestimmt, relativ zu ihr wurden die Brechungsexponenten für die anderen Wellenlängen gemessen.

Zunächst beobachtete ich im Hg-Spektrum. Die Interferenzröhren wurden ausgepumpt, bis ein mit ihnen in Verbindung stehendes Geißlerrohr Kathodenstrahlen zeigte, hierauf langsam Luft so lange eingeführt, bis die Luft in den Interferenzröhren einen kleinen Überdruck (etwa 5 mm) gegen die Atmosphäre hatte. Die Luft wurde durch eine Flasche mit NaOH, ein Ätznatron-, ein Chlorkalzium- und ein Phosphorpentoxydrohr geleitet. Sie war also trocken und kohlensäurefrei. Das Interferometer wurde sich einige Zeit überlassen, bis Temperaturgleichgewicht eingetreten war. Jetzt wurde bei kommunizierenden Interferenzröhren eine Aufnahme des Hg-Spektrums gemacht; hierauf, um in den Röhren Atmosphärendruck herzustellen, die Röhren mit der Atmosphäre etwa eine Minute in Verbindung gesetzt (die Verbindung geschah durch ein längeres Glasrohr durch die Gaede-Kolbenpumpe hindurch, in die auch kohlensäurefreie Luft eingeleitet war), eine Röhre abgeschlossen, Temperatur abgelesen, die andere Röhre ausgepumpt, Manometer abgelesen und nun das Hg-Spektrum zum zweitenmal photographiert. Über diese zweite Aufnahme wurde noch ein kontinuierliches Spek-

trum photographiert (im sichtbaren Spektrum Azolampe, im Ultravioletten ein Cd-Funke). Aus der photographischen Platte, die unter dem Komparator ausgemessen wurde, konnten durch das Linienspektrum für die einzelnen Wellenlängen die Bruchteile der über den Kokonfaden gewanderten Streifen entnommen werden. Es wurden beispielsweise bei einer Aufnahme, bei der die Druckänderung 731,01 mm betrug und die Temperatur 16,52° abgelesen wurde, für die grüne Hg-Linie eine Streifenwanderung von ...,39 gemessen. Die ganze Zahl gewanderter Streifen bekam ich folgendermaßen:

Bevor mit photographischen Aufnahmen und Messungen begonnen wurde, hatte ich aus vier Vorversuchen den Brechungsexponenten der Luft für die grüne Hg-Linie provisorisch bestimmt, indem ich in einem hinter der Kamera aufgestellten mikrometrisch verschiebbaren Fernrohre direkt die bei einer bestimmten Druckänderung vorbeiwandernden Streifen gezählt hatte. Es ergab sich als vorläufiger Wert $(n-1)\,10^7 = 2932{,}2$. Die Länge der Interferenzröhren wurde ebenfalls provisorisch gemessen (mit Kathetometer) zu 510,16 mm. Aus vorläufig bekanntem Brechungsexponenten (2932,2), Länge der Röhren (510,16), abgelesener Druckänderung und Temperatur (in unserem Beispiel 731,01 mm bzw. 16,52°) berechnete ich nach Gleichung (5), S. 538, die Zahl gewanderter Streifen

$$s = \frac{(n-1)\cdot L\cdot(p_1 - p_2)}{\lambda_0 \cdot 760 \cdot (1 + \alpha\, t)},$$

in unserem Beispiel

$$s = \frac{2932{,}2 \cdot 510{,}16 \cdot 731{,}01}{5462{,}26 \cdot 760 \cdot 1{,}06063} = 248{,}36.$$

Es waren somit für die grüne Hg-Linie 248,39 Streifen gewandert. Um einen ganzen Streifen konnte man sich nicht täuschen: Die beobachteten und berechneten Bruchteile der gewanderten Streifen differierten in der Regel um weniger als $^1/_{10}$ einer Streifenbreite. Der provisorische Wert für $(n-1)\,10^7$, sowie die provisorische Längenmessung der Röhren dienten nur dazu, die ganze Zahl der bei den photographischen Messungen gewanderten Streifen festzustellen. Sämtlichen im folgenden mitgeteilten Beobachtungen sind nur photographische Messungen zugrunde gelegt.

Hatte ich so für die grüne Hg-Linie die Zahl der gewanderten Streifen bestimmt, so konnte mit Hilfe des kontinuierlichen Spektrums auch für die anderen Wellenlängen die Zahl gewanderter Streifen festgestellt werden. Schon nach zwei Aufnahmen war das kontinuierliche Spektrum zu entbehren, man konnte sich nicht um einen ganzen Streifen täuschen.

Das Hg-Spektrum benützte ich bis 2753 Å.E. Von 2573 bis 2026 Å.E. diente als Lichtquelle der durch hochgespannten Wechselstrom erzeugte Funke einer Legierung von 10 Proz. Cd mit 90 Proz. Zn. Als Kapazität dienten vier Leidener Flaschen. Selbstinduktion wurde keine benützt. Hier verfuhr ich folgendermaßen:

Es wurde bei kommunizierenden, mit Luft gefüllten Röhren photographiert: 1. das Hg-Spektrum, 2. das Cd-Zn-Spektrum, 3. wieder das Hg-Spektrum. Nun wurde eine Röhre ausgepumpt und photographiert: 4. das Hg-Spektrum, 5. das Cd-Zn-Spektrum, 6. nochmals das Hg-Spektrum. Die Aufnahmen 3. und 4. lieferten die gleichzeitig gewanderte Interferenzenzahl für die Wellenlängen des Hg-Spektrums, die Aufnahme 2. und 5. für die Wellenlängen des Cd-Zn-Spektrums. Um den Anschluß des Cd-Zn-Spektrums ans Hg-Spektrum zu erhalten, berechnete ich sowohl aus 1. und 6., sowie aus 3. und 4. für $\lambda = 4046$ Å.E. die Zahl gewanderter Streifen und nahm aus beiden Beobachtungen das arithmetische Mittel. Nur so hatte ich für eine Hg-Linie die Zahl gewanderter Streifen, die den gewanderten Streifen der verschiedenen Wellenlängen des Cd-Zn-Spektrums entsprach; denn, während die Belichtungszeit für das Hg-Spektrum etwa 3 Minuten betrug, betrug sie für das Cd-Zn-Spektrum eine schwache Stunde, in welcher Zeit kleine Änderungen denkbar waren. Meistens konnte allerdings zwischen den Aufnahmen 1. und 3. bzw. 4. und 6. kein Unterschied festgestellt werden.

Bei zwei Aufnahmen bekam ich (bei einer Belichtungszeit von $1^1/_2$ Stunden) kontinuierlichen Grund bis 2026, so daß die Zahl der gewanderten Interferenzen ohne weiteres einwandfrei festgestellt werden konnte.

Die Dispersion von 1990 bis 1854 bekam ich auf folgende Weise. Es wurde wieder wie oben bei kommunizierenden, mit Luft gefüllten Röhren photographiert 1. das Hg-Spektrum,

2. das Aluminiumfunkenspektrum, 3. das Hg-Spektrum. Von einer Röhre wurde Luft ausgepumpt und 4. das Hg-Spektrum, 5. der Al-Funke, 6. das Hg-Spektrum photographiert. Aus 1., 3., 4. und 6. wurde für die Hg-Linie 2968 Å.E. die Zahl gewanderter Streifen bestimmt. Aus ihr berechnete ich mit Hilfe der Kochschen Dispersionsformel (S. 545) die Zahl gewanderter Streifen für die Al-Linien 1990 bis 1854. Nun zeigten schon bei 2145 und 2026 Å.E. meine Dispersionsmessungen von den extrapolierten Kochschen kleine systematische Abweichungen (Tab. 8, S. 546). Diese Abweichungen mußten bei 1990 etwa dieselben sein wie bei 2026. Dies war auch der Fall. Von jetzt ab wurden sie systematisch weiter größer, so daß die Zahl gewanderter Streifen mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden konnte. Zur sicheren Feststellung photographierte ich bei kleineren Druckänderungen (etwa $^1/_4$, dann $^1/_8$ Atmosphäre). Die Annahme wurde bestätigt. Schließlich erschien bei einer Druckänderung von 71 mm, was 87 gewanderten Streifen der Linie 1854 Å.E. entsprach, kontinuierlicher Grund, so daß auch der leiseste Zweifel noch beseitigt wurde.

Bei den Dispersionsmessungen bis $\lambda = 2026$ Å.E. wurde das eine Rohr vollständig ausgepumpt. Für $\lambda = 5462$ Å.E. wanderten etwa 250 Streifen, für $\lambda = 2026$ Å.E. nahezu 800. Die Interferenzen der Linien 1990 bis 1854 zeigten bei vollständigem Auspumpen einer Röhre infolge der kleinen Dispersion des Flußspatprismas nicht mehr die gewünschte Schärfe; es hätte, um sie zu erreichen, der Spalt S (Fig. 2) sehr enge gemacht werden müssen, was mit einer Lichtschwächung verbunden war. (Die Al-Linien im äußersten Ultraviolett sind alle verbreitert, da der größeren Intensität halber keine Selbstinduktion benützt wurde. Als Kapazität dienten sechs Leidener Flaschen.) Ich zog es deshalb vor, bei kleineren Druckänderungen zu messen; immerhin wanderten im Maximum für 1854 noch 486 Streifen.

Die Expositionszeit betrug hier etwa $1^1/_2$ Stunden. Der Al-Funke wurde nicht, wie die Hg-Lampe oder der Cd-Zn-Funke, durch ein Objektiv auf den Spalt S abgebildet (Fig. 2), sondern befand sich direkt hinter S. Da die Überschlagsstelle an den Elektroden nicht konstant gehalten werden konnte, mußte während der ganzen Expositionszeit in einer dem Ob-

jektiv *A* gegenübergestellten Glasplatte das Aluminiumlicht beobachtet und die Stelle des Al-Funkens dauernd nachreguliert werden, um größtmöglichste Intensität zu bekommen.

Ergebnisse.

Bei den verschiedenen Messungen wurde abwechselnd das eine oder andere Interferenzrohr ausgepumpt. Um ein Bild der Genauigkeit zu geben, ist in Tab. 1 angegeben, wieviele Streifen (s) der obenstehenden Wellenlängen (λ) 10000 Streifen der grünen Hg-Linie nach meinen einzelnen Beobachtungen entsprachen.

Tabelle 1.

$\lambda = 4047$ s	$\lambda = 2968$ s	$\lambda = 2026$ s	Gewicht	$\lambda = 1854$ s	Gewicht
13717,7	19337,9	31251,6	(2)	35817,7	(2)
13717,7	19336,5	31250,8	(1)	35827,1	(2)
13718,5	19336,7	31250,2	(1)	35838,0	(1)
13717,9	19336,9	31250,2	(2)	35819,2	(1)
13718,2	19337,9	31257,6	(2)	35817,6	(3)
13718,5	19337,2	31255,8	(2)	35835,7	(3)
13717,6		31251,3	(2)		
Mittel 13718,0	19337,2	31252,9		35825,6	

Der mittlere Fehler des Mittelwertes würde darnach betragen:

bei $\lambda = 4047$ Å.E. $\pm$ 0,14, also etwa 0,001 Proz.,
„ $\lambda = 2968$ Å.E. $\pm$ 0,24, „ „ 0,0013 „
„ $\lambda = 2026$ Å.E. $\pm$ 1,13, „ „ 0,0037 „

Bei $\lambda = 1854$ sind die Abweichungen etwas größer, da die Röhren nicht mehr ganz ausgepumpt wurden; immerhin beträgt der mittlere Fehler auch hier nur $\pm$ 3,8, also etwa 0,01 Proz.

Die große Genauigkeit, die hier bei den Dispersionsmessungen zu erzielen ist, ist durch die Methode bedingt: Die photographische Platte allein gibt die Dispersion; Temperatur- und Druckablesungen, Länge der Interferenzröhren kommen gar nicht in Rechnung. Irgendwelche Veränderungen während einer Aufnahme wirken bei allen Wellenlängen gleichzeitig und in gleicher Richtung.

Was die Absolutwerte anbelangt, so kommt hier der

Fehler durch Temperatur- und Druckbeobachtung, sowie der konstante Fehler der Messung der Röhrenlänge in Rechnung. Die einzelnen Beobachtungen finden sich in Tab. 2.

Tabelle 2.

$(n-1)10^7$ für $\lambda = 5462$
2932,89
2932,42
2932,97
2932,69
2932,24
2932,95
2932,75
2932,99
Mittel 2932,74

Der mittlere Fehler würde demnach $\pm$ 0,1, also 0,0034 Proz. betragen.

Die Länge der Röhren wurde auf folgende Weise gemessen: Auf einem Messingstabe waren zwei gegen einander gerichtete Spitzen aus Kupfer verschiebbar (die eine Spitze noch mikrometrisch). Mit ihnen wurden die mit Verschlußplatten versehenen Röhren an der Stelle der Zwischenwand abgetastet und die Entfernung der Spitzen mit dem Kathetometer gemessen; die Dicke der Verschlußplatten davon abgezogen. Die Messungen ergaben:

an der einen Röhrenseite	an der gegenüberliegenden
515,88	516,02
515,91	515,99
515,89	516,02
Mittel 515,89 mm	Mittel 516,01 mm

Die Verschlußplatten waren also etwas schief aufgekittet. Die Höhe des benutzten Lichtbündels war aber nicht ganz halb so groß als die Entfernung der Punkte, an denen bei den obigen zwei Messungen die Kupferspitzen angesetzt wurden, so daß die Lichtwege der entferntesten Lichtstrahlen innerhalb der Interferenzröhren um 0,5 mm, vom mittleren Lichtstrahl also um 0,25 mm differierten. $^1/_{20}$ mm dürfte bei der Messung der Röhrenlänge gesichert sein; das ist 0,01 Proz.

Der Durchschnitt der obigen zwei Messungen ist 515,95. Die Dicke der Verschlußplatten betrug $2 \cdot 2{,}95 = 5{,}90$ mm, also die Länge der Luftschicht in den Röhren 510,05 mm. Der Glasmaßstab des Kathetometers ist auf 0° zu reduzieren. Damit wird die Länge der Luftschicht 510,10 mm. Nimmt man an, der Fehler von 0,01 Proz. in der Längenmessung der Röhren addiere sich zu dem Beobachtungsfehler von 0,0034 Proz., so macht das immer noch nur vier Einheiten in der fünften Stelle aus. Die vierte Stelle in $(n-1)10^7$ dürfte demnach für sämtliche Brechungsexponenten sicher sein.

In Tab. 3 sind die Brechungsexponenten sowie die 10000 Streifen der grünen Hg-Linie entsprechende Streifenzahl der verschiedenen Wellenlängen λ angegeben. Außerdem stehen dort die von Koch und Kayser und Runge gefundenen Werte.

Koch arbeitet nach derselben Methode wie ich. Er gibt den Fehler seiner Dispersionsmessungen auf weniger als 0,01 Proz. an. Den Absolutwert bestimmt Koch bei seinen Dispersionsmessungen im Ultraviolett nicht genau; er nimmt einen früher von ihm auf nicht photographischem Wege bestimmten Wert des Brechungsexponenten für $\lambda = 5462$ an. Koch verwendet das Hg-Spektrum und ein Vergleich ist teilweise direkt möglich. Für die anderen von mir benützten Wellenlängen habe ich nach der von Koch angegebenen Dispersionsformel:

$$\frac{3}{2}\,\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{5711190\cdot 10^{-8}}{211{,}146 - 10^{-8}\lambda^{-2}} + \frac{87003\cdot 10^{-8}}{49{,}5608 - 10^{-8}\lambda^{-2}}$$

(λ in cm) die Brechungsexponenten, sowie die 10000 Streifen der grünen Hg-Linie entsprechende Streifenzahl berechnet. Die intrapolierten Werte sind mit einem Stern, die extrapolierten mit einer Klammer versehen (Koch beobachtet bis 2379 Å.E.). Bis 2300 Å.E. stimmen die Dispersionsmessungen (*s*) gut überein (bis auf 0,01 Proz.). Die Abweichung bei 2026 ist schon merklich; sie entspricht bei 800 gewanderten Streifen 0,4 einer Streifenbreite. Von jetzt ab nehmen die Abweichungen rasch zu, was ja durch die nun beginnende Absorption der Luft verständlich ist.

Die Absolutwerte weichen voneinander ab. Koch nimmt zwar kohlensäurehaltige Luft, was aber die Werte von $(n-1)\,10^7$ nur um etwa eine Einheit der vierten Stelle größer macht, die Abweichungen würden dann immer noch drei Einheiten der vierten Stelle, also 0,1 Proz., betragen.

Kayser und Runge haben mittelst Hohlprisma, eingeführt zwischen Gitter und Kassette, die Dispersion der Luft bis 2360 Å.E. bestimmt. Ich habe ebenfalls nach der von ihnen angegebenen Dispersionsformel

$$(n-1)10^8 = 23787 + 131{,}610^{-4}\lambda^{-2} + 3{,}16\cdot 10^{-8}\lambda^{-4} \quad (\lambda \text{ in cm})$$

für die von mir benützten Wellenlängen die Werte ausgerechnet

Tabelle 3.

λ (Vakuum) Å. E.	Traub		Koch				Kayser u. Runge	
	s	$(n-1)10^7$	s	Diff.	$(n-1)10^7$	Diff.	$(n-1)10^7$	Diff.
5462,26	10000	2932,74	10000		2937,00	+4,26	2926,4*	−6,3
4359,56	12671,9	2966,09	12672,7	+0,8	2970,60	+4,51		
4047,70	13718,0	2981,26	13717,7	−0,3	2985,53	+4,27	2970,7	−10,6
3342,44	16908,0	3034,29	16909,3	+1,3	3038,93	+4,64	3021,8*	−12,5
2968,15	19337,2	3081,63	19338,5	+1,3	3086,31	+4,68		
2753,61	21101,2	3119,68	21103,7	+2,5	3124,59	+4,91	3107,2*	−12,5
2573,83	22872,5	3160,78	22874,7*	+2,2	3165,71*	+4,93		
2313,53	26121,6	3244,70	(26121,0)	−0,6	(3249,37)	+4,67		
2145,06	28861,0	3323,93	(28854,4)	−6,6	(3328,02)	+4,09		
2026,05	31252,9	3390,71	(31238,4)	−14,5	(3403,07)	+3,36	(3386,8)	−12,5
1990,52	32072,1	3427,63	(32047,4)	−24,7	(3429,97)	+2,34		
1935,85	33445,2	3476,21	(33401,0)	−44,2	(3476,67)	+0,46		
1862,77	35556,8	3556,16	(35464,1)	−92,7	(3552,06)	−4,10	(3520,4)	−35,8
1854,73	35825,6	3567,58	(35712,0)	−113,6	(3561,50)	−6,08	(3528,3)	−39,2

(Tab. 3). Die Luft war bei Kayser und Runges Messungen kohlensäurehaltig und nicht getrocknet. Für trockene Luft wäre nach Kayser und Runge $(n-1)10^7$ um etwa drei Einheiten der vierten Stelle zu erhöhen. Die Abweichung von meinen Messungen wäre demnach bei $\lambda = 5462$ noch vier Einheiten der vierten Stelle, so daß sich mein Wert in der Mitte der von Koch und Kayser-Runge gefundenen befindet. Es sei noch der Wert von Cuthbertson erwähnt; er findet für kohlensäurehaltige Luft $(n-1)10^7 = 2936$. Cuthbertson beobachtet bei verschiedensten Drucken (er läßt 400, 600, 800 Streifen vorbeiwandern).

Kayser und Runge haben Druckänderungen von etwa 10 Atmosphären.

Mit dem Werte von Posejpal ($2916{,}7 \pm 1{,}4$) ist der von mir gefundene ebenfalls (wie der Kochsche) im Widerspruch.

Die Beobachtungen lassen sich durch die Dispersionsformel

$$n - 1 = \frac{5\,517\,160 \cdot 10^{-8}}{199{,}5534 - 10^{-8}\lambda^{-2}} + \frac{48\,803 \cdot 10^{-8}}{48{,}8193 - 10^{-8}\lambda^{-2}}$$

(λ in cm) wiedergeben. Die beobachteten und wiederberechneten Werte finden sich in Tab. 4. Selbst die Differenzen bei 186 und 185 betragen weniger als 0,02 Proz.; immerhin sind sie auffallend. Es könnte sein, daß sie der bei 186 beginnenden

Tabelle 4.

λ	$(n-1)\,10^7$ beobachtet	$(n-1)\,10^7$ berechnet	Differenz
5462	2932,74	2932,58	−0,16
4359	2966,09	2966,19	+0,10
4047	2981,26	2981,38	+0,12
3342	3034,29	3034,55	+0,26
2968	3081,63	3081,80	+0,17
2753	3119,68	3119,73	+0,05
2573	3160,78	3160,91	+0,13
2313	3244,70	3244,49	−0,21
2145	3323,93	3323,63	−0,30
2026	3399,71	3400,02	+0,31
1990	3427,63	3427,71	+0,08
1935	3476,21	3476,33	+0,12
1862	3556,16	3556,78	+0,62
1854	3567,58	3567,05	−0,53

starken Absorption der Luft und dem damit verbundenen raschen Ansteigen des Brechungsexponenten zuzuschreiben sind. C. Runge[1]) hat die Wellenlängen dieser Aluminiumlinien im Vakuum und bei Atmosphärendruck bestimmt. Er findet die Unterschiede 0,68 bei 1854 und 0,61 bei 1862, während nach der extrapolierten Kayser und Rungeschen Dispersionsformel beidemal sich die Unterschiede 0,61 Å. E. ergeben sollten. Runge weist hier auf die Möglichkeit hin, dieser Unterschied könnte in der bei 1862 scharf einsetzenden Absorption der Luft und dem damit verbundenen raschen Ansteigen des Brechungsexponenten seinen Grund haben. Die vorliegenden Messungen haben gezeigt, daß ein solch rasches Ansteigen des Brechungsexponenten, wie Runge es für möglich hält, nicht stattfindet. Es dürfte vermutlich bei den Messungen Runges entweder die im Vakuum gemessene Linie 1854 um 0,07 Å. E. zu groß oder die in Luft gemessene um soviel zu klein sein.

Aus der Dispersionsformel berechnet sich die Eigenwellenlänge der einen Elektronengattung zu $\lambda_1 = 1511$ Å. E., die der zweiten zu $\lambda_2 = 708$ Å. E. (Koch findet $\lambda_1 = 1421$ Å. E. und $\lambda_2 = 688$ Å. E.). Die erstere ist dem Sauerstoff zuzuschreiben, da nach Lyman[2]) Sauerstoff einen kräftigen Ab-

1) C. Runge, Wied. Annalen 55. S. 44—48. 1895.
2) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 27. S. 87. 1908.

sorptionsstreifen zwischen 1760 und 1270 Å.E. zeigt, während Stickstoff zwischen 1800 und 1250 Å.E. nur schwache Absorption aufweist. Die aus der Dispersionsformel berechnete Eigenwellenlänge (1511 Å.E.) fällt genau in die Mitte des fraglichen Absorptionsgebietes (1515 Å.E.).

Zusammenfassung.

Es wurde der absolute Wert des Brechungsexponenten der kohlensäurefreien trockenen Luft für die grüne Hg-Linie möglichst genau bestimmt [$(n-1)\,10^7 = 2932{,}74$]. Die vierte Stelle dürfte gesichert sein. Die Messung ergibt (wie auch die Kochsche) einen vollständigen Widerspruch mit den Messungen Posejpals (Bestimmung von K und β in $n-1 = Kp(1+\beta p)$ und damit von $n-1$).

Die Dispersion der Luft wurde bis 1854 Å.E. untersucht. Die Beobachtungen lassen sich sehr befriedigend durch eine dielektronische Dispersionsformel wiedergeben. Die Dispersionsmessungen stimmen mit denen von Koch im gemeinsam beobachteten Spektralbereich sehr gut überein; im Bereich kürzerer Wellen finden von den extrapolierten Kochschen Werten Abweichungen statt.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Herrn Prof. Paschen auch an dieser Stelle für die Anregung und Hilfe bei der Arbeit herzlichen Dank zu sagen.

Tübingen, Physikalisches Institut, August 1919.

(Eingegangen 9. September 1919.)

3. *Spezifische Wärme und Zustandsgleichung von Kristallen;* *von K. Försterling.*

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) hatte ich gelegentlich anderer Überlegungen das Gesetz der thermischen Dilatation isotroper einatomiger Körper aus dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet. Die inzwischen von M. Born[2]) ausgebaute Dynamik der Kristallgitter gestattet, die dort angewandte Methode auch auf ein- und mehratomige Kristalle zu übertragen.

Die thermische Dilatation steht in engem Zusammenhang mit dem Energieinhalt des betreffenden Körpers. Da die von Born und v. Karman ausgearbeitete Theorie der spezifischen Wärmen, welche von Born ihre endgültige Fassung in den Gleichungen (189) und (198) (S. 75—76) des angeführten Werkes erhalten hat, noch nicht in einwandfreier Weise mit den Beobachtungen verglichen ist, habe ich zunächst versucht, diese Theorie an einigen Beispielen zu prüfen, zumal nach einer Bemerkung von Grüneisen[3]) die Bornsche Theorie versagen sollte. Indessen knüpft die Rechnung von Grüneisen an die Näherungsformel (200) (S. 77) an, welche, wie unten gezeigt wird, auf die bei Flußspat vorliegenden Bedingungen nicht zulässig ist. Besonders lag mir daran, in dieser Arbeit die aus der Bornschen Theorie sich ergebenden Atomfrequenzen festzustellen, deren Lage gegenüber den Reststrahlenwellenlängen in der nachstehenden Arbeit auf Grund der Reflexionstheorie berechnet werden soll.

Nach Born zerfällt der Energieinhalt in 2 Teile, die im wesentlichen den beiden bereits von Nernst[4]) auseinander gehaltenen Anteilen entsprechen: der Bewegungen der Moleküle

1) K. Försterling, Ann. d. Phys. 47. S. 1127. 1915.
2) M. Born, Dynamik der Kristallgitter. Teubner, 1915.
3) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 55. S. 384. Anm. 2. 1918.
4) W. Nernst, Wolfskehlvortrag Göttingen (Teubner 1914) S. 79.

als Ganze und der Atome eines Moleküls gegeneinander. Während der letztere Anteil dem Einsteinschen Gesetz unterworfen ist, wird der andere Anteil nach der Methode von Debye[1]) entwickelt. Allerdings besteht hier schon bei isotropen Körpern ein wichtiger Unterschied: Während Debye für die transversalen und longitudinalen Wellen eine gemeinsame Grenzfrequenz ansetzt, wird in der Bornschen Theorie für eine jede der Wellengattungen eine besondere angenommen. Eine Entscheidung zwischen diesen beiden Annahmen ist experimentell bisher nicht möglich gewesen. Dagegen werden wir in der Theorie der thermischen Dilatation zeigen können, daß der Bornsche Ansatz, aber nicht der Debysche mit dem II. Hauptsatz der Thermodynamik verträglich ist.

Bei einem Kristall liegen die Verhältnisse recht kompliziert. Hier pflanzen sich in jeder Richtung 3 Wellen fort. Betrachten wir einen dieser Wellentypen und zwar nur solche Wellen dieser Art, deren Fortpflanzungsrichtung in einem Kegel vom Öffnungswinkel $d\Omega$ liegt, so kann man auf jede solche Gruppe die Debyeschen Betrachtungen anwenden und für sie eine Grenzfrequenz aufstellen, die aber von der Richtung des herausgegriffenen Kegels $d\Omega$ abhängig ist. Die Summation läßt sich bisher nur für nicht zu tiefe Temperaturen durchführen, nämlich nur in dem Bereich, wo die von Debye[2]) angegebene Reihe für die spezifische Wärme, welche nach geraden Potenzen der reziproken Temperaturen fortschreitet, konvergiert. In diesem Falle braucht man nämlich, wie man sogleich sieht, die Gleichungen für die Geschwindigkeiten der Wellen nicht explizit aufzulösen, ein Kunstgriff, von dem bereits Thirring[3]) Gebrauch gemacht hat. Während auf diese Weise der Anteil der Molekülschwingungen der spezifischen Wärme aus anderen Daten vollständig zu berechnen ist, besteht bei der Anwendung der Einsteinschen Funktion in der Wahl der Frequenz der Atomschwingungen eine gewisse Willkür, da die Rubensschen Beobachtungen nur einen Anhalt für die ungefähre Lage dieser Frequenz bieten. Wir werden sehen, daß in dem eben abgegrenzten der Theorie zugänglichen

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 39. S. 789. 1912.
2) P. Debye, a. a. O. S. 799. Formel 12.
3) H. Thirring, Phys. Zeitschr. 14. S. 867. 1913.

Gebiete die Born-Karmansche Theorie sich ausgezeichnet bewährt.

Für die Theorie der Zustandsgleichung isotroper einatomiger Körper liegen eine Reihe Versuche vor, welche sich zum Teil auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen [S. Ratnowski[1]), P. Debye[2])], zum Teil auf die Anwendung des Virialsatzes [G. Mie[3]), E. Grüneisen[4])] stützen. Die ursprünglichen Grüneisenschen Entwicklungen gehen von den Schwingungen eines Atoms unter dem Einfluß anziehender und abstoßender Kräfte aus, während Debye sich auf die Vorstellung von elastischen Wellen, welche den Körper durchziehen, stützt. Durch thermodynamische Betrachtungen hat Grüneisen seine Formeln in verschiedener Richtung erweitert.

Debye bildet zunächst die freie Energie des betreffenden Körpers. Deren Existenz und damit die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes wird also vorausgesetzt, statt daß sie sich als Konsequenz der molekulartheoretischen Vorstellung von selbst ergäbe. In Wirklichkeit liegt die Sache sogar so, daß die Grundvorstellungen der Debyeschen Theorie zusammen mit der Annahme *einer* Grenzfrequenz im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz stehen, wie bereits erwähnt wurde. Die folgenden Betrachtungen versuchen eine Darstellung der thermischen Dilatation zu geben allein auf Grund molekulartheoretischer Vorstellungen ohne Zuhilfenahme thermodynamischer Beziehungen. Nur eine Annahme muß außerdem hinzugezogen werden: das Plancksche Gesetz für die mittlere Energie eines periodischen Freiheitsgrades. Eine innere Vollkommenheit, wie sie die kinetische Theorie der idealen Gase besitzt, läßt sich also der Molekulartheorie des festen Körpers infolge des Hineinspielens der Quantentheorie zurzeit nicht geben.

Spezifische Wärme.

§ 1. Allgemeine Formeln.

Die folgenden Betrachtungen mögen sich auf ein Grammmolekül der betreffenden Substanz beziehen, das entsprechende

1) S. Ratnowski, Ann. d. Phys. **38**. S. 637. 1912.
2) P. Debye, Wolfskehlvortrag. Göttingen 1914. S. 27.
3) G. Mie, Ann. d. Phys. **11**. S. 657. 1903.
4) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **39**. S. 257. 1912.

Volumen sei V; es bedeute ferner N die Zahl der Moleküle in einem Grammolekül, h und k die beiden Konstanten in der Planckschen Strahlungsformel und ϑ die absolute Temperatur. Faßt man eine der drei Wellenarten (j) ins Auge, so sei ihre Geschwindigkeit ω_j. Die Maximalfrequenz $\bar{\nu}_j$ sei definiert durch:

$$\bar{\nu}_j = \omega_j \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}}.$$

Mit Debye sei die charakteristische Temperatur

$$\Theta_j = \frac{h}{k}\bar{\nu}_j \tag{1}$$

eingeführt, wobei aber jetzt Θ_j ebenso wie $\bar{\nu}_j$ von der Richtung der Welle abhängt. Der Energieinhalt aller Wellen einer Gattung mit der Fortpflanzungsrichtung im Kegel $d\Omega$ sei

$$\frac{1}{4\pi}\varepsilon_j\, d\Omega = \frac{1}{4\pi} 3Nk\vartheta\left(\frac{\vartheta}{\Theta_j}\right)^3 \int_0^{\Theta_j/\vartheta} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx \cdot d\Omega \tag{2}$$

und der partielle Differentialquotient nach ϑ bei konstantem Θ werde mit γ_j bezeichnet, also

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \vartheta} = \gamma_j. \tag{3}$$

Die Energie der Atomschwingungen (Einsteinsche Funktion) der $i$ten Art Atome mit der Frequenz ν_i sei:

$$\varepsilon_i = N \frac{h\nu_i}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} + 1}. \tag{4}$$

Ähnlich wie oben sei

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \vartheta} = \gamma_i \tag{5}$$

definiert. Der Energieinhalt U eines festen Körpers ist dann nach der Born-Karmanschen Theorie gegeben durch

$$U = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3} \int \varepsilon_j\, d\Omega + \sum_i \varepsilon_i. \tag{6}$$

Das Integral ist über die gesamte Einheitskugel zu erstrecken. Als spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v wollen wir zunächst mit Debye den partiellen Differentialquotienten $\partial U/\partial \vartheta$ bei konstantem Θ ansehen, also annehmen, daß die Elastizitätskonstanten nicht direkt von der Temperatur, sondern nur vom Volumen abhängen können. (Auf eine

Erweiterung der Theorie in dieser Hinsicht soll in einem späteren Paragraphen eingegangen werden.) Für die spezifische Wärme findet man dann:

$$c_v = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int \gamma_j \, d\Omega + \sum_i \gamma_i = c_1 + c_2 . \tag{7}$$

Eine Prüfung dieser Formel ist nur im Gebiete tiefster Temperaturen durchgeführt worden, wobei die auftretenden Integrale durch ein Interpolationsverfahren numerisch ausgewertet wurden.[1]) An dieser Stelle soll eine Beschränkung auf nicht zu tiefe Temperaturen stattfinden auf ein Gebiet, wo die von Debye[2]) angegebene Reihe ($\gamma_\infty = k\,N$)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_\infty} = 1 &- \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^2}{20} + \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^4}{560} - \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^6}{18144} \\ &+ \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^8}{633600} - \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^{10}}{23063040} + \cdots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

für jede Richtung der fortschreitenden Wellen konvergiert. Wenn wir die Dichte mit ϱ bezeichnen und abkürzen:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{h}{k\sqrt{\varrho}}\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}} = g \\ \text{und} \quad & \varrho\,\omega_j^2 = q_j \\ \text{so ist} \quad & \Theta_j = g\sqrt{q_j} . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Die Größe g ist ähnlich wie bei Debye zu berechnen; ist M das Molekulargewicht, so ist

$$g = \frac{h}{k}\,\frac{N}{4\pi}\,\frac{1}{\varrho^{1/6} M^{1/2}} = \frac{35{,}74 \cdot 10^{-4}}{(3\varrho^{1/6} M)^{1/2}} .$$

Die Werte für ω_j, bzw. für q_j sind aus der Elastizitätstheorie zu berechnen.

Das Koordinatensystem X, Y, Z sei den eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des Kristalls zugeordnet.[3]) Das Koordinatensystem X', Y', Z' sei so orientiert, daß die Fortpflanzungsrichtung der betrachteten Welle mit der Z'-Achse zusammenfällt; die zugehörigen Elastizitätskonstanten seien

1) Hopf u. G. Lechner, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. S. 643. 1915.
2) P. Debye, a. a. O. S. 799.
3) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 99.

c_{hk} bzw. c_{hk}'; die Verrückungskomponenten im gestrichenen Koordinatensystem u', v', w'. Die Bewegungsgleichungen beim Fehlen äußerer Kräfte lauten dann:

$$(10)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c_{55}' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + c_{54}' \dfrac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + c_{53}' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = c_{45}' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + c_{44}' \dfrac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + c_{43}' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = c_{35}' \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + c_{34}' \dfrac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + c_{33}' \dfrac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}. \end{cases}$$

Hierbei hängen die c_{hk}' mit den c_{hk} durch die folgenden Beziehungen zusammen, falls α, β, γ die Richtungskosinus der Z'-Achse gegen X, Y, Z ist.

$$(11)\quad \begin{cases} c_{55}' = c_{11}\alpha^2 + c_{66}\beta^2 + c_{55}\gamma^2 + 2c_{65}\beta\gamma + 2c_{51}\gamma\alpha + 2c_{16}\alpha\beta, \\ c_{44}' = c_{66}\alpha^2 + c_{22}\beta^2 + c_{44}\gamma^2 + 2c_{24}\beta\gamma + 2c_{46}\gamma\alpha + 2c_{26}\alpha\beta, \\ c_{33}' = c_{55}\alpha^2 + c_{44}\beta^2 + c_{33}\gamma^2 + 2c_{43}\beta\gamma + 2c_{35}\gamma\alpha + 2c_{34}\alpha\beta, \end{cases}$$

$$c_{54}' = c_{45}' = c_{16}\alpha^2 + c_{62}\beta^2 + c_{54}\gamma^2 + (c_{64}+c_{52})\beta\gamma + (c_{56}+c_{14})\gamma\alpha + (c_{12}+c_{66})\alpha\beta,$$

$$c_{53}' = c_{35}' = c_{15}\alpha^2 + c_{64}\beta^2 + c_{53}\gamma^2 + (c_{63}+c_{54})\beta\gamma + (c_{56}+c_{13})\gamma\alpha + (c_{14}+c_{65})\alpha\beta,$$

$$c_{43}' = c_{34}' = c_{65}\alpha^2 + c_{24}\beta^2 + c_{43}\gamma^2 + (c_{23}+c_{44})\beta\gamma + (c_{45}+c_{63})\gamma\alpha + (c_{64}+c_{25})\alpha\beta,$$

$$c_{hk} = c_{kh}.$$

Führt man in die Bewegungsgleichungen (10) periodische Lösungen ein, so erhält man als Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit ω bzw. für q eine Gleichung 3. Grades von der Form:

$$(12)\qquad q^3 + a q^2 + b q + c = 0,$$

deren Lösungen q_1, q_2, q_3 sein mögen. Hierin ist

$$(13)\quad \begin{cases} a = -(q_1+q_2+q_3) = -(c_{22}' + c_{44}' + c_{55}'), \\ b = +q_2q_3 + q_1q_3 + q_1q_2 = +(c_{44}'c_{55}' + c_{33}'c_{44}' + c_{33}'c_{55}' - [c_{45}'^2 + c_{35}'^2 + c_{34}'^2]), \\ c = -q_1q_2q_3 = -[c_{33}'c_{44}'c_{55}' + 2c_{34}'c_{35}'c_{45}' - (c_{33}'c_{45}'^2 + c_{44}'c_{35}'^2 + c_{55}'c_{34}'^2)]. \end{cases}$$

Für den vorliegenden Zweck sind nur die Summen $\sum_{j=1}^{3} q^n$ zu berechnen. Es findet sich

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} q_j = -a, \\ \sum_{j=1}^{3} q_j^2 = a^2 - 2b, \\ \sum_{j=1}^{3} q_j^3 = -(a^3 - 3ab + c), \end{cases}$$

Die höheren Potenzen lassen sich nach folgender Rekursionsformel berechnen

$$(14a)\qquad \sum_{j=1}^{3} q_j^n = -\left[a \sum_{j=1}^{3} q_j^{(n-1)} + b \sum_{j=1}^{3} q_j^{(n-2)} + c \sum_{j=1}^{3} q_j^{(n-3)}\right].$$

Diese Summen lassen sich leicht bilden und aus ihnen sind dann die Integrale

$$(15)\qquad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{3} q_j \, d\Omega, \\ J_2 = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{3} q_j^2 \, d\Omega, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_n = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{3} q_j^n \, d\Omega \end{cases}$$

zu berechnen.[1])

1) Bei der Integration über die Einheitskugel fallen alle Integrale, welche ungerade Potenzen von α, β, γ enthalten, fort. Ferner sind alle Integrale gleich, welche durch zyklische Vertauschung von α, β, γ auseinander hervorgehen. Die wichtigsten Integrale sind die folgenden:

$$\int \alpha^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{3}, \qquad \int \alpha^2 \beta^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{63},$$

$$\int \alpha^4 \, d\Omega = \frac{4\pi}{5}, \qquad \int \alpha^4 \beta^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{35},$$

$$\int \alpha^6 \, d\Omega = \frac{4\pi}{7}, \qquad \int (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)^2 \, d\Omega = \frac{4\pi \cdot 41}{105},$$

$$\int \alpha^8 \, d\Omega = \frac{4\pi}{9}, \qquad \int (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) \, d\Omega = \frac{4\pi \cdot 11}{105}.$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt nun nach Einführung der Integrale (14) für die spezifische Wärme bei konstantem Volumen des Grammoleküls eines beliebigen Kristalls:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{c_v}{kN} = 3 &- \frac{J_1 g^2}{20}\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{J_2 g^4}{560}\frac{1}{\vartheta^4} - \frac{J_3 g^6}{18\,144}\frac{1}{\vartheta^6} + \frac{J_4 g^8}{633\,600}\frac{1}{\vartheta^8}\\ &- \frac{J_5 g^{10}}{23\,063\,040}\frac{1}{\vartheta^{10}} + \cdots\end{aligned}\right.$$

oder mit leicht ersichtlicher Abkürzung:

$$(16\,a)\qquad \frac{c_v}{kN} = 3 - \frac{a_1}{\vartheta^2} + \frac{a_2}{\vartheta^4} - \frac{a_3}{\vartheta^6} + \frac{a_4}{\vartheta^8} - \cdots$$

§ 2. Reguläre Kristalle.

Das Schema für die Elastizitätskonstanten hat für reguläre Kristalle die folgende Form:

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{array}.$$

Es vereinfachen sich die Beziehungen zwischen den c_{hk} und c_{hk}', so daß gilt:

$$\begin{aligned} c_{55}' &= c_{11}\alpha^2 + c_{44}(\beta^2+\gamma^2), & c_{45}' &= c_{54}' = (c_{12}+c_{44})\,\alpha\beta,\\ c_{44}' &= c_{11}\beta^2 + c_{44}(\alpha^2+\gamma^2), & c_{53}' &= c_{35}' = (c_{12}+c_{44})\,\alpha\gamma,\\ c_{33}' &= c_{11}\gamma^2 + c_{44}(\alpha^2+\beta^2), & c_{43}' &= c_{34}' = (c_{12}+c_{44})\,\beta\gamma. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades für $q: a, b, c$ drücken sich durch die c_{hk} in folgender Weise aus:

$$a = -(c_{11}+2c_{44}),$$

$$b = +c_{44}(2c_{11}+c_{44}) + [c_{11}^2 - 2c_{11}c_{44} - c_{12}(c_{12}+2c_{44})]\,(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2),$$

$$\int \alpha^4\beta^4\,d\Omega = \frac{4\pi}{105}, \qquad \int \alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2)^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{21},$$

$$\int \alpha^4\beta^2\gamma^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{315}, \qquad \int \alpha^2\beta^2\gamma^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{105},$$

$$\int (\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2)\,d\Omega = \frac{4\pi}{5}.$$

Tabelle I.

	$c_{11} \cdot 10^{-9}$	$c_{44} \cdot 10^{-9}$	$c_{12} \cdot 10^{-9}$	J_1	J_2	J_3	J_4	ϱ	M	$g^2 \cdot 10^{+6}$
Flußspat	16,7	3,45	4,57	$2{,}36 \cdot 10^{3}$	$2{,}54 \cdot 10^{12}$	$3{,}49 \cdot 10^{27}$	$6{,}61 \cdot 10^{56}$	3,18	78,18	31,28
Steinsalz	4,77	1,29	1,32	$7{,}35 \cdot 10^{3}$	$2{,}40 \cdot 10^{17}$	$7{,}50 \cdot 10^{35}$	$2{,}60 \cdot 10^{54}$	2,18	58,51	27,59
Sylvin	3,75	0,655	0,198	$5{,}06 \cdot 10^{3}$	$1{,}244 \cdot 10^{17}$	$3{,}27 \cdot 10^{35}$	$9{,}91 \cdot 10^{53}$	1,98	74,59	22,33
Natriumchlorat	6,68	1,22	−2,14	$9{,}07 \cdot 10^{3}$	$3{,}324 \cdot 10^{17}$	$9{,}73 \cdot 10^{35}$	$2{,}51 \cdot 10^{54}$	2,49	106,5	20,16
Pyrit	36,8	10,8	−4,88	$5{,}84 \cdot 10^{3}$	$1{,}33 \cdot 10^{19}$	$2{,}29 \cdot 10^{38}$	$2{,}98 \cdot 10^{57}$	5,08	120,1	15,06

Tabelle II.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Flußspat	$3{,}62 \cdot 10^{4}$	$4{,}27 \cdot 10^{9}$	$5{,}56 \cdot 10^{13}$	$9{,}24 \cdot 10^{16}$	$1{,}84 \cdot 10^{21}$	$(3{,}56 \cdot 10^{25})$
Steinsalz	$1{,}30 \cdot 10^{4}$	$5{,}38 \cdot 10^{7}$	$1{,}65 \cdot 10^{11}$	$6{,}35 \cdot 10^{14}$	$1{,}01 \cdot 10^{18}$	$(5{,}40 \cdot 10^{21})$
Sylvin	$7{,}42 \cdot 10^{3}$	$1{,}92 \cdot 10^{7}$	$4{,}55 \cdot 10^{10}$	$1{,}16 \cdot 10^{14}$	$3{,}50 \cdot 10^{16}$	
Natriumchlorat . .	$8{,}97 \cdot 10^{3}$	$1{,}12 \cdot 10^{7}$	$4{,}15 \cdot 10^{10}$	$6{,}06 \cdot 10^{13}$		
Pyrit	$4{,}22 \cdot 10^{4}$	$4{,}96 \cdot 10^{8}$	$3{,}80 \cdot 10^{12}$	$2{,}18 \cdot 10^{17}$		

Die eingeklammerten Werte sind nur in roher Weise durch Einführung von Mittelwerten berechnet.

$$c = -\{\alpha^2\beta^2\gamma^2[(c_{11}-c_{44})^2 - 3(c_{12}+c_{44})^2(c_{11}-c_{44}) + 2(c_{12}+c_{44})^3] + [\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2]\,c_{44}[(c_{11}-c_{44})^2 - (c_{12}+c_{44})^2] + c_{11}c_{44}^2\}.$$

Die Werte der Elastizitätskonstanten nach den Messungen von W. Voigt[1]) und die daraus berechneten Werte der Integrale $J_1 \ldots J_4$ sind in der vorstehenden Tabelle angegeben. Die Druckeinheit ist g/cm². Um also die betreffenden Größen im absoluten Maß zu haben, sind die c_{kk} mit 981, die J_1, J_2 . . mit 981, 981² . . . zu multiplizieren. Die letzten 8 Spalten enthalten die Größen ϱ, M, g^2. (Vgl. Tabelle I.)

Würde sich der Anteil der akustischen Schwingungen an der spezifischen Wärme durch eine einzige Debyesche Funktion ausdrücken lassen, so müßte $J_n = J^n_1$ sein. Die vorstehende Tabelle zeigt, daß diese Bedingung auch nicht einmal in grober Annäherung erfüllt ist. Tab. II gibt die Werte a_1, a_2 . . der Formel (16a) an.

Zu der Energie der molekularen Schwingungen oder akustischen Wellen tritt noch ein zweites Glied, welches von den Atomschwingungen herrührt. Die Frequenz derselben ist so gewählt, daß sich die berechneten Werte c_v den Beobachtungen möglichst gut anpassen. Die entsprechenden Werte von c_v sind den Tabellen entnommen, welche W. Nernst[2]) in seinem Buche „Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes" mitteilt. Die folgenden Tabellen enthalten den Anteil der Atomschwingungen c_2, den Anteil der akustischen Wellen c_1 und die beobachteten und berechneten Werte von c_v. Die ersteren sind den Angaben von W. Nernst auf dem 1. Solvay-Kongreß entnommen. ($\beta = h/k$.)

Tabelle III.

Steinsalz: $\beta_v = 226$.

ϑ	β_v/ϑ	c_2	c_1	c_v ber.	c_v beob.
110°	2,06	4,21	4,42	8,63	8,65*
188°	1,64	4,78	4,87	9,65	9,58
235°	0,96	5,52	5,56	11,08	10,98

* Interpolierter Wert.

1) W. Voigt, Lehrbuch d. Kristallphysik. S. 744.
2) Verlag W. Knapp, Halle a. S. 1918.

Tabelle III (Fortsetzung).

Sylvin: $\beta_\nu = 190$.

ϑ	β_ν/ϑ	c_3	c_1	c_v ber.	c_v beob.
70°	2,72	3,33	4,19	7,52	7,54
87°	2,19	4,06	4,57	8,63	8,66
137°	1,39	5,08	5,30	10,38	10,36
285°	0,81	5,64	5,74	11,38	11,46

Bei Flußspat als einem dreiatomigen Kristall sind zwei verschiedene Eigenfrequenzen zu erwarten. Zwar läßt sich die spezifische Wärme mit einer einzigen Eigenwellenlänge $\lambda = 41{,}5\,\mu$ wiedergeben, aber diese Darstellung würde nicht der Raumgittertheorie entsprechen, nach der Flußspat eine optisch wirksame Eigenfrequenz und eine zweite optisch nicht nachweisbare Eigenfrequenz besitzt. Dementsprechend ist bei der folgenden Berechnung verfahren. Die beobachteten Werte sind der Arbeit von Eucken und Schwers[1]) entnommen.

Tabelle IV.

Flußspat: $\beta_\nu' = 286$, $\beta_\nu'' = 420$.

ϑ	β_ν'/ϑ	β_ν''/ϑ	c_3'	c_3''	c_1	c_v ber.	c_v beob.
180°	1,59	2,33	4,85	5,86	4,34	13,05	13,20*
236,5°	1,21	1,78	5,27	4,61	4,98	14,81	14,60
328°	0,87	1,28	5,59	5,20	5,39	16,18	16,10

* Interpolierter Wert.

Leider ist die Zahl der gemessenen Punkte innerhalb des Bereichs, wo unsere Formel konvergiert, gering. In der folgenden Tabelle sind die optisch wirksamen Wellenlängen λ_0 angegeben, welche den β_ν der Tab. III und IV entsprechen.

Tabelle V.

	β_ν	$\varkappa$	λ_0
Flußspat	286	$5{,}89 \cdot 10^{11}$	51,0 μ
Steinsalz	226	$4{,}65 \cdot 10^{11}$	64,5 μ
Sylvin	190	$3{,}9 \cdot 10^{11}$	77,0 μ

Die λ_0 sind stets größer als die von Rubens beobachteten Reststrahlenwellenlängen. In der Tat ergibt die Theorie der

1) A. Eucken u. Schwers, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. S. 578. 1913.

Reflexion, daß die Eigenschwingung gegenüber dem Maximum des Reflexionsvermögens um recht erhebliche Beträge nach größeren Wellenlängen verschoben ist. Auf diese optischen Fragen gehe ich in der folgenden Arbeit ein. Auf alle Fälle liefern die Rubensschen Reststrahlenbeobachtungen einen unentbehrlichen Fingerzeig bei der Berechnung von c_{13}. Bei komplizierter gebauten Körpern, für die keine Reststrahlmessungen vorliegen, würde diese Berechnung ganz willkürlich sein. Aus diesem Grunde ist von der Ausrechnung von c_{13} für Natriumchlorat und Pyrit, deren Reststrahlen noch nicht bekannt sind, abgesehen worden.

§ 3 Trigonales Kristallsystem.

In diesem Paragraphen sollen die Formeln für das trigonale Kristallsystem, soweit es eine zweizählige Symmetrieachse besitzt, aufgestellt werden. Das Schema der elastischen Konstanten ist folgendes:

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & c_{14} \\ & & & & & c_{66} \end{array} \qquad c_{66} = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

Von der Relation $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ ist zunächst kein Gebrauch gemacht worden, so daß unsere Formeln ohne weiteres auf das tetragonale System, soweit es eine zwei- und vierzählige Symmetrieachse besitzt, sowie auf das hexagonale System spezialisiert werden können. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_{55}' &= c_{11}\alpha^2 + c_{66}\beta^2 + c_{44}\gamma^2 + 2c_{14}\beta\gamma, \\ c_{44}' &= c_{66}\alpha^2 + c_{11}\beta^2 + c_{44}\gamma^2 - 2c_{14}\beta\gamma, \\ c_{33}' &= c_{44}\alpha^2 + c_{44}\beta^2 + c_{33}\gamma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{45}' &= 2c_{14}\gamma\alpha + (c_{12} + c_{66})\alpha\beta, \\ c_{35}' &= 2c_{14}\alpha\beta + (c_{44} + c_{13})\alpha\gamma, \\ c_{34}' &= c_{14}(\alpha^2 - \beta^2) + (c_{13} + c_{44})\beta\gamma. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Gleichung 3. Grades für q: a, b, c werden:

$$-a = (c_{11} + c_{44} + c_{66}) + [(c_{33} + c_{44}) - (c_{11} + c_{66})]\,\gamma^2$$

$$\begin{aligned} b = {} & (\alpha^4+\beta^4)(c_{11}c_{66} + c_{11}c_{44} + c_{44}c_{66} - c_{14}^2) + \gamma^4(c_{44}^2 + 2c_{33}c_{44}) \\ & + [2c_{44}(c_{11}+c_{66}) + c_{11}^2 + c_{66}^2 - (c_{12}+c_{66})^2 - 2c_{14}^2]\,\alpha^2\beta^2 \\ & + [(c_{11}+c_{66})(c_{44}+c_{33}) + 2c_{44}^2 - (c_{13}+c_{44})^2 - 4c_{14}^2] \\ & [\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2] - 4c_{14}[\alpha^2\beta\gamma(c_{11} + c_{44} + c_{66} + c_{12}) \\ & + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\beta\gamma(c_{44} + c_{11} + c_{12} - c_{66})]. \end{aligned}$$

Der recht komplizierte Ausdruck für c soll nicht ausführlich angegeben werden. Berücksichtigt man das in der Anmerkung (S. 555) Gesagte, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -\int c\,d\Omega = {} & \int \alpha^6\,d\Omega\,\{c_{44}(c_{33}c_{44} + 2c_{11}c_{66}) - c_{14}^2(c_{11} + c_{66})\} \\ & + \int \alpha^4\beta^2\,d\Omega\,\{2c_{44}(c_{44}^2 + c_{66}^2 + (c_{11}+c_{66})(c_{11}+c_{33} \\ & + c_{44}) - [(c_{12}+c_{66})^2 + (c_{12}+c_{44})^2]) \\ & + 2c_{66}[c_{11}c_{33} - (c_{44}+c_{13})^2] - c_{14}^2[3(c_{11}+c_{66}) \\ & + 6c_{44} - 4c_{13} + 8c_{33}]\} \\ & + \int \alpha^2\beta^2\gamma^2\,d\Omega\,\{2c_{44}^2(c_{66} + c_{11}) + c_{33}(c_{11}^2 + c_{66}^2) \\ & - 2c_{11}(c_{12}+c_{44})^2 - c_{33}(c_{12}+c_{66})^2 \\ & - 2c_{14}^2(3c_{44} - 2c_{13})\}. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Formeln auf die spezifische Wärme des Quarzes anwenden. Die Werte von $J_1 \ldots J_3$ lassen sich ohne Schwierigkeit aus den a, b, c streng berechnen. Bei J_4 wurden einige Annäherungen, welche sich aus den Parameterwerten der c_{kl} darboten, eingeführt, indem für a ein konstanter Mittelwert — statt $18{,}5 + 3{,}9\,\gamma^2$ ist $19{,}8$ gesetzt — eingeführt wurde und außerdem zur Bildung von b^2 die Größe b auf die Form annäherungsweise gebracht werden konnte:

$$b = A(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) + B(\alpha^2\gamma^2+\gamma^2\beta^2+\beta^2\alpha^2) - (C\alpha^2 - D\beta^2)\,\beta\gamma,$$

worin A, B, C, D geeignete Mittelwerte bedeuten. J_5 wurde nur in roher Annäherung durch Mittelwertsbildung berechnet.

Tabelle VI.

c_{11}	c_{33}	c_{44}	c_{13}	c_{12}	c_{14}	c_{66}
$8{,}68 \cdot 10^{5}$	$10{,}75 \cdot 10^{5}$	$5{,}82 \cdot 10^{5}$	$0{,}71 \cdot 10^{5}$	$1{,}44 \cdot 10^{5}$	$1{,}72 \cdot 10^{5}$	$3{,}99 \cdot 10^{5}$

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
$1{,}98 \cdot 10^{5}$	$1{,}61 \cdot 10^{15}$	$1{,}52 \cdot 10^{27}$	$1{,}52 \cdot 10^{39}$	$1{,}50 \cdot 10^{45}$

Die Einheiten in dieser Tabelle sind dieselben wie in Tab. I; die $c_{\lambda\lambda}$ sind ebenfalls den Beobachtungen von W. Voigt entnommen. Bei einer Dichte $\varrho = 2{,}65$ und einem Molekulargewicht $M = 60{,}3$ findet sich für Quarz: $g^2 = 6{,}0 \cdot 10^{-7}$.

Die folgende Tabelle gibt die Koeffizienten der Reihe (16a) für c_ν wieder.

Tabelle VII.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$5{,}83 \cdot 10^4$	$9{,}96 \cdot 10^9$	$1{,}72 \cdot 10^{15}$	$2{,}88 \cdot 10^{17}$	$4{,}61 \cdot 10^{21}$

Entsprechend den zwei bekannten Reststrahlgebieten läßt sich die spezifische Wärme mit Hilfe zweier Atomschwingungen darstellen. Die folgende Tabelle gibt die Anteile derselben c_2' und c_2'', ferner den Anteil der akustischen Schwingung c_1 und schließlich die berechneten und die beobachteten Werte für c_ν wieder.

Tabelle VIII.

Quarz: $\beta_\nu' = 556$; $\beta_\nu'' = 1350$.

ϑ	β_ν'/ϑ	β_ν''/ϑ	c_2'	c_2''	c_1	c_ν ber.	c_ν beob.
283°	2,38	5,80	3,79	0,61	4,36	8,76	8,78
330°	1,69	4,08	4,72	1,74	5,08	11,54	11,29
416°	1,34	3,26	5,14	2,68	5,38	13,15	12,97
556°	1,0	2,43	5,48	3,72	5,64	14,84	14,78

Die optischen Wellenlängen, welche den angegebenen β_ν entsprechen, sind 26 μ und 10,7 μ.

Es sei bemerkt, daß infolge der Doppelbrechung statt mit den zwei Atomschwingungen streng genommen mit vier zu rechnen wäre.

Die erreichte Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten für c ist sehr gut. Allerdings ist zu beachten, daß die Frequenzen der Atomschwingungen, wenn auch durch die Rubensschen Reststrahlenmessungen ungefähr bestimmt, doch in gewissen Grenzen den Beobachtungen angepaßt werden konnten. Ferner ist der Bereich, in welchem die Reihe (16a) konvergiert, relativ klein, da für die Konvergenz nicht die Größe der mittleren Geschwindigkeit, sondern die ungünstigste, d. h. in unserem Fall die größte in irgend-

einer Richtung vorkommende Geschwindigkeit maßgebend ist. Andererseits muß hervorgehoben werden, daß bei den berechneten regulären Kristallen mit den angenommenen Parameterwerten der c_{kk} die Beobachtungen von Eucken und Schwers im Gebiet tiefster Temperaturen (ϑ^3-Gebiet) ohne neue Hilfsannahmen mit guter Genauigkeit dargestellt werden.

Es sei noch hinzugefügt, daß sich ohne vollständige Auflösung der Gleichung (12) und Diskussion der Lösungen ebensowenig wie das Konvergenzgebiet der Reihe (16a) der Gültigkeitsbereich des Debyeschen ϑ^3-Gesetzes abgrenzen läßt; denn hierfür ist die kleinste in irgendeiner Richtung vorkommende Geschwindigkeit maßgebend.

§ 4. Über eine Erweiterung der bisherigen Annahmen.

Bisher war angenommen, daß die elastischen Konstanten bei konstant gehaltenem Volumen nicht von der Temperatur abhängen, eine Annahme, die aus verschiedenen Gründen — z. B. wenn man der Theorie der Wärmeleitung die Debyesche Auffassung zugrunde legen will — nicht streng erfüllt zu sein scheint. Es soll daher diese Annahme in diesem Paragraphen fallen gelassen werden und die Formel für die spezifische Wärme eines einatomigen isotropen Körpers dementsprechend entwickelt werden.

Der Energieinhalt eines einatomigen Körpers U ist gegeben durch:

$$U = \vartheta \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \left(\frac{\vartheta}{\Theta_j}\right),$$

wobei φ_j nur eine Funktion des Argumentes ϑ/Θ ist. Bezeichnet man den ursprünglichen Debyeschen Wert für die spezifische Wärme

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\varphi_j + \frac{\vartheta}{\Theta_j}\varphi_j'\right) = c_0, \qquad \varphi_j' = \frac{d\varphi_j}{d\frac{\vartheta}{\Theta_j}}$$

und bedenkt, daß nach (9)

$$\frac{\partial \log \Theta_j}{\partial v} = \frac{\partial \log q_j}{\partial v}$$

ist, so wird jetzt

$$c_v = c_0 - \sum_{j=1}^{3} \frac{\vartheta}{2}\left(c_j - \frac{U_j}{\vartheta}\right)\frac{\partial \log q_j}{\partial v},$$

wenn U_j die Gesamtenergie der $j$ten Wellenart ist. Für sehr tiefe Temperaturen verschwindet das Zusatzglied, da es wie ϑ^4 klein wird; für sehr hohe Temperaturen, bei denen man in der Reihe (8) nur das zu $1/\vartheta^2$ proportionale Glied beizubehalten braucht, geht c_v über in:

$$c_v = c_0 - 3\frac{Nk}{16}\sum_{j=1}^{3}\Theta_j\frac{\partial \log q_j}{\partial \vartheta}. \tag{17}$$

Da die elastische Kraft mit der Größe der Ausschläge der Schwingungen abnimmt, so ist auch

$$\frac{\partial \log q_j}{\partial \vartheta}$$

negativ; c_v übersteigt also den Wert: $c_\infty = 3Nk$. Die beobachteten Überschreitungen des Dulong-Petitschen Wertes finden also auf diese Weise ihre Erklärung. Am Schluß dieser Arbeit kommen wir auf diese Frage noch einmal zurück.

Zustandsgleichung von Kristallen.

§ 1.

Um zu der Zustandsgleichung des festen Körpers zu gelangen, ist es nötig, auf die Grundvorstellungen der Born-Karmanschen Theorie der Kristallgitter, welche ja auch der im ersten Abschnitt behandelten Theorie der spezifischen Wärme zugrunde liegt, etwas näher einzugehen. Nach dieser Auffassung besteht ein Kristall im allgemeinen aus s ineinander gefügten Kristallgittern, so daß einem Elementarbereich s-Atome zukommen. Wir sprechen dann von einem s-atomigen Kristall. Unsere Betrachtungen mögen sich auf ein Grammolekül der Substanz beziehen; die Zahl der Moleküle sei N. Die Wärmebewegung besteht nach der Born-Karmanschen Vorstellung in einer großen Anzahl von Wellenzügen, welche den Kristall durchsetzen. Zunächst handelt es sich darum, die gesamte Bewegung in eine Reihe von voneinander unabhängigen Wellen aufzulösen, d. h. in solche Schwingungen, deren Energie nur von den Koordinaten (x_k) und den Geschwindigkeiten (x_k') je eines einzigen Freiheitsgrades abhängt. Im allgemeinen werden diese Wellen nicht linear polarisiert sein und daher sind die x und x' als komplexe Größen aufzufassen. Ist ν_k die Frequenz der $k$ten Schwingung, T_k und φ_k die kinetische und potentielle Energie derselben, so ist[1]):

1) M. Born, Dynamik der Kristallgitter, S. 60. Dort ist das x_k und ν_k mit P_j und ω_j bezeichnet.

(18) $$T_k = |x_k'|^2 \qquad \Phi_k = \nu_k^2 |x_k|^2.$$

Die Schwingungen zerfallen nun in 2 Gattungen:

1. Die akustischen Wellen oder Schwingungen der Moleküle; für diese hängt die Frequenz ν_k von der Wellenlänge λ_k ab und es ist in erster Annäherung

(19) $$\nu_k = 2\pi \frac{\omega_k}{\lambda_k},$$

wobei ω_k wieder die Geschwindigkeit der $k$ten Welle bedeutet.

2. Die Schwingungen der Atome; bei ihnen ist für die hier in Betracht kommenden Wellenlängen die Frequenz unabhängig von der Wellenlänge.

Denkt man sich nun die äußere Gestalt des Kristalls, welche durch die Lagrangeschen Koordinaten p_h gegeben sein mag, verändert und zwar so langsam, daß der zeitliche Differentialquotient der p_h klein ist gegen die Periode der oben besprochenen Schwingungen, so wird einer Veränderung der Koordinate p_h eine Lagrangesche Kraft P_h entsprechen:

$$P_h = -\frac{\partial (T - \Phi)}{\partial p_h} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_h'}.$$

P_h bedeutet hier die äußere Kraft und die Differentiation ist so zu verstehen, daß die Koordinaten und Geschwindigkeiten der schwingenden Teilchen (x_k, x_k') unverändert bleiben. Multipliziert man die Lagrangesche Gleichung mit dt und integriert über ein sehr großes Zeitintervall, so verschwindet

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \frac{\partial T}{\partial p_h'}.$$

Sind $\overline{T}$, $\overline{\Phi}$, $\overline{P}$ die Mittelwerte der betreffenden Größen, so gilt dann:

(20) $$P_h = -\frac{\partial (\overline{T} - \overline{\Phi})}{\partial p_h}.$$

Führen wir in diese Gleichung die Werte (18) ein, so wird

(21) $$P_h = +|x_k|^2 \cdot \frac{\partial \nu_k^2}{\partial p_h} = 2\overline{\Phi}_k \frac{\partial \log \nu_k}{\partial p_h}.$$

Um die resultierende Kraft zu erhalten, hat man alle die P_h zu summieren, welche herrühren:

1. von den akustischen Wellen,
2. von den Atomschwingungen;

als drittes kommen noch die Kräfte hinzu, welche von den statischen Spannungen herrühren.

1. Es existieren 3 akustische Wellen. Wir greifen eine (j) davon heraus. Die Zahl der Eigenschwingungen (dZ) einer solchen Welle, deren Frequenz zwischen (ν) und ($\nu + d\nu$) liegen und deren Fortpflanzungsrichtung in den Kegel $d\Omega$ fällt, läßt sich durch die Maximalfrequenz folgendermaßen ausdrücken:

$$dZ_j = \frac{A}{\bar{\nu}_j^3}\nu^2 d\nu d\Omega, \qquad A = \frac{4\pi}{3N}.$$

Die gesamte äußere Kraft, welche diesem Wellentyp entspricht, ist also

$$(22) \qquad K_{hj} = \sum (P_h)_j = 2\int_0^{\bar{\nu}_j}\int \frac{A}{\bar{\nu}_j^3}\left(\nu_k^2 \Phi_k \frac{\partial \log \nu_k}{\partial p_h} d\nu\right)_j d\Omega.$$

Der Index (j) gibt an, daß nur über solche (k) zu summieren ist, welche zur $j$ten akustischen Welle gehören.

Nun ist

$$(23) \qquad -\frac{\partial \log \nu}{\partial p_h} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial p_h} - \frac{\partial \log \omega}{\partial p_h}.$$

Da ω für ein und denselben Wellentyp den gleichen Wert hat und λ für alle Oberschwingungen sich nur durch einen von p_h unabhängigen Faktor unterscheidet, also $d \log \lambda$ für alle denselben Wert hat, so gilt dasselbe von $\frac{\partial \log \nu}{\partial p_h}$. Man kann also diese Größe vor das über ν erstreckte Integral nehmen und durch $\frac{\partial \log \bar{\nu}_\gamma}{\partial p_h}$ ersetzen. Bedenkt man ferner, daß die potentielle Energie im Mittel gleich der halben Gesamtenergie ist und setzt man die gesamte Energie aller Wellen des $j$ten Wellentypus, deren Fortpflanzungsrichtung in den Kegel $d\Omega$ fällt:

$$(24) \qquad \frac{1}{4\pi}\varepsilon_j d\Omega = 2\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{A}{\bar{\nu}_j^3}\int_0^{\bar{\nu}_j}(\nu_k^2 \Phi_k d\nu)_j,$$

so wird

$$(25) \qquad K_{hj} = \frac{1}{4\pi}\int \varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} d\Omega.$$

2. Falls s Atomarten im Elementarbereich des Kristalls vorkommen, bestehen im allgemeinsten Falle entsprechend den 3 Freiheitsgraden jedes Atoms ($3s$) Atomfrequenzen, die in

Annäherung als unabhängig von der Geschwindigkeit und Wellenlänge vorausgesetzt werden. Sei ε_i die Energie, welche einer Atomschwingung zukommt; dann wird einfach

$$K_{ik} = \varepsilon_i \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_k} . \tag{26}$$

3. Statische Spannungen. Die Deformationsgrößen x_x, y_y, z_z, z_y, z_x, x_y mögen in diesem Kapitel der Reihe nach mit den Lagrangeschen Koordinaten $p_1 \ldots p_6$ bezeichnet werden. Natürlich könnte man auch ebensogut gewisse Kombinationen der Deformationsgrößen mit den p_k identifizieren und wir werden das gelegentlich auch tun. Sind wieder die c_{kk} die Elastizitätskonstanten des betreffenden Körpers, so ist die potentielle Energie gegeben durch:

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_k c_{kk} p_k p_k . \tag{27}$$

Die äußeren Kräfte $X_1 \ldots X_6$, welche den inneren Spannungen $X_1' \ldots X_6'$ das Gleichgewicht halten, sind dann gegeben durch:

$$X_k = - X_k' = + \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} .$$

Die gesamte Kraft, welche an die Koordinate p_k angreift, ist durch Summation über die Bestandteile 1, 2 und 3 zu bilden. Die resultierenden Kräfte seien $\Xi_1 \ldots \Xi_6$. Die Zustandsgleichung erhält dann die Form:

$$\Xi_k = + \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_k} + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_k} d\Omega + \sum_{i=4}^{3s} \varepsilon_i \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_k} . \tag{28}$$

Würde also an einem Körper eine Deformation ausgeführt werden, so widerstreben ihr 1. die rein elastische Kraft X, welche durch die wahren Elastizitätskonstanten bestimmt ist, 2. die Druckkräfte der Wärmebewegung, welche in den beiden letzten Gliedern der Gleichung (27) enthalten sind. In besonders einfachen Fällen kann man den Vorgang so auffassen, daß die Gesamtkraft Ξ durch Konstanten c_{kk} bestimmt wird, welche eben infolge der Wärmebewegung etwas von den c_{kk} abweichen. Erhöht man die Temperatur unter Vermeidung der thermischen Dilatation, so bleiben die c_{kk}' konstant, während die c_{kk}' variieren. Die so definierte Temperaturabhängigkeit der c_{kk}' läßt sich nun mit Hilfe der Formel (27)

diskutieren und dieses ist von Debye[1]) für isotrope Körper geschehen. Indessen ist die wirklich beobachtete Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten eine andere, da die Wirkung der thermischen Dilatation noch zu berücksichtigen ist. Denn zufolge der Volumen- und eventuell auch Gestaltsänderung ändern sich auch die $c_{\lambda\varkappa}$, worauf Debye gerade seine Theorie der thermischen Dilation gegründet hat.

§ 2. Folgerungen aus der Zustandsgleichung.

Die Formel (27) konnte ohne Hinzuziehung der Quantentheorie allein aus den Gleichungen der Mechanik hergeleitet werden. Für das Folgende brauchen wir speziellere Annahmen über ε_j und ε_i. Wir wollen in Übereinstimmung mit dem Planckschen Ansatz annehmen, daß die mittlere Energie eines Freiheitsgrades die Form hat

$$u = \nu\,\varphi\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right). \tag{29}$$

Nach den Entwicklungen von Einstein und Debye hat dann ε_j und ε_i dieselbe Form wie u.

Aus dieser Beziehung ergibt sich die Identität:

$$\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial \log \nu} = \varepsilon - \vartheta\,\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,\vartheta}. \tag{30}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß ν nicht expliziert von ϑ abhängt. Der gesamte Energieinhalt U ist

$$U = \Phi + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int \varepsilon_j\,d\Omega + \sum_{i=4}^{3\sigma}\varepsilon_i. \tag{31}$$

Fehlen äußere Kräfte ($\Xi_\lambda = 0$), so wird (28)

$$0 = \frac{\partial\,\Phi}{\partial p_\lambda} + \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{4\pi}\int \varepsilon_j\,\frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial\,p_\lambda}\,d\Omega + \sum_{i=4}^{3\sigma}\varepsilon_i\,\frac{\partial \log \nu_i}{\partial\,p_\lambda}. \tag{28a}$$

Aus (30) folgt die spezifische Wärme bei konstantem Druck c_p

$$c_p = \sum_\lambda \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,p_\lambda}\,\frac{d\,p_\lambda}{d\,\vartheta} + \frac{1}{4\pi}\sum_j\int\left(\frac{\partial\,\varepsilon_j}{\partial\,\vartheta} + \frac{\partial\,\varepsilon_j}{\partial \log \bar{\nu}_j}\sum_\lambda \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial\,p_\lambda}\,\frac{d\,p_\lambda}{d\,\vartheta}\right)d\Omega + \sum_i\left(\frac{\partial\,\varepsilon_i}{\partial\,\vartheta} + \frac{\partial\,\varepsilon_i}{\partial \log \nu_i}\sum_\lambda \frac{\partial \log \nu_i}{\partial\,p_\lambda}\cdot\frac{d\,p_\lambda}{d\,\vartheta}\right).$$

Hieraus erhält man c_v, indem man

1) P. Debye, Wolfskehlvortrag. S. 38 u. 42.

$$\frac{d p_h}{d \vartheta} = 0$$

setzt. Berücksichtigt man noch die Gleichung (30), so erhält man:

$$c_p - c_v = -\vartheta \sum_h \frac{d p_h}{d \vartheta} \left[\sum_j \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \vartheta} \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} d\Omega + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \vartheta} \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_h} \right].$$

Unter Heranziehung von (28a) ergibt sich daraus:

$$c_p - c_v = -\vartheta \sum \frac{\partial p_h}{\partial \vartheta} \frac{\partial X_h^i}{\partial \vartheta}. \tag{32}$$

Die bekannte Relation, die sich mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik allgemein beweisen läßt. Für isotrope Körper geht diese Relation, falls man als Lagrangesche Koordinate

$$p_h = \frac{v - v_0}{v_0} \quad \text{und entsprechend} \quad X_h = -\frac{v_0}{\varkappa} \left(\frac{v - v_0}{v_0} \right)$$

($\varkappa$ = Kompressibilität) setzt, über in:

$$c_p - c_v = 9 \frac{v_0 \vartheta}{\varkappa} \alpha^2, \tag{33}$$

wenn α die thermische lineare Dilatation bedeutet.

Auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 X_h^i}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial c_v}{\partial p_h}$$

gewinnt man ohne weiteres aus (27a) durch zweimaliges Differentieren nach der Temperatur, falls man die aus (28) folgende Beziehung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \vartheta^2} = -\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \log \vartheta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \tag{34}$$

berücksichtigt. —

Die Zustandsgleichung (28) läßt sich in folgender Weise umformen; es sei h eine ganze Zahl, so daß $\nu_j = h \bar{\nu}_j$ ist. Wie schon benutzt worden ist, ist $d \log \nu$ unabhängig von h. Statt auf Formel (25) läßt sich also auf Formel (22) zurückgreifen. Da nun ferner der Quotient

$$\frac{\nu^2 d \nu}{\bar{\nu}^3} \qquad (d \nu = \bar{\nu}\, d h)$$

von p_h unabhängig ist, so ist:

$$\varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} = \frac{\partial}{\partial p_h} \left[\int_0^{\bar{\nu}} \frac{\nu^2 d \nu}{\bar{\nu}^3} \int \frac{u}{\nu} d \nu \right]_j = \frac{\partial}{\partial p_h} \psi_j.$$

Hierin ist ψ_j eine neue Abkürzung; entsprechend sei ψ_i definiert durch

$$\psi_i = \int \frac{a_i}{\nu_i} d\nu_i .$$

Somit nimmt die Zustandsgleichung die Form an:

$$\Xi_h = \frac{\partial}{\partial p_h} \left\{ \Phi + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int \psi_j d\Omega + \sum_i \psi_i \right\} = \frac{\partial H}{\partial p_h} .$$

Hierbei ist der Klammerausdruck die freie Energie H. In der Tat läßt sich zeigen, daß der partielle Differentialquotient von H nach der Temperatur die negative Entropie des Körpers ist. Es ist dabei nur zu berücksichtigen, daß die Entropie eines Freiheitsgrades (s) bei der Annahme (29) über u die Form hat:

$$s = \int \frac{\nu}{\vartheta} \varphi' \left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) d\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) .$$

Die zugrunde gelegten Vorstellungen über die molekulare Struktur der Kristalle führen also unter Berücksichtigung des der Planckschen Formel entsprechenden Ausdrucks für die mittlere Energie eines Freiheitsgrades zu einer vollständigen Übereinstimmung mit der allgemeinen Thermodynamik. Wesentlich für den Gang der Rechnung ist indessen, daß die Maximalfrequenz $\bar{\nu}_j$ genau in derselben Weise von den p_h abhängt, wie jedes ν_j des betreffenden Wellentypus, wie es naturgemäß ist, da die Grenzfrequenz eine der unendlich vielen Frequenzen der betreffenden Wellenart im Kontinuum ist.

Offenbar genügt die von Debye ursprünglich eingeführte, für alle 3 Wellen gemeinsame Grenzfrequenz dieser Bedingung nicht. Der Born-Karmanschen Auffassung entsprechen 3 Grenzfrequenzen, welche definiert sind durch:

$$\nu_j = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \frac{\omega_j}{\delta} .$$

Hierin ist δ der Elementarabstand im Kristallgitter, der bei nicht deformierten Kristallen ein Skalar ist. Die gleichförmigen Volumendeformationen, welche für uns in Frage kommen, kann man sich in einer entsprechenden Änderung von δ bestehend denken. Daher hängt δ genau in derselben Weise von der Deformation ab wie die Wellenlänge λ. Der Born-Karmansche Ansatz ist also auch in dieser Beziehung im Einklang mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und er-

scheint somit als eine Verbesserung der ursprünglichen Debyeschen Fassung.' —

Eine allgemeine Diskussion der Formel (28) bei Kristallen ist sehr schwierig und zurzeit nicht einmal möglich, da weder die Änderung der elastischen Konstanten mit dem Volumen oder der Temperatur noch die der Eigenfrequenz der Atomschwingungen ν_i bekannt ist. Wesentlich einfacher werden die Vorgänge bei sehr tiefen Temperaturen, wo ε_j proportional ϑ^4 und ε_i verschwindend klein wird. Dann läßt sich (27) schreiben

$$\Xi_h = \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} + \vartheta^4 C_h .$$

Hierin ist C_h von der Temperatur unabhängig und enthält nur die elastischen Konstanten und deren Ableitungen nach p_h.

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich leicht zeigen, daß der Temperaturverlauf der thermischen Änderung aller Deformationsgrößen x_x, x_y ... bei hinreichend tiefen Temperaturen der spezifischen Wärme proportional geht. Fehlen nämlich äußere Kräfte ($\Xi_h = 0$), so gilt

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p_h} = \sum_k c_{hk} p_k = \vartheta^4 C_h .$$

Im ganzen erhält man sechs solcher linearen Gleichungen in den p_h. Bei Auflösung nach p_h ergibt sich für die einzelnen p_h die Form:

$$p_h = \vartheta^4 C_h' ,$$

worin C_h' wieder unabhängig von der Temperatur ist. Für $\frac{d p_h}{d \vartheta}$ erhält man

$$\frac{d p_h}{d \vartheta} = 3 \vartheta^3 C_h' + \vartheta^4 \frac{d C_h'}{d \vartheta} .$$

Da man hinreichend tiefen Temperaturen ϑ^4 neben ϑ^3 vernachlässigen kann, so wird in der Tat: $\frac{d p_h}{d \vartheta}$ proportional mit ϑ^3, also mit der spezifischen Wärme c_v. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für alle linearen Kombinationen aus den Deformationsgrößen.

§ 3. Isotrope einatomige Körper.

Für isotrope einatomige Körper verschwindet ε_i, ferner werden alle Größen von der Richtung unabhängig, so daß (28) auf die einfache Form kommt:

$$\Xi_h = \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j \frac{\partial \log \nu_j}{\partial p_h} .$$

Bedeutet k den Torsionsmodul, $\varkappa$ die Kompressibilität, ϱ die Dichte, so sind die Geschwindigkeiten der drei akustischen Wellen gegeben durch:

$$\varrho \omega_1^2 = \varrho \omega_2^2 = q_1 = k$$
$$\varrho \omega_3^2 = q_3 = \frac{1}{2\varkappa} + \frac{2}{3} k$$

und die potentielle Energie der Volumeneinheit in der Helmholtzschen[1]) Normalform:

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{2\varkappa} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{3} k [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] \right\} .$$

Für $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ führen wir den Wert $\frac{V - V_0}{V_0}$ ein und verstehen unter V_0 das Volumen beim absoluten Nullpunkt. Als Gleichgewichtsbedingung für einen isotropen einatomigen Körper bei einem allseitig gleichgroßen Druck Π ergibt sich $(p_h = v)$:

$$\Pi = \frac{1}{\varkappa} \frac{V - V_0}{V_0} + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j / v \frac{\partial \log \nu_j}{\partial \lg V} . \tag{35}$$

Man kann diese letzte Formel ohne Benutzung molekulartheoretischer Annahmen ableiten, etwa den Grundlagen entsprechend, wie sie P. Debye seiner Theorie der spezifischen Wärmen zugrunde gelegt hat. Im folgenden soll diese Rechnung durchgeführt werden, welche ich in meiner eingangs zitierten Arbeit kurz angedeutet hatte. Einige Ungenauigkeiten in dieser früheren Darstellung werden damit zugleich berichtigt.

Die potentielle Energie pro Volumeneinheit einer einzelnen transversalen Welle $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$ sei:

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} k \int [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] \, dV, \text{ wo } k = q_1 ,$$

während sich für jede longitudinale Welle ergibt:

$$\varphi_3 = \left[\frac{1}{2\varkappa} + \frac{2}{3} k \right] \int \sigma_1^2 \, dV = q_3 \int \sigma_1^2 \, dV ,$$

wenn σ_1 senkrecht zur Ebene konstanter Phase liegt, so daß

1) H. v. Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, S. 120.

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Die gesamte potentielle Energie der transversalen Wellen im Volumen V ist dann:

$$\Phi_1 = 2 V \Sigma \varphi_1,$$

die der longitudinalen Wellen:

$$\Phi_3 = V \Sigma \varphi_3.$$

Der gesamte Druck K aller akustischen Wellen, welcher das Volumen V zu verändern strebt, ist dann nach Formel (19) zu berechnen. Da die kinetische Energie gleich dem Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V multipliziert mit dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit ist, die Gesamtmasse ϱV sowohl wie die mittlere Geschwindigkeit bei der Differentiation nach p_h ungeändert bleibt, so verschwindet $\frac{\partial T}{\partial V}$ und es bleibt übrig:

$$K = + \frac{\partial (\Phi_1 + \Phi_3)}{\partial V}.$$

Die Differentiation nach V ist hierbei so zu verstehen, daß überall die Verrückungen aus der Gleichgewichtslage unverändert bleiben. Fassen wir also zwei Punkte, deren Entfernung r sei, und in denen die Verrückungen ξ_1 und ξ_2 seien, ins Auge, so sind bei der Differentiation die Verrückungen ξ_1 und ξ_2 unverändert zu lassen, dagegen der Abstand r entsprechend der gleichförmigen Volumendilatation wie $V^{1/3}$ zu verändern. Nun ist die potentielle Energie φ homogen vom 2. Grade in den Deformationsgrößen $x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, ist also wie $V^{-1/3}$ zu variieren. Bei der Differentiation partiell nach V bleiben also konstant die Größen

$$R_1 = \frac{1}{q_1} \frac{\Phi_1}{V^{1/3}}; \qquad R_3 = \frac{1}{q_3} \frac{\Phi_3}{V^{1/3}}.$$

Daher wird:

$$K = \Phi_1 \frac{\partial \log q_1 V^{1/3}}{\partial V} + \Phi_3 \frac{\partial \log q_3 V^{1/3}}{\partial V}$$

$$= 2 \cdot \frac{s_1}{V_0} \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log q_1}{\partial \log V} \right] + \frac{s_3}{V_0} \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log q_3}{\partial \log V} \right].$$

Addiert man hierzu noch den Anteil der statisch elastischen Kräfte

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{V - V_0}{V_0},$$

so erhält man den gesamten inneren Druck, welcher dem

äußeren H das Gleichgewicht hält. Das Resultat ist dasselbe wie das in Formel (35) zum Ausdruck gebrachte, denn es besteht die Beziehung

$$\frac{\partial \log \nu_j}{\partial \log V} = \frac{\partial \log \omega_j}{\partial \log V} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log q_j}{\partial \log V} = -w_j,$$

wobei w eine neue Abkürzung ist.

Bei fehlendem äußeren Druck lautet dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \varkappa \cdot \sum_{j=1}^{3} \frac{\varepsilon_j}{V} w_j$$

(an Stelle von w_j schreibt Grüneisen γ).

Durch totales Differentiieren dieser Gleichung nach ϑ findet man die thermische Volumendilatation.

Bezeichnet man die Energie der Volumeneinheit

$$\frac{\varepsilon_j}{V} = E_j,$$

und nimmt an, daß $\varkappa$ und γ sich relativ wenig mit der Temperatur ändern, so folgt:

$$\frac{dV}{d\vartheta} = \varkappa \sum_{j=1}^{3} w_j \frac{dE_j}{d\vartheta}.$$

Wie schon Grüneisen bemerkt, liefert also die Born-Karmansche Theorie zwar ein Parallelgehen der thermischen Dilatation mit der spezifischen Wärme, aber keineswegs eine direkte Proportionalität. Letztere wird nur bei sehr tiefen und sehr hohen Temperaturen existieren.

Man kann nun versuchen, die hier entwickelten Gleichungen mit anderweitigen Beobachtungen in Beziehung zu setzen. Grüneisen hat gezeigt, daß man die experimentellen Tatsachen darstellen kann durch eine Gleichung von der folgenden Form

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{V - V_0}{V_0} = w_0 \frac{\varepsilon}{V}.$$

Hierin ist w_0 eine Konstante und ε die gesamte Wellenenergie ($\varepsilon = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$). Diese Gleichung gilt in der Gegend von $+ 150^0$ bis auf 1 Proz. genau. Es müßte also angenähert gelten

$$-w_0 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{\partial \log \nu_1}{\partial \log V} + \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon}\frac{\partial \log \nu_2}{\partial \log V} + \frac{1}{6}.$$

Da vorausgesetzt ist, daß die elastischen Konstanten nicht direkt von der Temperatur abhängen, sondern nur insofern als das Volumen sich mit der Temperatur ändert, so läßt sich die letzte Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$-w_0 = \frac{1}{d\,V/d\,\vartheta} \cdot \left[\frac{c_1}{s} \frac{d \log q_1}{d\,\vartheta} + \frac{c_2}{2s} \frac{d \log q_2}{d\,\vartheta} \right] + \frac{1}{6}.$$

Die Veränderungen der elastischen Größen q_1 und q_2 lassen sich nun aus Beobachtungen von Clemens Schaefer[1]) berechnen. Hierbei ergibt sich, daß $\frac{d \log q_1}{d\,\vartheta}$ immer negativ, $\frac{d \log q_2}{d\,\vartheta}$ dagegen bald positive, bald negative Werte annimmt. Die Größe w_0 ist stets positiv, wie sie nach Grüneisen sein soll, während aber der Zahlenwert bei Platin ziemlich gut stimmt, ist das berechnete w_0 bei Kupfer etwa doppelt, bei Aluminium etwa 8 mal größer als es nach Grüneisen zur Darstellung der Beobachtungen sein müßte. Der Grund könnte zum Teil daran liegen, daß die Annahme, daß die Elastizitätskonstanten nicht explizit von der Temperatur abhängen, streng genommen nicht richtig ist, eine Möglichkeit, die wir bereits im letzten Paragraphen des ersten Teils dieser Arbeit diskutiert haben. Ferner hat Eucken[2]) darauf hingewiesen, daß sich für die numerische Berechnung der spezifischen Wärmen nach der Debyeschen Theorie die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten bei Metallen Schwierigkeiten ergeben. Bei dem physikalisch schwer zu definierenden Aufbau der Metalle bieten diese, wie auch Eucken betont, offenbar kein brauchbares Material zur Prüfung der Theorie. Hierfür kämen wohl allein Kristalle in Frage, über die jedoch keine Beobachtungen vorliegen.

Nach den von Born und v. Kármán und von Debye in die Theorie des festen Körpers eingeführten Vorstellungen halten sich also bei einem einatomigen isotropen Körper, welcher keinen äußeren Kräften unterworfen ist, die durch die thermische Dilatation hervorgerufenen elastischen Spannungen und der Druck, welchen die elastischen Wellen bei ihrer Reflexion an der Oberfläche des Körpers hervorrufen, das Gleichgewicht

1) Clemens Schäfer, Ann. d. Phys. 5. S. 220. 1901.
2) A. Eucken, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. 15. S. 571. 1913.

Dieser innere Druck steht durchaus in Analogie mit dem Strahlungsdruck, den in einem spiegelnden, mit einem durchsichtigen Dielektrikum angefüllten Hohlraum die elektromagnetischen Wellen auf die Wände ausüben, zumal wenn die Größe der Dielektrizitätskonstante von der Dichte abhängt. Ist die Geschwindigkeit der Wellen unabhängig vom Volumen (wie es für Schallwellen bei Gasen, für elektromagnetische Wellen im Vakuum der Fall ist), so ist der Druck proportional dem dritten Teil der Wellenenergie.

Wären die elastischen Konstanten sehr wenig oder gar nicht abhängig von der Dichte, so würde ein negativer Druck proportional dem sechsten Teil der Wellenenergie vorhanden sein, welcher das Volumen zu verkleinern strebt. Ein solcher Körper würde also eine negative thermische Dilatation zeigen.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule,
28. August 1919.

(Eingegangen 2. September 1919.)

4. *Über die Verschiebung des Maximums der Reflexion gegen die Lage der Eigenfrequenz; von K. Försterling.*

Einleitung.

Für die Kenntnis des Aufbaues eines mehratomigen Kristalls ist nach den heutigen Anschauungen die Frequenz der Atomschwingungen im Molekülverbande eine wichtige charakteristische Größe. Die am unmittelbarsten zu beobachtende Wirkung dieser Schwingungen, soweit sie auf geladene Teilchen zurückzuführen sind, liegt auf optischem Gebiet. Es handelt sich dabei um die bekannte Erscheinung, daß das Reflexionsvermögen in der Nähe der Eigenschwingung besonders große Werte annimmt. Mit Hilfe der Rubensschen Reststrahlmethode ist es gelungen, die Maxima des Reflexionsvermögens bei einer Reihe von Substanzen zu bestimmen. Eine quantitative Berechnung der Verschiebung des Reflexionsmaximums gegenüber der Eigenfrequenz scheint wegen der großen Kompliziertheit der darauf bezüglichen Formeln noch nicht bekannt zu sein, obwohl schon mehrfach auf die Existenz dieser Verschiebung hingewiesen ist, um zahlreiche Unstimmigkeiten mit anderweitigen Resultaten zu erklären.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich die in Frage kommenden Formeln ohne komplizierte Rechnungen ableiten lassen unter Einführung einiger Vernachlässigungen, die durchaus unbedenklich erscheinen.

§ 1. Grundgleichungen für Reflexion und Dispersion.

Es sei n_1 der Brechungsindex des ersten Mediums, welches als durchsichtig vorausgesetzt wird, n_2 und $\varkappa_2$ Brechungsindex und Absorptionsindex des zweiten Mediums. Führt man die Abkürzung ein

$$\delta = \frac{2 n_1 n_2}{n_2^2 (1 + \varkappa_2^2) + n_1^2}, \tag{1}$$

so ist das Reflexionsvermögen gegeben durch:

$$R = \frac{1-\delta}{1+\delta}, \tag{2}$$

eine Formel, die bei großem Reflexionsvermögen, d. h. kleinem δ näherungsweise übergeht in:

$$1 - R = 2\delta. \tag{2a}$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, daß in dem betrachteten Spektralbereich sich nur eine isolierte Eigenfrequenz befindet und die übrigen Eigenfrequenzen so weit entfernt sind, daß ihr Beitrag zum Brechungsindex als konstant angesehen werden kann. Ebenso soll von der Dispersion des ersten Mediums abgesehen werden. Die Formeln für die Dispersion einer im Kristallgitter fortschreitenden Welle sollen der Bornschen Theorie entnommen werden, unter Hinzufügung eines Dämpfungsgliedes ν'. Man kommt so auf die üblichen Drudeschen Dispersionsformeln zurück, welche wir nur in einer Hinsicht idealisieren wollen: Während in der ursprünglichen Formel das Dämpfungsglied mit der variabelen Frequenz multipliziert vorkommt, soll hier statt dessen ein konstanter Mittelwert der Frequenz gesetzt werden, eine Annahme, die bei der summarischen Einführung der Dämpfung in die Dispersionstheorie sicherlich unbedenklich ist. Die Gleichungen lauten dann:

$$\left\{\begin{aligned} n_2^2(1-\varkappa_2^2) &= n_0^2 + \frac{\varrho(\nu_0^2-\nu^2)}{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\nu_0^2\nu'^2}, \\ 2n_2^2\varkappa_2 &= \frac{\varrho\,\nu_0\nu'}{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\nu_0^2\nu'^2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Hierin sind ϱ, ν_0 und ν' konstante Größen.

Setzt man

$$\frac{\nu_0^2-\nu^2}{\nu_0\nu'} = x; \qquad \frac{\varrho}{n_0^2\nu_0\nu'} = P, \tag{4}$$

so nehmen die Gleichungen (3) die Form an:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{n_2^2}{n_0^2}(1-\varkappa_2^2) &= 1 + \frac{Px}{1+x^2}, \\ 2\frac{n_2^2}{n_0^2}\varkappa_2 &= \frac{P}{1+x^2}. \end{aligned}\right. \tag{3a}$$

Diese Größen sind in den Ausdruck (1) für δ:

$$\delta = \frac{2\frac{n_2}{n_0}\frac{n_1}{n_0}}{\frac{n_2^2}{n_0^2}(1+\varkappa_2^2)+\frac{n_1^2}{n_0^2}} \tag{1a}$$

einzuführen. Zuvor soll aber in der Formel für δ eine weitere Vernachlässigung eintreten, indem im Nenner von (1a)

$$\frac{n_1^2}{n_0^2} = 1$$

gesetzt wird. Diese Vernachlässigung entspricht etwa der bekannten Annäherung, welche P. Drude so erfolgreich in die Theorie der Reflexion des Lichtes an Metallen eingeführt hat. Sie ist um so mehr berechtigt, je größer $n_2^2(1 + \varkappa_2^2)$ neben 1 ist. Führt man weiterhin zur Abkürzung ein

$$y = 1 + x(x + P) + \sqrt{(1 + x^2)(1 + [x + P]^2)}, \tag{5}$$

so findet sich zunächst:

$$2\frac{n_2^2}{n_0^2} = \frac{y}{x^2 + 1},$$

$$\left[\frac{n_2^2}{n_0^2}(1 + \varkappa_2^2) + 1\right]^2 = 2\frac{y + P^2/2}{x^2 + 1}$$

und hieraus

$$\delta^2 = \frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{y}{y + P^2/2}. \tag{6}$$

§ 2. Maximum der Reflexion.

Das Reflexionsvermögen R hat ein Maximum, wenn δ einen möglichst kleinen Wert annimmt. Es muß also gelten

$$\frac{d\,\delta^2}{dx} = \frac{P^2}{2}\frac{dy}{dx} = 0,$$

also auch

$$\frac{dy}{dx} = (2x + P)\left(\frac{1 + Px + x^2}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + [x + P]^2)}} + 1\right) = 0.$$

Solange $P \neq 0$, ist ein Verschwinden der zweiten Klammer nicht möglich. Das Maximum des Reflexionsvermögens liegt demnach bei

$$x_M = -P/2, \tag{7}$$

also nach (4)

$$\nu_M^2 = \nu_0^2 + \frac{e}{2n_0^2}. \tag{7a}$$

An dieser Stelle wird

$$\begin{cases} y_M = 2 \\ \delta_M = \dfrac{n_1}{n_0\sqrt{1 + P^2/4}} \end{cases} \tag{8}$$

Das bei den Reststrahlfrequenzen beobachtete Reflexionsvermögen ist relativ hoch, z. B. gibt Rubens für das mittlere Reflexionsvermögen des Steinsalzes 0,8 an, dem etwa $P = 20$ entsprechen würde.

Bei hohem Reflexionsvermögen wird also in Annäherung

$$(8a) \quad \begin{cases} \delta_M = 2\frac{n_1}{n_0}\frac{1}{P}, \\ R_M = 1 - 4\frac{n_1}{n_0}\frac{1}{P}. \end{cases}$$

Mit diesen Werten δ_M und R_M mögen die entsprechenden Größen δ_0 und R_0, welche für die Eigenfrequenz $\nu = \nu_0$ gelten, verglichen werden, wenigstens in Annäherung für den Fall, daß P groß ist neben 1. Es ist

$$y_0 = 1 + P$$

$$\delta_0^2 = \frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{2(1+P)}{1+(1+P)^2} = \frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{2}{1+P},$$

also näherungsweise

$$\delta_0 = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{2/P}.$$

Unter der Voraussetzung, daß das erste Medium das Vakuum ist (also $n_1 = 1$) und unter Berücksichtigung von (8a) geht die letzte Gleichung über in:

$$(9) \quad \delta_0 = \sqrt{\delta_M / n_0}.$$

Wäre also die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Frequenz bekannt, so ließe sich hieraus allein die Lage von ν_0 gegen ν_M ermitteln. Wenn beispielsweise $n_0 = 1{,}5$ und

$$R_M = \begin{cases} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{cases}, \quad \text{so folgt für} \quad \frac{R_0}{R_M} = \begin{cases} 0{,}72 \\ 0{,}75. \end{cases}$$

Läßt man das Licht nacheinander an 4 Flächen der zu untersuchenden Substanz reflektieren, so läge also ν_0 an derjenigen Stelle, wo die Kurve der reflektierten Intensität rund auf $^1/_4$ bzw. auf $^1/_3$ des maximalen Wertes gesunken ist; und zwar, wie aus Formel (7a) hervorgeht, nach der Richtung größerer Wellenlängen verschoben. Legt man die Kurven von Rubens für Steinsalz und Sylvin zugrunde, so würden sich die Eigenfrequenzen ergeben für

Steinsalz etwa 60 μ (Maximum der Reflexion bei 52 μ),
Sylvin „ 74 μ („ „ „ „ 64 μ).

Die so geschätzten Werte für ν_0 sind aber äußerst unsicher, weil einmal, wie Hr. Rubens selbst betont, seine Darstellungsmethode der Intensitätsverteilung nur eine ziemlich rohe Annäherung ist[1]), ferner aber besonders, weil fremde Einwirkungen (Wasserdampf) die Gestalt der Kurve stark beeinflussen. Es ist daher von großer Wichtigkeit, daß die in Formel (7a) vorkommende Konstante ϱ sich aus anderweitigen Daten berechnen läßt, während das unbekannte ν' in ihr nicht auftritt.

§ 3. Anwendung auf zweiatomige Kristalle.

Die folgenden Betrachtungen sind durch eine Arbeit von M. Born[2]) veranlaßt, in welcher er nach dem Vorgange Dehlingers[3]) die Eigenfrequenzen der Atome ν_0 aus anderweitigen Beobachtungen, gestützt auf die Raumgittertheorie der Kristalle zu berechnen sucht. Aus den dort angegebenen Daten ist nun auch die für den vorliegenden Fall so wichtige Größe ϱ zu berechnen. Ist F die Summe der Ladungen einer Atomart im Grammolekül, δ die Dichte, μ_1 und μ_2 die Atomgewichte, so findet sich für ϱ

$$\varrho = \frac{4\pi F^2 \delta}{\mu_1 \mu_2}.$$

Aus (7a) folgt dann für die Wellenlängen λ_0 und λ_M:

$$\frac{1}{\lambda_M^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\varrho}{2\pi_0^2 4\pi^2 c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} + \varrho', \tag{10}$$

wobei ϱ' eine neue Abkürzung bedeutet. M. Born hat auch die λ_0 berechnet und Werte gefunden, welche von dem Maximum der Reststrahlen erheblich abweichen. Während Hr. Born aber in der genannten Abhandlung bereits auf die Verschiebung des Reststrahlenmaximums gegen die Eigenwellenlänge hinweist, hat er in einer späteren Abhandlung[4]) doch hierin einen Widerspruch gegen die Grundannahme seiner damaligen Rechnung zu finden geglaubt, mit Unrecht, wie wir im folgenden zeigen werden. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Spalte die aus den von Born benutzten Daten berechneten Werte von ϱ'; in der zweiten die von Born gefundenen λ_0,

1) Rubens, Sitzungsber. d. Berliner Akad. S. 523. 1913.

2) M. Born, Sitzungsber. d. Berliner Akad. S. 608. Formel (1). 1918.

3) W. Dehlinger, Phys. Zeitschr. 15. S. 276. 1914.

4) M. Born, Phys. Zeitschr. 19. S. 539. 1918.

in der dritten die nach Formel (10) hieraus berechneten λ_M und schließlich in der letzten Spalte die von Rubens beobachteten Reststrahlenwellenlängen λ_R.

	ϱ'	λ_0	λ_M	λ_R
Steinsalz . . .	$1{,}74 \cdot 10^4$	66,7 μ	50,9 μ	52,0 μ
Sylvin . . .	$1{,}00 \cdot 10^4$	78,0 „	61,6 „	63,4 „
Bromkalium .	$0{,}562 \cdot 10^4$	94,0 „	76,8 „	82,6 „
Jodkalium . .	$3{,}46 \cdot 10^3$	115,0 „	95,3 „	94,1 „

Die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Reststrahlenwellenlängen ist angesichts der verschiedenartigen zur Berechnung verwandten Daten eine sehr gute. Bei Bromkalium waren die Beobachtungen der Reststrahlen besonders schwierig.[1]) Um noch weitere Beobachtungen heranzuziehen, könnte man z. B. auf die von Paschen berechneten Dispersionsformeln für Steinsalz und Sylvin zurückgreifen. Diese Formeln sind so berechnet, daß sie die sehr genauen Paschenschen Beobachtungen möglichst exakt darstellen. Es muß indessen darauf hingewiesen werden, daß die in den Formeln auftretenden Konstanten nicht unbedingt einen physikalischen Sinn haben. Die Dielektrizitätskonstante berechnet sich nach der Paschenschen Formel für Steinsalz zu 5,68, während der experimentelle Wert 5,55[2]) ist. Bei Sylvin hingegen folgt aus der Paschenschen Formel 3,87, der experimentelle Wert aber ist 4,70. Man wird daher zu allgemeinen Schlußfolgerungen die Konstanten der auf Sylvin bezüglichen Formel nicht benutzen können; für Steinsalz würde aus der Paschenschen Formel $\varrho' = 2{,}02 \cdot 10^{+4}$ folgen, für λ_0 ungefähr 60 μ, was von den oben angegebenen Werten nicht allzu verschieden ist.

Schließlich mögen diejenigen Werte für die Eigenschwingung λ_0 zum Vergleich herangezogen werden, welche ich für Steinsalz und Sylvin in der vorangehenden Arbeit aus der Darstellung der spezifischen Wärmen nach der Born-Kármánschen Theorie erhielt:

Steinsalz $\lambda_0 = 64{,}5\ \mu$,
Sylvin $\lambda_0 = 77\ \mu$.

1) H. Rubens, Sitzungsber. d. Berliner Akad. S. 527. 1913.
2) Vgl. W. Voigt, Kristallphysik. S. 457.

Die Übereinstimmung mit den in Tab. 1 angegebenen Werten für λ_0 ist wiederum recht gut.

§ 4. Flußspat.

Komplizierter sind die Verhältnisse beim Flußspat. Die Raumgittertheorie läßt hier nur eine Reststrahlenwellenlänge zu. Diese Aussage steht wohl kaum in unbedingtem Widerspruch zu den Beobachtungen von Rubens[1]), welcher bei einer größeren Zahl von Reflexionen ein doppeltes Maximum der Intensität wahrnahm. Da nämlich die Intensität der benutzten Lichtquelle innerhalb des Streifens sehr stark variiert (die Intensitäten an den beiden Enden desselben verhalten sich wenigstens wie 1 : 3), kann ein zweites Maximum entstehen, wenn der steilste Absturz sich an einer Stelle des Spektrums befindet, wo das Reflexionsvermögen noch im Steigen begriffen ist. Man kann durch Aufzeichnung und Durchrechnung eines speziellen Beispiels leicht die Kurven Fig. 2 der oben zitierten Rubensschen Arbeit erhalten.

Aus den von M. Born benutzten Daten ergibt sich:

	ϱ'	λ_0	λ_M	λ_R
Flußspat . . .	$4{,}18 \cdot 10^6$	$58{,}1\,\mu$	$35{,}9\,\mu$	$31{,}6\,\mu$

Der von Rubens beobachtete Wert kann infolge der oben erörterten Intensitätsverteilung sehr wohl etwas zu klein sein; doch wird kaum hierauf allein die Differenz zwischen λ_M und λ_R zurückzuführen sein, sondern es wird die immerhin vorhandene Unsicherheit in den benutzten Daten eine Rolle spielen. Der aus der spezifischen Wärme abgeleitete Wert $\lambda_0 = 51{,}0\,\mu$ liegt dem von Born berechneten λ_0 sehr nahe. Zweifellos besteht bei der Wahl der beiden Eigenfrequenzen zur Darstellung der spezifischen Wärme eine gewisse Willkür; besonders da nur bei wenigen Temperaturen Beobachtungen vorliegen. Immerhin wäre eine Wiedergabe des Temperaturverlaufs der spezifischen Wärme bereits mit einer Eigenwellenlänge $\lambda_0 = 45\,\mu$ nicht mehr ohne erhebliche Fehler möglich.

Zusammenfassung.

In der vorstehenden Arbeit wurde die Lage des Maximums des Reflexionsvermögens, welche nach der Reststrahlen-

1) H. Rubens, Ann. d. Phys. 69. S. 576. 1899.

methode gemessen wird, gegenüber der Eigenfrequenz des Körpers berechnet. Die Verschiebung ist sehr beträchtlich und darf keineswegs vernachlässigt werden; sie konnte bei einer Reihe der wichtigsten Kristalle aus vorhandenen Daten berechnet werden. Es zeigt sich nunmehr eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Rubensschen Reststrahlbeobachtungen, den Frequenzen, welche aus der Theorie der spezifischen Wärme folgen und schließlich denjenigen Werten, welche M. Born aus der Größe der Dielektizitätskonstanten und gewisser optischer Daten berechnet hat.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, 28. August 1919.

(Eingegangen 2. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Ar

Werbeanzeige

Spezialfabrik

Rotierende

System [illegible]

Vakuumpumpe

Öl-Luftpumpe

Kompressor

Gebläse

Vakuumpumpen, Roots-Gebläse, Kompressoren, Öl-Luftpumpen

Oeryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Kolbenpumpen

Hilfs-Antrieb zum Luftpumpenantrieb

Vorschalt-Drehschieber-Luftpumpen

Trockene Kolben-Luftpumpen

Quecksilberdampf-Hochvakuum-Pumpen

Kompressoren und Gebläse

Eigene Spezial-Fabrikation von Präzisionsteilen für Flugzeugmotoren

Flugzeugmotoren

Fabrik-Anlage

1920. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut; ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen*[1]*;*

von Héctor Isnardi und Richard Gans.

(Nach Messungen von Héctor Isnardi.)

Nach der Langevinschen[2] kinetischen Theorie des Magnetismus muß die spezifische Suszeptibilität χ diamagnetischer Körper von der Intensität des Feldes H unabhängig sein, während die experimentellen Arbeiten von Honda[3] und Owen[4] in einigen Fällen einen ausgesprochenen Einfluß von H auf χ zeigen (vgl. Fig. 1 und 2).

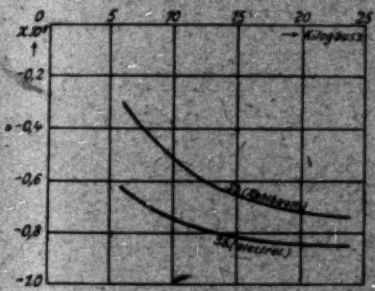


Fig. 1.

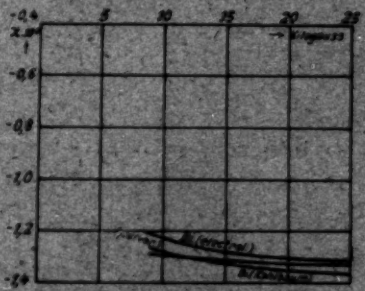


Fig. 2.

Beide Forscher schreiben diese Nichtkonstanz der Suszeptibilität der Gegenwart kleiner Mengen Eisen zu und deuten ihre Resultate als Überlagerung der negativen, konstanten Suszeptibilität des diamagnetischen Körpers (die gerade Linie A

1) Auszug aus der Veröffentlichung in Contribución al estudio de las ciencias. Universidad de La Plata. 2. S. 69. 1917.

2) P. Langevin, Ann. chim. phys. (8) 5. S. 70. 1905.

3) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. S. 1027. 1910.

4) M. Owen, Ann. d. Phys. 37. S. 657. 1912.

in Fig. 3) und der variablen Suszeptibilität des Eisens (die Kurve B in Fig. 3), so daß eine Kurve vom Typus C entsteht.

Nun hat einer von uns[1]) eine statistische Theorie des Magnetismus entwickelt unter der Annahme, daß die Magnetonen starre, elektrisch geladene Körper sind, die sich unter dem Einflusse des äußeren Feldes und der thermischen Agitation befinden.

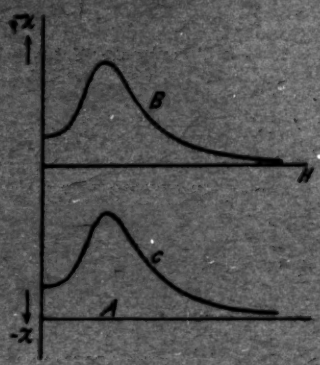


Fig. 3.

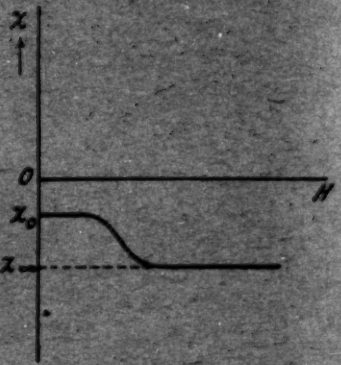


Fig. 4.

Nach dieser Theorie ist

$$\chi = -N\frac{e^2}{4m^2}\,\frac{2A+C}{3}\,[1+h\,\Omega(\gamma)], \tag{1}$$

wo N die Anzahl Magnetonen im Gramm, e/m die spezifische Ladung des Elektrons, A, B und C die Hauptträgheitsmomente des Magnetons bedeuten, von denen A und B als gleich angenommen worden sind, so daß B in der Formel nicht vorkommt. h ist eine Abkürzung für

$$h = \frac{3}{2}\,\frac{1-\frac{C}{A}}{2+\frac{C}{A}}, \tag{2}$$

Ω eine transzendente Funktion, die von Gans berechnet und in einer Tabelle niedergelegt worden ist, und deren Argument

$$\gamma = H\frac{e}{2m}\sqrt{\frac{A-C}{2kT}} \tag{3}$$

dem Felde direkt und der Wurzel aus der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, denn k ist die bekannte universelle Konstante der statistischen Mechanik.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 149. 1916.

Nach Gleichung (1) wird χ durch eine Kurve vom Typus der Fig. 4 dargestellt, die durch einen bestimmten Wert χ_0 für schwache Felder und einen anderen Wert χ_∞ für sehr starke Felder gekennzeichnet ist, und zwar gilt

$$\frac{\chi_\infty}{\chi_0} = \frac{3}{2 + \frac{U}{A}}. \tag{4}$$

Nur wenn $A = C$ ist, d. h. wenn alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, so daß $h = 0$ und $\gamma = 0$ ist, wird χ eine vom Felde und der Temperatur unabhängige Konstante

$$\chi_0 = -N\frac{e^2}{4m^2}A. \tag{5}$$

Da die Kurve C der Fig. 3 und die Kurve der Fig. 4 für starke Felder denselben qualitativen Verlauf zeigen, haben wir für einige Stoffe mit größtmöglicher Genauigkeit χ in seiner Abhängigkeit von H gemessen, und zwar innerhalb möglichst weiter Grenzen und besonders für schwache Felder, um zu entscheiden, ob die etwa beobachtete Veränderlichkeit von χ durch kleine Eisenbeimengungen hervorgerufen wird oder sich durch Verschiedenheit der Hauptträgheitsmomente des Magnetons erklärt, mit der Nebenabsicht, A und C mittels der Gleichungen (3) und (4) in absolutem Maße zu bestimmen.

Wir haben für die Beobachtungen Sb und Bi ausgewählt wegen des starken Feldeinflusses bei diesen Substanzen nach Honda und Owen.

Wir bedienten uns der Weissschen[1]) Meßmethode, welcher die Kraftwirkung in einem inhomogenen Felde zugrunde liegt, mußten also die Feldstärke und ihren Gradienten ballistisch messen, und zwar letzteren mit einem eigens konstruierten Schlittenapparat, so daß der ballistische Ausschlag bei seiner Verschiebung direkt den Gradienten ergab.

Zur Eichung in absolutem Maße benutzten wir Wasser mit dem von Weiss und Piccard[2]) bestimmten Werte.

1) P. Weiss und G. Foëx, Arch. d. sc. phys. et nat. 31. S. 4, 19 89, 117. 1911.

2) P. Weiss und P. Piccard, C. R. 155. S. 1234. 1912.

Natürlich wurde der schwache Magnetismus der Suspension gemessen und in Rechnung gezogen.

1. Antimon.

Ehe der zu den Messungen benutzte Zylinder gegossen wurde, wurde das Metall und die Bronzeform mit heißer Schwefelsäure gewaschen. Es ergaben sich folgende drei Maßreihen.

H	$-\chi \cdot 10^6$
2075	0,7787
3086	0,7670
4100	0,8048
5084	0,8112
6000	0,8254
6750	0,8183
7460	0,8153

H	$-\chi \cdot 10^6$
1029	0,7950
1543	0,8087
2075	0,7410
3086	0,7838
4100	0,5145
5084	0,8048
6000	0,8179
6750	0,8164
7460	0,8143
8048	0,7923

H	$-\chi \cdot 10^6$
3350	0,8189
5090	0,8092
6830	0,8100
8500	0,8395
10170	0,8166
13260	0,7890

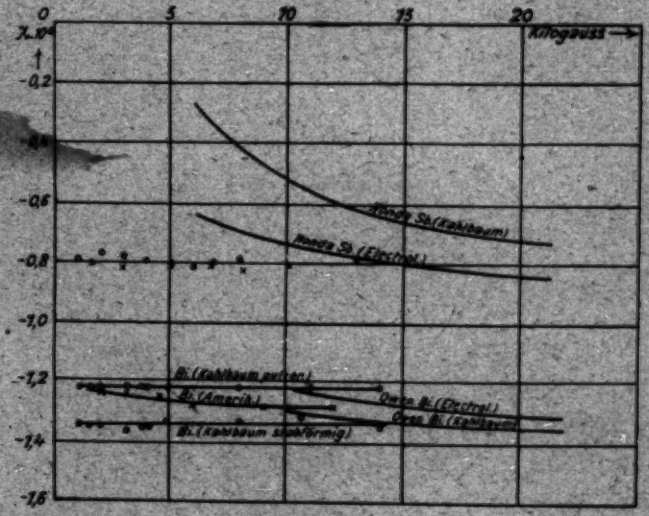


Fig. 5.

Die Resultate sind graphisch in Fig. 5 dargestellt, in der auch zum Vergleich die Hondaschen Resultate eingezeichnet worden sind.

2. **Amerikanisches Wismut.**[1])

Das granulierte Material wurde fein gepulvert. Die Ergebnisse sind folgende.

H	$-\chi \cdot 10^6$
1466	1,220
1962	1,241
3081	1,240
3244	1,243
4480	1,256
6002	1,289
8917	1,282
11680	1,279

Wegen der graphischen Darstellung vgl. Fig. 5.

3. **Kahlbaumsches Wismut in Stangenform.**

Da beim amerikanischen Wismut ein deutlicher, wenn auch schwacher Einfluß des Feldes beobachtbar war, haben wir uns aus Kahlbaumschem Wismut eine Stange gegossen und erhielten die folgenden Resultate.

H	$-\chi \cdot 10^6$
1084	1,352
1466	1,349
1962	1,347
3244	1,369
3935	1,358
4001	1,358
4900	1,328
8028	1,334
11720	1,317
13680	1,357

Hier war eine systematische Abhängigkeit von der Feldstärke, wie aus der Tabelle und der Figur hervorgeht, gänzlich verschwunden. Drehte man jedoch die Stange um ihre Achse um 90°, so ergab sich für das Feld $H = 8028$ Gauss der Wert $\chi = -1{,}17 \cdot 10^{-6}$. Das ist ein Einfluß der Kristallstruktur, wie ihn Owen (a. a. O.) bereits festgestellt hat.

1) Wismut aus der Filiale von Merck in den Vereinigten Staaten.

4 Kahlbaumsches Wismut in Pulverform.

Aus diesem Grunde haben wir auch mit pulverisiertem Wismut von Kahlbaum Messungen gemacht. Es ergab sich

H	$-\chi \cdot 10^6$
1084	1,218
1466	1,228
1962	1,215
3244	1,221
3935	1,229
4001	1,225
4900	1,223
8028	1,228
11720	1,214
13680	1,222

Der in dieser Maßreihe gefundene Wert steht in befriedigender Übereinstimmung mit dem Mittelwert aus den beiden Zahlen, die in zueinander senkrechten Richtungen bei der Stange gefunden wurden.

In die Figur haben wir auch die von Owen an Kahlbaumschem und elektrolytischem Bi ermittelten Werte eingetragen.

Ergebnisse.

1. Die Resultate unserer Messungen zeigen, daß die magnetische Suszeptibilität des Bi und Sb nicht von der Feldstärke abhängt, daß also die scheinbare Abhängigkeit, welche Honda und Owen beobachtet haben, auf Meßfehler und teilweise vielleicht auf Verunreinigung durch Eisen zurückzuführen ist.

2. Ein Vergleich mit der Gansschen Theorie ergibt, daß die Hauptträgheitsmomente eines Magnetons untereinander gleich sind. Wir haben dieses Resultat zwar nur am Bi und Sb festgestellt, wahrscheinlich gilt es, nach den Messungen von Honda und Owen zu urteilen, aber auch für die übrigen Elemente.

La Plata, April 1917, Instituto de Física.

(Eingegangen 4. Oktober 1919.)

2. *Über das piëzooptische Verhalten von Topas;* *von Robert Eppendahl.*

(Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

Das optische Verhalten eines durchsichtigen Kristalles ist bekannt, wenn die Parameter seines Polarisationsovaloides gegeben sind. Die Gleichung desselben lautet, auf ein beliebig im Kristall orientiertes Achsensystem X', Y', Z' bezogen:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \varrho^4 = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' \\ + 2a_{12}x'y'. \end{aligned} \right.$$

Hierin sind die a_{hk} Parameter des Kristalles, die sogenannten Polarisationskonstanten[1]), für das betreffende Achsensystem. Im Falle, daß das Achsensystem mit den Hauptachsen des Ovaloides zusammenfällt, werden die a_{23}, a_{31}, $a_{12} = 0$ und die a_{11}, a_{22} und a_{33} zu den Quadraten der Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Bei konstanten äußeren Bedingungen sind die Polarisationskonstanten nur Funktionen der Wellenlänge. Bei Änderung der äußeren Umstände, die Einfluß auf das physikalische Verhalten des Kristalles haben, ändern sie sich dagegen im allgemeinen gleichfalls. Für die Änderung des optischen Verhaltens eines Kristalles speziell durch elastische Deformation hat F. Pockels[2]) nach dem Vorgang von Fr. Neumann[3]) die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der Deformationsgrößen bzw. der Druckkomponenten angesetzt und auf dieser Grundlage die Theorie der beobachtbaren Erscheinungen abgeleitet, die erhaltenen Resultate auch durch experimentelle Untersuchungen an Kristallen des regulären

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1896. Heft 3. S. 17.

2) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. 1889; Lehrbuch der Kristalloptik S. 467. 1906.

3) F. Neumann, Abh. d. Berliner Akad. II. 1841; Pogg. Ann. 54. S. 449. 1841.

Systems sowie des rhomboëdrischen Systems geprüft und bestätigt.[1])

In vorliegender Arbeit ist ein Vertreter des rhombischen Systems, nämlich Topas, der Untersuchung unterworfen, während im Anhang kurz über Beobachtungen am hexagonalen Beryll berichtet wird.[2]) Eine mühsame Untersuchung des piëzooptischen Verhaltens von Natriumchlorat, das wegen dessen Aktivität ein ganz besonderes Interesse erweckt, führte — vermutlich wegen optischer Störungen des benutzten Kristallmateriales — nicht zu sicheren Ergebnissen und muß daher unbesprochen bleiben.

Die Beobachtungen zur Bestimmung der piëzooptischen Konstanten der bezüglichen Kristalle sind im Physikalischen Institute zu Göttingen durchgeführt worden; sie beziehen sich ebenso wie die Beobachtungen von Pockels auf den speziellen Fall einseitigen Druckes, für den die theoretischen Formeln besonders leicht abzuleiten sind. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von gegebener Orientierung gegen den Kristall ist in der Längsrichtung einem einseitigen Drucke ausgesetzt, während die optischen Messungen sich auf die beiden zu dieser Druckrichtung senkrechten Richtungen erstrecken.

Zur Ausübung des einseitigen Druckes wurde zunächst für einige Messungen am Natriumchlorat derselbe Kompressionsapparat gebraucht, den Pockels zu seinen Beobachtungen im hiesigen Institut benutzt hatte. Eine eingehende Beschreibung dieser Druckvorrichtung findet sich bei Pockels.[3])

Späterhin wurde ein neuer Druckapparat hergestellt. Eine $1^1/_2$ cm dicke Messingplatte (ungefähr 21 : 16 cm) ruhte als Tischplatte auf 4 starken Messingsäulen, die in eine schwere Holzplatte eingelassen waren. In der Mitte der Tischplatte stand eine kurze Messingsäule, deren obere Endfläche plan geschliffen war und zur Aufstellung des Kristallpräparates diente. Die Höhe dieser Säule war so abgemessen, daß, wenn der zur Messung der relativen Verzögerung benutzte Kompen-

1) F. Pockels, a. a. O. sowie Wied. Ann. N. F. **39**. S. 440. 1890; N. Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. 8. S. 218. 1891; Drudes Ann. 11. S. 726. 1903.

2) Die Fakultät hat gestattet, den auf Beryll bezüglichen Teil der Dissertation in diesem Auszug wiederzugeben.

3) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. **37**. S. 164. 1889.

sator auf die Tischplatte aufgeschraubt wurde, das Kristallpräparat direkt vor bzw. hinter der Öffnung des Kompensators zu stehen kam. Zur Ausübung des Druckes wurde auf die obere Endfläche des Kristallparallelepipeds ein passendes Stahlstück aufgesetzt oder aufgekittet, das in eine Spitze endigte. Diese Spitze wiederum trug einen Messingrahmen, in dessen Ausschnitt die Säule und das Kristallpräparat stand und dessen Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung war. Das Rähmchen führte durch einen Spalt in der Tischplatte nach unten, wo es mit einer Anhängevorrichtung versehen wurde, die vermittelst einer Stahlspitze mit einem horizontalstehenden Hebel in Verbindung stand. Da bei dieser Vorrichtung der Druck zwischen zwei verhältnismäßig weit entfernten Spitzen wirkte, so war die Unsicherheit in der Druckrichtung nicht so groß, wie bei dem Pockelsschen Apparat; außerdem war die Aufstellung der Prismen eine viel bequemere und leichtere. Die Schwierigkeiten indessen, einen gleichmäßig über den Querschnitt des Präparates verteilten Druck zu erzielen, auf die Pockels schon in ausführlicher Weise eingegangen ist, waren nicht minder groß. Das Verhältnis des Hebelarmes, an dem die Stahlspitze des Rahmens angriff, zu dem Hebelarm, an welchem die Belastung wirkte, war verschieden. Es war 1 : 5 bei den meisten Kompensatormessungen, bei den Messungen der absoluten Verzögerungen dagegen 1 : 9,7.

Die Ausführung der Messungen geschah in analoger Weise, wie bei den Untersuchungen von Pockels. Zur Messung der relativen Verzögerungen diente derselbe Babinetsche Kompensator älterer Konstruktion, den er bei seinen Untersuchungen im Physikalischen Institut zu Göttingen benutzt hat.[1]) Infolge einer währenddem an demselben vorgenommenen Auswechselung der Quarzkeile betrug der Streifenabstand für Na-Licht nicht 23,8 Umdrehungen der Trommel, sondern 9,72 Umdrehungen.

Bei sämtlichen Beobachtungen der relativen Verzögerungen war das Kristallprisma zum Kompensator so orientiert, daß die Schwingungsrichtungen im Prisma parallel waren zu denen im Kompensator. Dann gilt für die durch Druck erzeugte

1) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. S. 166. 1889.

relative Verzögerung Δ der horizontal schwingenden Welle h gegen die vertikal schwingende v bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{hv} = \delta_h - \delta_v = {} & \frac{D^0 \cdot p}{2\lambda} \left\{ \frac{\omega_h^{0\,2} - \omega_h^2}{p \cdot \varepsilon^2} \cdot n_h^{0\,3} - \frac{\omega_v^{0\,2} - \omega_v^2}{p \cdot \varepsilon^2} \cdot n_v^{0\,3} \right\} \\ & + \frac{D - D^0}{\lambda} (n_h^0 - n_v^0) = \frac{\Delta'}{9{,}72} \cdot \end{aligned} \right.$$

Hierin bezeichnet D^0 die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung vor der Kompression, D diejenige während der Kompression; p den angewandten Druck in Gramm pro Quadratmillimeter. Derselbe ist

$$p = \frac{Q \cdot 9{,}7}{K_1 \cdot K_2} \quad \text{oder} \quad p = \frac{Q \cdot 5}{K_1 \cdot K_2},$$

wo Q die am Hebelende wirkende Belastung und $K_1 \cdot K_2$ der Querschnitt des Prismas ist. $D - D^0$ ist die Dickenänderung des Präparates in der Beobachtungsrichtung. n_h^0 und n_v^0 bezeichnen die ursprünglichen Brechungsindizes der horizontal und der vertikal schwingenden Welle. Das Glied

$$\frac{D - D^0}{\lambda} (n_h^0 - n_v^0)$$

ist eine Korrektion für die relative Verzögerung der entstehenden Dickenänderung, die speziell bei stark doppelbrechenden Kristallen von Einwirkung ist. Bei schwach doppelbrechenden Kristallen, wie Topas, beträgt diese Korrektion nur einen kleinen Bruchteil von 1 Proz. und kann bei nicht sehr genauen Messungen vernachlässigt werden; bei regulären Kristallen verschwindet sie überhaupt. Ferner bezeichnet v die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum, ω^0 diejenige im undeformierten, ω diejenige im deformierten Kristall. Δ' ist die durch die Kompression erzeugte Streifenverschiebung des Kompensators, ausgedrückt in Umdrehungen der Trommel. Die Ungenauigkeit der Einstellung des schwarzen Kompensatorstreifens war je nach der Deutlichkeit des Streifens verschieden. Sie ging selten über $\pm$ 0,004 λ hinaus, und betrug in den meisten Fällen ungefähr 0,002—0,004 λ.

Der pro Millimeter Lichtweg durch die Druckeinheit von 1 g pro Quadratmillimeter erzeugte Gangunterschied werde mit $\bar{\Delta}$ bezeichnet. Für ihn gilt:

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\Delta}_{h\,v} = \frac{\Delta_{h\,v}}{p \cdot D^0} = \frac{1}{2\,\lambda} \Big\{ & \frac{\omega_h^{0\,2} - \omega_h^{\,0}}{p \cdot p^0} \cdot n_h^{\,0\,2} - \frac{\omega_v^{0\,2} - \omega_v^{\,0}}{p \cdot p^0} \cdot n_v^{\,0\,2} \Big\} \\ & + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_h^{\,0} - n_v^{\,0}}{\lambda} \cdot \end{aligned} \right.$$

$\frac{D - D^0}{p \cdot D^0}$ ist hierbei die durch 1 g pro Quadratmillimeter hervorgerufene lineare Dilatation. Ist also $\overline{\Delta}_{h\,v}$ durch die Beobachtung gegeben, ferner die lineare Dilatation bekannt, so läßt sich der in der $\{\ldots\}$ stehende Ausdruck berechnen. Derselbe enthält die durch das Polarisationsovaloid und den Ansatz von Pockels gegebenen Konstanten des Kristalles.

Die Messung der absoluten Verzögerungen wurde mit einem Jaminschen Interferentialrefraktor spezieller Konstruktion ausgeführt, der nach Angaben von Prof. Voigt konstruiert war. Zwischen den Platten desselben stand außer dem Kompressionsapparat ein zur Messung der absoluten Verzögerung dienender Jaminscher Kompensator. Sämtliche Apparate waren fest auf einer großen Steinplatte montiert, um Erschütterungen zu vermeiden. Als Schutz gegen Temperaturschwankungen war das Ganze mit einem Pappkasten umgeben, der Fenster für den eintretenden Lichtstrahl und das Beobachtungsfernrohr enthielt. Ferner ragte aus demselben das Ende des zu belastenden Hebels und die Trommel des Jaminschen Kompensators heraus. Zur Aufhebung der durch das zu komprimierende Prisma hervorgerufenen ursprünglichen Verzögerungen des einen Lichtstrahles wurde immer ein zweites passendes Präparat in den Gang des anderen Strahles gestellt. Um die relative Stellung der beiden Prismen zu fixieren, waren dieselben nahe einander zwischen dünne Stahlstreifen gekittet. Eine etwaige Bewegung des komprimierten Prismas wurde so durch das Kompensationsprisma mitgemacht. Der Abstand der beiden interferierenden Strahlen und infolgedessen auch der beiden nebeneinanderstehenden Präparate betrug etwa 1 cm. Infolge der benutzten intensiven Lichtquelle und eines passend gewählten Einfallswinkels des auf die erste Platte des Jamin auffallenden Strahles wurde erreicht, daß die Verzögerung sowohl der vertikal schwingenden wie der horizontal schwingenden Welle in den meisten Fällen gemessen werden konnte. Die Intensität des Interferenzbildes, das durch die vertikal schwingende Welle erzeugt wurde, war die größere,

infolge der teilweisen Polarisation bei der Reflexion an den Glasplatten des Interferentialrefraktors. Jedoch genügte auch die Intensität des Interferenzbildes der horizontal schwingenden Welle zu genauen Messungen. An und für sich genügt die Beobachtung einer der beiden Schwingungen, da die relative Verzögerung mit dem Kompensator bestimmt war. Doch war es wünschenswert, beide Schwingungen zugänglich zu machen, um besonders diejenige mit der größeren absoluten Verzögerung messen zu können. Dieses war für die am Topas und Beryll zu messenden Verzögerungen von wesentlicher Bedeutung, da hier unter Umständen die Verschiebungen der Interferenzstreifen der horizontalen Welle die größeren waren. Die Trennung der beiden senkrecht zueinander polarisierten Interferenzbilder erfolgte durch ein großes Nicolsches Prisma, das hinter dem Beobachtungsfernrohr in den Strahlengang eingeschaltet wurde.

Für die durch Druck erzeugte absolute Verzögerung gilt:

$$(3) \qquad \delta_{h/v} = \frac{D^0 \cdot p}{2\lambda} n_{h/v}^{03} \cdot \frac{\omega_{h/v}^{02} - \omega_{h/v}^{2}}{p \cdot v^2} + \frac{D - D^0}{\lambda}(n_{h/v}^{0} - 1),$$

oder bezogen auf die Längeneinheit 1 mm und die Druckeinheit 1 g pro Millimeter:

$$(3') \qquad \delta_{h/v} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega_{h/v}^{02} - \omega_{h/v}^{2}}{p \cdot v^2} \cdot n_{h/v}^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_{h/v}^{0} - 1}{\lambda}.$$

Hierbei ist das letzte wegen der Dickenänderung des Prismas auftretende Glied in keinem Falle zu vernachlässigen. Wie die Messungen an Topas und Beryll gezeigt haben, kann dasselbe sogar von derselben Größenordnung sein, wie die direkt durch Druck erzeugte Verzögerung. Es kann der durch Druck erzeugten Verzögerung entgegenwirken und dieselbe sogar zum großen Teile wieder aufheben. Das Glied spielt hier somit keineswegs die Rolle einer Korrektion. Eine Kenntnis der elastischen Eigenschaften eines Kristalles ist daher bei diesen Messungen, bei denen das Präparat in Luft steht, erforderlich; prinzipiell könnte man natürlich das zu deformierende Prisma auch in eine Flüssigkeit von nahezu demselben Brechungsindex stellen, dann würde die Flüssigkeit die Dickenänderung ausgleichen und das letzte Glied in obiger Gleichung würde wegfallen. Ein Flüssigkeitstrog zwischen den Platten des Refraktors würde jedoch die Deutlichkeit des Interferenz-

bildes wesentlich einschränken und daher ziemlich viele experimentelle Schwierigkeiten verursachen.

Als Lichtquelle wurde zuerst Na-Licht benutzt, späterhin jedoch die gelbe Heliumlinie mit der Wellenlänge $\lambda = 588\,\mu\mu$. Genauere Einzelheiten über die Art der Messungen mit dem Interferentialrefraktor, ihrer Ausführung im einzelnen, sowie über die Aufstellung der Kristallpräparate und die dabei sich ergebenden Schwierigkeiten, finden sich in ausführlicher Weise in den Arbeiten von Pockels, so daß hier die Erwähnung derselben genügen kann.

Das piëzooptische Verhalten von Topas.

a) Die benutzten Prismen.

Das Material für die vorliegende Arbeit wurde mir in liebenswürdiger Weise von Hrn. Geheimrat Voigt zur Verfügung gestellt. Die benutzten sechs rechtwinkligen Parallelepipeda waren aus denselben sibirischen Kristallen geschnitten, die seiner Zeit das Material für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten des Topases geliefert haben.[1]) Die genaue Kenntnis dieser Konstanten für die verwendeten Präparate war sehr wertvoll, weil (abgesehen von dem oben Ausgeführten) so nicht nur eine Bestimmung der piëzooptischen Konstanten, sondern auch eine sichere Berechnung der elastooptischen Konstanten ermöglicht wurde. Hierbei ist als piëzooptische Konstanten nach Pockels die Konstantengruppe bezeichnet, die man erhält, wenn man die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der *Druckkomponenten* ansetzt, als elastooptische dagegen diejenige, die bei der Entwickelung der Polarisationskonstanten in lineare Funktionen der *Deformationsgrößen* erhalten wird. Die Herstellung der Prismen ist von der Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. ausgeführt worden. Die Dimensionen und Orientierungen der einzelnen Prismen sind unten angegeben. Dabei werden die Richtungen der Prismenkanten mit L, K_1 und K_2 bezeichnet, wobei L die Längsrichtung, die immer mit der Druckrichtung zusammenfällt, K_1 und K_2, welche die Beobachtungsrichtungen sind, je eine der schmalen Prismenkanten bedeutet.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **34**. S. 981. 1888 (daselbst auch eine Beschreibung der aus Sibirien stammenden Kristalle).

Sie werden auf das natürliche Symmetrieachsensystem X^0, Y^0, Z^0 der rhombischen Kristalle (das zugleich optisches Symmetrieachsensystem ist, und zwar in der Weise, daß Z^0 parallel der ersten optischen Mittellinie liegt und $n_x^0 < n_y^0 < n_z^0$ ist) bezogen.

Prisma 1.

L parallel $X^0 = 7{,}06$ mm
K_1 „ $Y^0 = 3{,}710$ „
K_2 „ $Z^0 = 3{,}692$ „

Prisma 2.

L parallel $Y^0 = 7{,}06$ mm
K_1 „ $Z^0 = 3{,}708$ „
K_2 „ $X^0 = 3{,}692$ „

Prisma 3.

L parallel $Z^0 = 7{,}06$ mm
K_1 „ $X^0 = 3{,}702$ „
K_2 „ $Y^0 = 3{,}709$ „

Prisma 4.

L in der Mittellinie von X^0 u. $Y^0 = 7{,}06$ mm
K_1 parallel $Z^0 = 3{,}689$ „
K_2 senkrecht zu L u. $K_1 = 3{,}709$ „

Prisma 5.

L in der Mittellinie von Y^0 u. $Z^0 = 7{,}07$ mm
K_1 parallel $X^0 = 3{,}698$ „
K_2 senkrecht zu L u. $K_1 = 3{,}710$ „

Prisma 6.

L in der Mittellinie von Z^0 u. $X^0 = 7{,}02$ mm
K_1 parallel $Y^0 = 3{,}692$ „
K_2 senkrecht zu K_1 u. $L = 3{,}708$ „

Diese 6 Prismen sind zur Bestimmung der 12 piëzooptischen Konstanten des Topases ausreichend und bieten außerdem noch Möglichkeiten für die Prüfung der Theorie bzw. der Messungen.

Die natürlichen optischen Eigenschaften des Materiales waren recht gute. Es konnten in fast allen Beobachtungs-

richtungen deutliche Interferenzbilder erhalten werden. Eine Ausnahme machte Prisma 2, dessen eine Beobachtungsrichtung für die Messungen mit dem Interferentialrefraktor unbrauchbar war. Eine Bemerkung über die Art und die Ursache dieser optischen Unregelmäßigkeit findet sich in dem Abschnitt über die Beobachtungen.

b) Allgemeine Theorie für rhombische Kristalle.

Entsprechend der Symmetrie der rhombischen Kristalle, nach der die X^0-, Y^0- und Z^0-Achsen zweizählige Symmetrieachsen sind, gilt für die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der Deformationsgrößen $x_x \ldots y_z \ldots$ folgender fundamentale Ansatz[1]):

$$(4)\quad \begin{cases} a_{11} - \omega_x^{02} = p_{11}\, x_x + p_{12}\, y_y + p_{13}\, z_z, \\ a_{22} - \omega_y^{02} = p_{21}\, x_x + p_{22}\, y_y + p_{23}\, z_z, \\ a_{33} - \omega_z^{02} = p_{31}\, x_x + p_{32}\, y_y + p_{33}\, z_z, \\ a_{23} = p_{44}\, y_z, \quad a_{31} = p_{55}\, z_x, \quad a_{12} = p_{66}\, x_y, \end{cases}$$

der bei Einführung der Druckkomponenten $X_x \ldots Y_z \ldots$ die Form gewinnen mag:

$$(5)\quad \begin{cases} a_{11} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{11} X_x + \pi_{12} Y_y + \pi_{13} Z_z\}, \\ a_{22} - \omega_y^{02} = -\{\pi_{21} X_x + \pi_{22} Y_y + \pi_{23} Z_z\}, \\ a_{33} - \omega_z^{02} = -\{\pi_{31} X_x + \pi_{32} Y_y + \pi_{33} Z_z\}, \\ a_{23} = -\pi_{44} Y_z, \quad a_{31} = -\pi_{55} Z_x, \quad a_{12} = -\pi_{66} X_y. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ω_x^0, ω_y^0 und ω_z^0 die Hauptlichtgeschwindigkeiten des nichtdeformierten Kristalles. Ihre reziproken Werte, die Hauptbrechungsindizes, die von Mühlheims[2]) an einem sibirischen Topase bestimmt worden sind, und welche für die vorliegenden Berechnungen verwertet wurden, sind:

$$n_x^0 = 1{,}61927; \quad n_y^0 = 1{,}61597; \quad n_z^0 = 1{,}62252.$$

Zur Berechnung des Zusammenhanges zwischen den p_{kl} und π_{kl}, wie auch zur Bestimmung der Dickenänderung eines Präparates, die nach obigem bei den Messungen der absoluten

1) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. S. 159. 1889.
2) Aus Landolt-Börnsteins Tabellen.

Verzögerungen eine wichtige Rolle spielt, sind folgende Beziehungen zwischen den Deformationsgrößen und den Druckkomponenten zu benutzen:

$$(6)\quad \begin{cases} x_x = -\{s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z\}, \\ y_y = -\{s_{12} X_x + s_{22} Y_y + s_{23} Z_z\}, \\ z_z = -\{s_{13} X_x + s_{23} Y_y + s_{33} Z_z\}, \\ y_z = -s_{44} Y_z \quad z_x = -s_{55} Z_x, \quad x_y = -s_{66} X_y. \end{cases}$$

Hierin sind die s_{hk} die Elastizitätsmoduln des Kristalles. Dieselben sind von W. Voigt für Topas bestimmt worden[1]) zu

$$\begin{aligned} s_{11} &= 4{,}341 \cdot 10^{-8}; & s_{22} &= 3{,}460 \cdot 10^{-8}; \\ s_{33} &= 3{,}771 \cdot 10^{-8}; & s_{44} &= 9{,}059 \cdot 10^{-8}; \\ s_{55} &= 7{,}391 \cdot 10^{-8}; & s_{66} &= 7{,}485 \cdot 10^{-8}; \\ s_{23} &= -0{,}651 \cdot 10^{-8}, & s_{13} &= -0{,}840 \cdot 10^{-8}; \\ s_{12} &= -1{,}853 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Die Druckkomponenten $X_x \ldots Y_z \ldots$ werden aus der Größe des Druckes p und dessen Richtungskosinus l_1, l_2, l_3 erhalten durch die Formeln:

$$(7)\quad \begin{cases} X_x = p \cdot l_1^2; & Y_y = p \cdot l_2^2; & Z_z = p \cdot l_3^2; \\ Y_z = p \cdot l_2 \cdot l_3; & Z_x = p \cdot l_3 \cdot l_1; & X_y = p \cdot l_1 \cdot l_2. \end{cases}$$

Die lineare Dilatation in einer Richtung m bestimmt sich dann durch die Größen (6) folgendermaßen; es wird[2]):

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{D - D^0}{D^0} = x_x \cdot \cos^2(m, x) + y_y \cdot \cos^2(m, y) + z_z \cdot \cos^2(m, z) \\ \qquad + y_z \cdot \cos(m, y) \cdot \cos(m, z) + z_x \cdot \cos(m, z) \cdot \cos(m, x) \\ \qquad + x_y \cdot \cos(m, x) \cdot \cos(m, y). \end{cases}$$

Ferner gelten, wenn man die in zu (6) reziproken Formeln auftretenden Elastizitätskonstanten c_{hk} heranzieht, für die der Substanz eigentümlichen Konstanten π_{hk} und p_{hk} die Formeln[3]):

$$(9)\quad p_{hk} = \sum_1^6{}_i \pi_{hi} \cdot c_{ki}; \qquad \pi_{hk} = \sum_1^6{}_i p_{hi} \cdot s_{ki}.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 34. 1888.
2) W. Voigt, Elementare Mechanik 1901. S. 357.
3) F. Pockels, Lehrbuch d. Kristalloptik 1906. S. 468.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst mit Hilfe des Gleichungssystems (5) der Polarisationskonstanten die Größen π_{hk} für Topas bestimmt und aus diesen mittels der ersten dieser beiden Formeln (9) die elastooptischen Konstanten p_{hk} berechnet. Diese Formel ergibt speziell für rhombische Kristalle:

$$(10)\qquad \begin{cases} p_{ih} = c_{h1}\pi_{i1} + c_{h2}\cdot\pi_{i2} + c_{h3}\pi_{i3} \\ \qquad\qquad \text{für } i \text{ und } h = 1, 2, 3, \\ p_{kk} = c_{kk}\pi_{kk} \text{ für } k = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Nach den Bestimmungen von W. Voigt haben die Elatizitätskonstanten c_{hk} für Topas die Werte:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 28{,}70\cdot 10^{6}; & c_{22} &= 35{,}60\cdot 10^{6}; & c_{33} &= 30{,}02\cdot 10^{6}; \\ c_{44} &= 11{,}04\cdot 10^{6}; & c_{55} &= 13{,}58\cdot 10^{6}; & c_{66} &= 13{,}36\cdot 10^{6}; \\ c_{23} &= 9{,}01\cdot 10^{6}; & c_{31} &= 8{,}61\cdot 10^{6}; & c_{12} &= 12{,}84\cdot 10^{6}. \end{aligned}$$

Fallen die Polarisationshauptachsen des deformierten Ovaloides mit den natürlichen Symmetrieachsen des Kristalles zusammen, so reduziert sich die Gleichung des Polarisationsovaloides (1) auf:

$$\varrho^4 = a_{11}\,x^{02} + a_{22}\,y^{02} + a_{33}\,z^{02},$$

worin die Größen a_{11}, a_{22} und a_{33} die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten bedeuten, und zwar ist:

$$a_{11} = \omega_x^2; \qquad a_{22} = \omega_y^2; \qquad a_{33} = \omega_z^2.$$

Wenn die Hauptachsen X', Y', Z' des deformierten Ovaloides aber eine vom Symmetrieachsensystem abweichende Lage haben, so ist die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten schwieriger. Bezeichnet man die Richtungskosinus zwischen den Achsen des undeformierten Ovaloides X^0, Y^0, Z^0 und X', Y', Z' gemäß dem Schema:

$$(11)\qquad \begin{array}{c|ccc} & X' & Y' & Z' \\ \hline X^0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Y^0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Z^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

so geht der Ausdruck des Polarisationsovaloides, bezogen auf das System X^0, Y^0, Z^0, wieder in die allgemeinere Form über.

Ihre 6 Koeffizienten stehen dann zu den Hauptlichtgeschwindigkeiten, den Polarisationskonstanten des auf das System X', Y', Z' bezogenen Ovaloides in dem Zusammenhange:

$$(12)\quad \begin{cases} a_{hk} = \omega_x^2\, \alpha_h \alpha_k + \omega_y^2\, \beta_h \beta_k + \omega_z^2\, \gamma_h \gamma_k \\ \qquad\qquad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten des deformierten Kristalles durch Beziehungen zwischen den a_{hk} und den Richtungskosinus des Hauptachsensystems des deformierten Ovaloides gegen das natürliche Symmetrieachsensystem. Sie ergeben:

$$(13)\quad \begin{cases} \omega_x^2 = a_{11}\alpha_1^2 + a_{22}\alpha_2^2 + a_{33}\alpha_3^2 + 2a_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2a_{31}\alpha_3\alpha_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2, \\ \omega_y^2 = a_{11}\beta_1^2 + a_{22}\beta_2^2 + a_{33}\beta_3^2 + 2a_{23}\beta_2\beta_3 + 2a_{31}\beta_3\beta_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\beta_1\beta_2, \\ \omega_z^2 = a_{11}\gamma_1^2 + a_{22}\gamma_2^2 + a_{33}\gamma_3^2 + 2a_{23}\gamma_2\gamma_3 + 2a_{31}\gamma_3\gamma_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\gamma_1\gamma_2. \end{cases}$$

Die Polarisationskonstanten a_{hk} sind dabei als durch den Pockelsschen Ansatz definiert zu betrachten, gemäß (4) oder (5).

Für die Richtungskosinus $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ erhält man, weil die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten durch starken Druck sehr klein sind gegen die Differenzen der Hauptlichtgeschwindigkeiten in doppelbrechenden Kristallen, selbst in solchen mit sehr schwacher Doppelbrechung [die Größen $(a_{11} - \omega_x^{02})$, $\ldots . a_{12}$ sind den Deformationen proportional und daher sehr klein neben den Größen a_{11}, a_{22} und a_{33} selbst und auch klein neben deren Differenzen, z. B. $(a_{11} - a_{22})$ oder auch $(\omega_x^{02} - \omega_y^{02})$] einfache Näherungsformeln. Es folgt, daß α_1, β_2 und γ_3 wenig von 1 verschieden sind. Ferner muß sein:

$$\beta_3 = -\gamma_2, \quad \gamma_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = -\beta_1.$$

Man erhält bis auf kleine Größen zweiter Ordnung:

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1; \\ \beta_3 = -\gamma_2 = \dfrac{a_{23}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}; \\ \gamma_1 = -\alpha_3 = \dfrac{a_{31}}{\omega_z^{02} - \omega_x^{02}}; \\ \alpha_2 = -\beta_1 = \dfrac{a_{12}}{\omega_x^{02} - \omega_y^{02}}. \end{cases}$$

Die kleinen Drehungen, welche das Polarisationshauptachsensystem X^0, Y^0, Z^0 bei Deformationen um die X^0-, Y^0-, Z^0-Achse erfährt, mögen mit Φ_x, Φ_y, Φ_z bezeichnet werden. Für dieselben gelten in erster Annäherung die Gleichungen:

$$(15)\quad \operatorname{tg} 2\Phi_x = \frac{2a_{23}}{a_{22}-a_{33}},\quad \operatorname{tg} 2\Phi_y = \frac{2a_{31}}{a_{33}-a_{11}},\quad \operatorname{tg} 2\Phi_z = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}.$$

Findet die Drehung nur um eine der Achsen statt, so gilt die auf jene Achse bezügliche der Formeln (15) streng. Dies ist der Fall, wenn nur eine der Größen a_{23}, a_{31}, a_{12} von Null verschieden ist. Betreffs der ausführlichen Ableitung dieser allgemeinen Formeln vergleiche man F. Pockels[1])

Mit Hilfe der Hauptlichtgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z des deformierten Ovaloids, also des auf das Achsensystem X', Y', Z' bezogenen, lassen sich ferner die Lichtgeschwindigkeiten in jeder beliebigen Richtung des Kristalles bestimmen. Für dieselben besteht die bekannte Gleichung:

$$\omega_m^{-2} = \frac{\omega_x^{-2}+\omega_z^{-2}}{2} + \frac{\omega_x^{-2}-\omega_z^{-2}}{2}\cos(U \pm V).$$

Darin bedeutet m die Beobachtungsrichtung im System X', Y', Z'; U und V sind die Winkel zwischen m bzw. der Wellennormale und den optischen Achsen.

c) Spezielle Formeln für den Fall einseitigen Druckes.

Prisma 1. Liegt die Druckrichtung parallel der X^0-Achse, so wird: $p = X_x$. Nach den Formeln (6) ist dann:

$$x_x = -s_{11}\cdot p;\quad y_y = -s_{12}\cdot p;\quad z_z = -s_{13}\cdot p;$$
$$y_z = z_x = x_y = 0,$$

und die Gleichungen der Polarisationskonstanten (5) reduzieren sich auf:

$$\omega_x^{-2} - \omega_x^{0\,-2} = -p\cdot\pi_{11},$$
$$\omega_y^{-2} - \omega_y^{0\,-2} = -p\cdot\pi_{21},$$
$$\omega_z^{-2} - \omega_z^{0\,-2} = -p\cdot\pi_{31},$$

da $a_{11} = \omega_x^{-2}$; $a_{22} = \omega_y^{-2}$; $a_{33} = \omega_z^{-2}$ wird.

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37. S. 151f. 1889; Lehrbuch d. Kristalloptik 1906. S. 65—68 u. 468—469.

In der Beobachtungsrichtung parallel K_1 ($\| Y^0$) erhält demnach die Formel (2') die Gestalt:

$$(16)\quad \bar{\Delta}_{xx} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{21}}{v^2} n_x^{03} - \frac{\pi_{11}}{v^2} n_x^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_x^0 - n_x^0}{\lambda}\right],$$

denn es ist:

$$\frac{\omega_h^{02} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{21}}{v^2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_v^{03} - \omega_v^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{11}}{v^2}$$

und für die absoluten Verzögerungen δ_x und δ_z gelten nach (3') die Formeln:

$$(17)\quad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left\{\frac{\pi_{21}}{v^2}\right\} n_x^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left\{\frac{\pi_{11}}{v^2}\right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Die hier in Betracht kommende Dickenänderung ist:

$$D - D^0 = D^0 : y_y = -p \cdot D^0 \cdot s_{12} = p \cdot D^0 \cdot 1{,}353 \cdot 10^{-6}.$$

Gemessen werden die relative Verzögerung $\bar{\Delta}_{xx}$ und die absoluten Verzögerungen δ_x und δ_z. Der Berechnung sind dann die in $\{\ldots\}$ stehenden Konstantenkombinationen bzw. Konstanten zugänglich. Für die Beobachtungsrichtung parallel $K_2[\| Z^0]$ ergibt sich entsprechend für die relative Verzögerung:

$$(18)\quad \bar{\Delta}_{yx} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{21}}{v^2} n_y^{03} - \frac{\pi_{11}}{v^2} n_x^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - n_x^0}{\lambda}\right]$$

und für die absoluten Verzögerungen:

$$(19)\quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{21}}{v^2}\right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_x = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{11}}{v^2}\right\} n_x^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Die Dickenänderung in dieser Richtung berechnet sich aus:

$$D - D^0 = D^0 \cdot z_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{13} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}840 \cdot 10^{-6}.$$

Prisma 2. Bei diesem Prisma wirkt der Druck parallel der Y^0-Achse. Es ist demnach: $p = Y_y$ und nach (6):

$$x_x = -s_{12} \cdot p; \quad y_y = -s_{22} \cdot p; \quad z_z = -s_{23} \cdot p;$$
$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

Die Hauptachsen des deformierten Ovaloides fallen wieder mit denen des natürlichen Symmetrieachsensystems des

Kristalles zusammen. Es ist daher: $a_{11} = \omega_x^2$, $a_{22} = \omega_y^2$, $a_{33} = \omega_z^2$ und für die Gleichungen der Polarisationskonstanten (5) ergeben sich die Formeln:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{0\,2} = -p \cdot \pi_{12},$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{0\,2} = -p \cdot \pi_{22},$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{0\,2} = -p \cdot \pi_{32}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_1[\| Z^0]$ werden für die horizontal und die vertikal schwingenden Wellen folgende Ausdrücke erhalten:

$$\frac{\omega_h^{0\,2} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} = \frac{\omega_x^{0\,2} - \omega_x^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{12}}{v^2},$$
$$\frac{\omega_v^{0\,2} - \omega_v^2}{p \cdot v^2} = \frac{\omega_y^{0\,2} - \omega_y^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2}.$$

Die Gleichung (2′) nimmt daher hier die Form an:

$$(20) \quad \Delta_{xy} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}}{v^2} n_x^{0\,3} - \frac{\pi_{22}}{v^2} n_y^{0\,3}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - n_y^0}{\lambda}\right]$$

und (3′) wird zu:

$$(21) \quad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}}{v^2}\right\} n_x^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{22}}{v^2}\right\} n_y^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Die Dickenänderung parallel der Z^0-Achse ist:

$$D - D^0 = D^0 \cdot z_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{23} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}651 \cdot 10^{-6}.$$

Die Dickenänderung wirkt in dieser Richtung im umgekehrten Sinne wie bei Prisma 1 auf die Änderung der Doppelbrechung ein, wegen des negativen Vorzeichens von $(n_x^0 - n_y^0)$; sie sucht die durch Druck erzeugte Verzögerung zu verringern, während bei Prisma 1 dieselbe durch die Dickenänderung vergrößert wurde.

Wegen einer in dieser Beobachtungsrichtung auftretenden optischen Unregelmäßigkeit kamen die Formeln (21) nicht in Anwendung.

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_2[\| X^0]$ gelten für die in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ω_y und ω_z die Gleichungen:

$$\frac{\omega_y^{02} - \omega_y^2}{p \cdot p^2} = \frac{\pi_{12}}{p^2}; \qquad \frac{\omega_z^{02} - \omega_z^2}{p \cdot p^2} = \frac{\pi_{13}}{p^2}.$$

Diese Ausdrücke in (2′) und (3′) eingesetzt, ergeben:

$$(22) \quad \bar{\Delta}_{xy} = \frac{1}{2l}\left\{\frac{\pi_{12}}{p^2} \cdot n_z^{02} - \frac{\pi_{13}}{p^2} \cdot n_y^{02}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - n_y^0}{l}\right]$$

und

$$(23) \quad \begin{cases} \delta_z = \frac{1}{2l}\left\{\frac{\pi_{12}}{p^2}\right\} n_z^{02} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - 1}{l}\right], \\ \delta_y = \frac{1}{2l}\left\{\frac{\pi_{13}}{p^2}\right\} n_y^{02} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{l}\right]. \end{cases}$$

In dieser Beobachtungsrichtung ist ferner die Dickenänderung:

$$D - D^0 = D^0 \cdot \varepsilon_x = -p \cdot D^0 \cdot s_{13} = p \cdot D^0 \cdot 1{,}353 \cdot 10^{-8}.$$

Prisma 3. Hier wirkt der Druck parallel der Z^0-Achse. Es ist $p = Z_z$ und

$$x_z = -s_{13} \cdot p; \quad y_z = -s_{23} \cdot p; \quad z_z = -s_{33} \cdot p;$$
$$y_z = z_z = x_y = 0.$$

Die Gleichungen (5) werden zu:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -\pi_{13} \cdot p,$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -\pi_{23} \cdot p,$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -\pi_{33} \cdot p.$$

Für die in der Beobachtungsrichtung parallel $K_1[\| X^0]$ in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ω_y und ω_z gelten die Beziehungen:

$$\frac{\omega_y^{02} - \omega_y^2}{p \cdot p^2} = \frac{\pi_{23}}{p^2}; \qquad \frac{\omega_z^{02} - \omega_z^2}{p \cdot p^2} = \frac{\pi_{33}}{p^2}.$$

Die zu messende relative Verzögerung drückt sich daher folgendermaßen aus:

$$(24) \quad \bar{\Delta}_{yz} = \frac{1}{2l}\left\{\frac{\pi_{23}}{p^2} n_y^{02} - \frac{\pi_{33}}{p^2} n_z^{02}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - n_z^0}{l}\right]$$

und für die absoluten Verzögerungen gilt:

$$(25) \quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2l}\left\{\frac{\pi_{23}}{p^2}\right\} n_y^{02} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{l}\right], \\ \delta_z = \frac{1}{2l}\left\{\frac{\pi_{33}}{p^2}\right\} n_z^{02} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - 1}{l}\right]. \end{cases}$$

Ferner ist die in Rechnung zu setzende Dickenänderung:

$$D - D^0 = D^0 \cdot x_x = - p \cdot D^0 \cdot s_{13} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}840 \cdot 10^{-6}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_3[\| Y^0]$ sind die Lichtgeschwindigkeiten ω_x und ω_z zu beobachten. Für diese folgen aus dem Ovaloid die Beziehungen:

$$\frac{\omega_x^{03} - \omega_x^2}{p \cdot v^3} = \frac{\pi_{23}}{v^2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_z^{03} - \omega_z^2}{p \cdot v^3} = \frac{\pi_{13}}{v^2}.$$

In (2′) eingesetzt, wird die relative Verzögerung:

$$\bar{\Delta}_{xz} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{13}}{v^2} n_x^{03} - \frac{\pi_{23}}{v^2} n_z^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - n_z^0}{\lambda}\right] \tag{26}$$

und die absoluten Verzögerungen nach (3′) ergeben:

$$\begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{13}}{v^2}\right\} n_x^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{23}}{v^2}\right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases} \tag{27}$$

Die hier in Betracht kommende Dickenänderung bestimmt sich aus:

$$D - D^0 = D^0 \cdot y_y = - p \cdot D^0 \cdot s_{23} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}651 \cdot 10^{-6}.$$

Bei Prisma 3 wirkt — genau wie in der Beobachtungsrichtung parallel Z^0 des Prismas 2 — in beiden Beobachtungsrichtungen die durch die Dickenänderung entstehende Verzögerung der allein durch Druck entstehenden entgegen. Infolge der geringen natürlichen Doppelbrechung des Topases ist dieses jedoch ebenso, wie die in anderen Richtungen durch die Dickenänderung entstehende Vergrößerung der relativen Verzögerung ohne wesentliche Bedeutung. Die Vernachlässigung der Dickenänderung bei der relativen Verzögerung würde noch nicht 1 Proz. betragen.

Prisma 4. Bei diesem Präparat liegt die Druckrichtung L in der X^0-Y^0-Ebene unter -45^0 gegen die X^0-Achse geneigt. Demzufolge ist nach (7):

$$X_x = + \frac{p}{2}; \quad Y_y = + \frac{p}{2}; \quad Z_z = Y_z = Z_x = 0;$$

$$X_y = - \frac{p}{2}$$

und nach (6):

$$x_x = -\frac{p}{2}\{s_{11} + s_{12}\},$$
$$y_y = -\frac{p}{2}\{s_{12} + s_{22}\},$$
$$z_z = -\frac{p}{2}\{s_{13} + s_{23}\},$$
$$y_z = z_x = 0,$$
$$x_y = +\frac{p}{2} \cdot s_{66}.$$

In der zu L senkrechten Beobachtungsrichtung parallel K_2 wird nach (8) die Dickenänderung des Prismas gegeben durch:

$$D - D^0 = \tfrac{1}{2} D^0 \{x_x + y_y + z_z\} = -\tfrac{1}{4} p \cdot D^0 \{s_{11} + 2s_{12} + s_{22} - s_{66}\}$$
$$= +p \cdot D^0 \cdot 0{,}598 \cdot 10^{-6}.$$

Der Ansatz für die Polarisationskonstanten (5) reduziert sich für diese Druckrichtung auf:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{11} + \pi_{12}}{2}\right\},$$
$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2}\right\},$$
$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2}\right\},$$
$$a_{23} = a_{31} = 0,$$
$$a_{12} = +p \cdot \frac{\pi_{66}}{2}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel K_2 erhält man aus dem Ovaloid für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der horizontal schwingenden Welle während der Belastung:

$$\omega_h^2 = a_{33},$$

vor der Belastung:

$$\omega_h^{02} = \omega_z^{02},$$

und für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der vertikal schwingenden Welle während der Belastung:

$$\omega_v^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - a_{12},$$

vor der Belastung:

$$\omega_v^{02} = \frac{\omega_x^{02} + \omega_y^{02}}{2}.$$

Es ergeben sich so für die in (2′) und (8′) auftretenden Größen $\omega_h^{02} - \omega_h^2$ und $\omega_v^{02} - \omega_v^2$ die Werte:

$$\omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_z^{02} - a_{33} = p\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2}\right\},$$

$$\omega_v^{02} - \omega_v^2 = \tfrac{1}{2}\{\omega_x^{02} + \omega_y^{02} - a_{11} - a_{22} + 2a_{12}\}$$
$$= \frac{p}{4}\{\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22} + 2\pi_{66}\}.$$

Der durch Druck erzeugte Gangunterschied in Wellenlängen wird demnach:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}\bar{\Delta}'_{hv} = \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{&\left[\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2v^2}\right] \cdot n_z^{03} - \frac{1}{4}\left[\frac{\pi_{11}}{v^2} + \frac{\pi_{22}}{v^2} + \frac{\pi_{12}}{v^2}\right.\\ &\left. + \frac{\pi_{21}}{v^2} + \frac{2\pi_{66}}{v^2}\right] n_m^{03}\Bigg\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - n_m^0}{\lambda}\right].\end{aligned}\right.$$

Hierin ist:

$$n_m^0 = \frac{n_z^0 + n_y^0}{2}.$$

Nimmt man für die Brechungsindizes n_m^0 und n_y^0 einen gemeinsamen Mittelwert n_m' an, so gilt in genügender Annäherung bei Vernachlässigung der Dickenänderung:

$$(28')\quad \bar{\Delta}'_{hv} = \frac{1}{2\lambda}\frac{n_m'^3}{2}\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{v^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi_{11}}{v^2} + \frac{\pi_{12}}{v^2} + \frac{\pi_{21}}{v^2} + \frac{\pi_{22}}{v^2} + \frac{2\pi_{66}}{v^2}\right]\right\}$$

und da mit derselben Annäherung:

$$\frac{\pi_{31} - \pi_{11}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m'^3} \cdot \bar{\Delta}_{xz},$$

$$\frac{\pi_{32} - \pi_{22}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m'^3} \cdot \bar{\Delta}_{yz} \quad \text{usw.},$$

so wird:

$$(28'')\quad \frac{\pi_{66}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m'^3}\left\{\bar{\Delta}_{xz} + \bar{\Delta}_{yz} - \frac{1}{2}(\bar{\Delta}_{yz} + \bar{\Delta}_{xy}) - 2\bar{\Delta}_{hv}\right\}.$$

Für n_m' kann ein mittlerer Brechungsindex, etwa n_y^0 gesetzt werden. Rechts stehen lauter durch die Beobachtung gefundene Größen; π_{66}/v^2 kann demnach allein durch Kompensatormessungen erhalten werden.

Die Anwendung der Formel (8′) ergibt für die absoluten Verzögerungen Folgendes:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}\delta_h' &= \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2v^2}\right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right],\\ \delta_v' &= \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{4}\left\{\frac{\pi_{11}}{v^2} + \frac{\pi_{12}}{v^2} + \frac{\pi_{21}}{v^2} + \frac{\pi_{22}}{v^2} + \frac{2\pi_{66}}{v^2}\right\} n_m^{03}\\ &\qquad + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda}\right].\end{aligned}\right.$$

Prisma 5. Hier wirkt der Druck in der Y^0-Z^0-Ebene. Die Druckrichtung ist unter einem Winkel von -45^0 gegen die Y^0-Achse geneigt. Alsdann ergibt sich aus (7):

$$X_x = 0; \quad Y_y = Z_z = +\frac{p}{2}; \quad Y_z = -\frac{p}{2}; \quad Z_x = X_y = 0$$

und die Deformationsgrößen (6) reduzieren sich auf:

$$x_x = -\frac{p}{2}\{s_{12} + s_{13}\},$$

$$y_y = -\frac{p}{2}\{s_{22} + s_{23}\},$$

$$z_z = -\frac{p}{2}\{s_{23} + s_{33}\},$$

$$y_z = +\frac{p}{2} s_{44},$$

$$z_y = x_y = 0.$$

In der zur Druckrichtung senkrechten Beobachtungsrichtung parallel K_3 berechnet sich die Dickenänderung des Präparates aus der Größe des Druckes p und den Deformationsgrößen nach (8) folgendermaßen:

$$D - D^0 = D^0 \cdot \tfrac{1}{2}\{y_y + z_z + y_z\} = -D^0 \cdot p \cdot \tfrac{1}{4}\{s_{22} + 2s_{23} + s_{33} - s_{44}\}$$
$$= +D^0 \cdot p \cdot 0{,}783 \cdot 10^{-6}.$$

Die Gleichungen (5) werden für diese Druckrichtungen zu:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{12} + \pi_{13}}{2}\right\},$$

$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{22} + \pi_{23}}{2}\right\},$$

$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{23} + \pi_{33}}{2}\right\},$$

$$\rho_{23} = +p\frac{\pi_{44}}{2},$$

$$a_{31} = a_{12} = 0.$$

Analog wie bei Prisma 4 berechnen sich aus dem Ovaloid für die Beobachtungsrichtung parallel K_3 die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten. Man erhält folgende Werte für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten vor der Belastung:

$$\omega_h^{02} = \omega_x^{02}; \qquad \omega_v^{02} = \frac{\omega_y^{02} + \omega_z^{02}}{2}$$

und für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten während der Belastung:

$$\omega_h^2 = a_{11}; \qquad \omega_v^2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - a_{23}.$$

ω_h ist die senkrecht zur Druckrichtung schwingende Welle und ω_v die parallel zur Druckrichtung schwingende. Die ganze Rechnung kommt auf eine zyklische Vertauschung der Indizes heraus. Der für die Richtung K_3 in Betracht kommende Gangunterschied ist gegeben durch:

$$(30)\quad \left\{ \overline{\Delta_{hv}''} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\left[\frac{\pi_{12}+\pi_{13}}{2\,p^0}\right] n_m^{03} - \frac{1}{4}\left[\frac{\pi_{22}+\pi_{23}+\pi_{32}+\pi_{33}+2\pi_{44}}{p^0}\right] n_m^{03}\right\} + \frac{D-D^0}{p\cdot D^0}\cdot\left[\frac{n_v^0 - n_m^0}{\lambda}\right].\right.$$

Hierin ist

$$n_m^0 = \frac{n_y^0 + n_z^0}{2}$$

zu setzen.

Ferner ergibt sich entsprechend der Formel (28″):

$$(30')\quad \frac{\pi_{44}}{p^0} = \frac{2\lambda}{n_m'^3}\left\{\bar{\Delta}_{xy} + \bar{\Delta}_{xz} - \tfrac{1}{2}(\bar{\Delta}_{xy} + \bar{\Delta}_{yz}) - 2\,\overline{\Delta_{hv}''}\right\},$$

worin $n_m' = n_y^0$ gesetzt werden darf.

Für die absoluten Verzögerungen erhält man die Werte:

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\delta_h''} &= \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}+\pi_{13}}{2\,p^0}\right\}\cdot n_m^{03} + \frac{D-D^0}{p\cdot D^0}\left[\frac{n_v^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \overline{\delta_v''} &= \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\pi_{22}+\pi_{23}+\pi_{32}+\pi_{33}+2\pi_{44}}{p^0}\right]\right\} n_m^{03} \\ &\qquad + \frac{D-D^0}{p\cdot D^0}\left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{aligned}\right.$$

Prisma 6. Die Druckrichtung ist in der X^0-Z^0-Ebene unter einem Winkel von -45^0 gegen die X^0-Achse geneigt. Es wird daher:

$$X_x = +\frac{p}{2};\quad Y_y = 0;\qquad Z_z = +\frac{p}{2};$$

$$Y_z = 0;\qquad Z_x = -\frac{p}{2};\quad X_y = 0$$

und nach (6):

$$x_x = -\frac{p}{2}\{s_{11} + s_{13}\},$$

$$y_y = -\frac{p}{2}\{s_{12} + s_{23}\},$$

$$z_z = -\frac{p}{2}\{s_{13} + s_{33}\},$$

$$y_z = x_y = 0,$$

$$z_x = +\frac{p}{2}\cdot s_{55}.$$

Für die Dickenänderung in der Beobachtungsrichtung parallel K_3 senkrecht zur Druckrichtung berechnet sich nach (8):

$$D - D^0 = D^0 \cdot \tfrac{1}{2}\{x_x + z_z + z_x\} = -D^0 \cdot p \cdot \tfrac{1}{2}\{s_{11} + 2s_{12} + s_{33} - s_{55}\}$$
$$= D^0 \cdot p \cdot 0{,}240 \cdot 10^{-8}.$$

Das System der Polarisationskonstanten reduziert sich auf:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{11} + \pi_{12}}{2}\right\},$$

$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2}\right\},$$

$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2}\right\},$$

$$a_{23} = a_{12} = 0; \quad a_{31} = +p\frac{\pi_{55}}{2^2}.$$

Die in der Beobachtungsrichtung parallel K_3 liegenden Wellengeschwindigkeiten ω_h und ω_v werden wieder aus dem Ovaloid bestimmt. Für die absolute Verzögerung der horizontal schwingenden Welle erhält man alsdann:

$$(31) \qquad \overline{\delta_h'''} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\left[\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2\,2^2}\right]\right\} n_y^{02} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right]$$

und für die vertikal schwingende Welle:

$$\overline{\delta_v'''} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\pi_{21} + \pi_{23} + \pi_{11} + \pi_{13} + 2\pi_{55}}{2^2}\right]\right\} n_m^{02} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda}\right].$$

Für n_m^0 kann hier

$$\frac{n_x^0 + n_z^0}{2}$$

gesetzt werden. Die Formel für die relative Verzögerung ist deshalb hier nicht mit angegeben, weil in dieser Beobachtungsrichtung keine Kompensatormessungen ausgeführt werden konnten.

d) Resultate der Beobachtungen.

Im folgenden werden die an den verschiedenen Topaspräparaten erhaltenen Werte der relativen und der absoluten Verzögerungen angegeben, und zwar sämtlich für $\lambda = 588\,\mu\mu$. Um die Inhomogenität der Druckverteilung zu eliminieren, sind die Messungen je an beiden Rändern und in der Mitte des Präparates (L. Rd.; M.; R. Rd.) ausgeführt; das Mittel aus den Resultaten ist von der Inhomogenität im wesentlichen frei.

Prisma 1.

a) Beobachtungsrichtung $\| K_1 \| Y^0$.

1. Relative Verzögerung für $\lambda = 588\ \mu\mu$.

Belastung am Hebel (1 : 5)		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2742 g	1.	0,945	1,16	1,34	$1{,}148 = \Delta_1'$
4113	2.	1,545	1,765	1,815	1,708
	3.	1,65	1,71	1,79	1,717 } $1{,}709 = \Delta_2'$
	4.	1,505	1,72	1,88	1,702
6855	5.	2,615	2,91	3,012	$2{,}846 = \Delta_3'$

Hieraus berechnet sich nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\overline{\Delta_{xx}} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + 3\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_1^2 + 3Q_2^2 + Q_3^2} : \frac{3{,}692}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\overline{\Delta_{xx}} = 0{,}3157 \cdot 10^{-4}.$$

Rückwärts berechnet sich dann:

$$\Delta_1' = 1{,}140,$$
$$\Delta_2' = 1{,}709,$$
$$\Delta_3' = 2{,}849.$$

2. Absolute Verzögerungen.

X-Schwingung.

Belastung am Hebel (1 : 9,7)	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	− 0,022	− 0,021	− 0,018	$-0{,}020_3 = \delta_x$

Es ergibt sich demnach der Wert

$$\bar{\delta}_x = \frac{\delta_x \cdot 3{,}692}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\bar{\delta}_x = -0{,}0317 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	0,223	0,163	0,125	0,170
(3fach. Gew.)	2.	0,178	0,178	0,178	0,178
	3.	0,175	0,173	0,161	0,170
	4.	0,201	0,173	0,138	0,171
					$0{,}174 = \delta_z'$
2936 g	5.	0,271	0,215	0,152	$0{,}213 = \delta_z''$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man hier:

$$\overline{\delta_z} = \frac{\delta_z' \cdot Q_1 + \delta_z'' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3{,}692}{9{,}7},$$

$$\underline{\delta_z = + 0{,}2744 \cdot 10^{-4}}.$$

Aus diesem Wert erhält man rückwärts die Werte:

$$\delta_z' = 0{,}1756$$
$$\delta_z'' = 0{,}212.$$

b) Beobachtungsrichtung $\| K_z \| Z^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
1371 g	1.	0,318	0,643	0,954	0,638	
	2.	0,359	0,772	0,894	0,675	0,653 = Δ_1'
	3.	0,466	0,695	0,748	0,648	
2742	4.	1,42	1,36	1,13	1,303	
	5.	1,125	1,345	1,445	1,305	1,301 = Δ_2'
	6.	1,14	1,325	1,42	1,295	
7083	7.	3,24	3,375	3,465	3,360	
	8.	3,47	3,375	3,215	3,353	3,357 = Δ_3'

Wegen zu ungleichförmiger Druckverteilung sollen die Messungen 1—8 zur weiteren Verrechnung nicht benutzt werden; ihr Mittelwert Δ_1' stimmt indessen mit den anderen Messungen ganz gut überein.

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt hier:

$$\overline{\Delta_{yz}} = \frac{\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3{,}710}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta_{yz}} = 0{,}3619 \cdot 10^{-4}}.$$

Rückwärts wird aus Δ_{yz} berechnet:

$$\Delta_1' = 0{,}650,$$
$$\Delta_2' = 1{,}300,$$
$$\Delta_3' = 3{,}358.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,167	0,178	0,185	0,177	$\delta_y = 0{,}176$
	2.	0,185	0,167	0,169	0,174	

Es folgt hieraus:

$$\delta_y = \frac{0{,}176 \cdot 8{,}710}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_y = + 0{,}2763 \cdot 10^{-4}}.$$

X-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	− 0,054	− 0,050	− 0,064	− 0,056	$\delta_x = - 0{,}056$
	2.	− 0,063	− 0,054	− 0,052	− 0,056	

folglich wird:

$$\delta_x = - \frac{0{,}056 \cdot 8{,}710}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_x = - 0{,}0879 \cdot 10^{-4}}.$$

Prisma 2.

a) Beobachtungsrichtung $\| K_1 \| Z^c$.

Schon die Beobachtung im natürlichen Lichte zeigte einen schichtförmigen Aufbau des Präparates, der einem Fortwachsen des ursprünglichen Kristalles am Entstehungsorte durch schichtförmiges Ansetzen der Prismenflächen entsprach. Die Beobachtung parallel der Z^c-Achse wurde dadurch erschwert; die Streifen im Kompensator waren teilweise recht undeutlich. Die Messung der absoluten Verzögerung konnte nicht ausgeführt werden.

Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
(4471 g	1.	1,805	2,08	1,88	1,922 = Δ_1')	
2956	2.	1,265	1,295	1,235	1,265	1,253 = Δ_2'
	3.	1,255	1,27	1,19	1,238	
	4.	1,335	1,27	1,851	1,257	
7083	5.	2,745	3,155	3,15	3,017	3,013 = Δ_3'
	6.	3,07	3,065	2,89	3,008	
	7.	2,985	3,10	2,96	3,015	

Δ_1' wird zur Berechnung von $\overline{\Delta}_{xy}$ nicht benutzt. Aus Δ_2' und Δ_3' folgt nach der Ausgleichungsrechnung:

$$\overline{\Delta}_{xy} = \frac{\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3{,}692}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\overline{\Delta}_{xy} = \delta_x - \delta_y = + 0{,}3230 \cdot 10^{-4}.$$

Daraus wird rückwärts:

$$(\Delta_1' = 1{,}901),$$
$$\Delta_2' = 1{,}257,$$
$$\Delta_3' = 3{,}011.$$

b) Beobachtungsrichtung $\| K_3 \| X^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2956 g	1.	1,06	1,12	1,155	1,112	1,111 = Δ_1'
	2.	1,205	1,155	0,985	1,115	
	3.	0,955	1,10	1,26	1,105	
7083	4.	2,475	2,715	2,92	2,703	2,701 = Δ_2'
	5.	2,905	2,77	2,44	2,705	
	6.	2,605	2,76	2,72	2,695	

Es ist demnach:

$$\overline{\Delta}_{xy} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + \Delta_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3{,}708}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\overline{\Delta}_{xy} = \delta_x - \delta_y = 0{,}2903 \cdot 10^{-4}$$

und daraus ergibt sich wieder:

$$\Delta_1' = 1{,}125,$$
$$\Delta_2' = 2{,}695.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,158	0,125	0,143	0,142	
	2.	0,141	0,145	0,142	0,143	
	3.	0,150	0,141	0,132	0,141	$0{,}142 = \delta_z$
	4.	0,156	0,142	0,132	0,143	

Daraus berechnet sich:

$$\delta_z = \frac{0{,}142 \cdot 3{,}708}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_z = +\,0{,}2228 \cdot 10^{-4}.}$$

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	2.	− 0,041	− 0,042	− 0,040	− 0,041	$-0{,}0435 = \delta_y$
	4.	− 0,043	− 0,047	− 0,047	− 0,046	

Folglich:

$$\underline{\delta_y = -\,0{,}068_3 \cdot 10^{-4}.}$$

Prisma 3.

a) Beobachtungsrichtung $\| K_1 \| X^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
4471 g	1.	1,40	1,50	1,515	$1{,}471 = \Delta_1'$	
7083	2.	2,265	2,36	2,36	2,328	
	3.	2,27	2,37	2,375	2,338	$2{,}333 = \Delta_2'$
	4.	2,19	2,36	2,445	2,333	

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$\overline{\Delta_{y_2}} = \frac{\Delta_1 \cdot Q_1 + 3\,\Delta_2 \cdot Q_2}{Q_1^2 + 3\,Q_2^2} \cdot \frac{3{,}709}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta_{y_2}} = +\,0{,}2507 \cdot 10^{-4}.}$$

Rückwärts berechnet sich:

$$\Delta_1' = 1{,}469.$$
$$\Delta_2' = 2{,}826.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,126	0,123	0,092	0,114	$\delta_y' = 0{,}111$
	2.	0,153	0,121	0,079	0,118	
	3.	0,127	0,115	0,120	0,121	
	4.	0,117	0,109	0,092	0,106	
	5.	0,121	0,100	0,081	0,101	
	6.	0,098	0,107	0,116	0,107	
3936	7.	0,178	0,163	0,178	0,173	$= \delta_y''$

Es berechnet sich, wiederum nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\delta_y = +0{,}1724 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
3936 g	1.	− 0,078	− 0,081	− 0,079	− 0,079	$\delta_z = -0{,}0795$
	2.	− 0,080	− 0,081	− 0,078	− 0,080	

Es wird demnach:

$$\delta_z = +\frac{\delta_z \cdot 8{,}709}{3936 \cdot 9{,}7},$$
$$\delta_z = -0{,}0772 \cdot 10^{-4}.$$

b) Beobachtungsrichtung $\| K_2 \| Y^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
4471 g	1.	1,23	1,43	1,565	1,409	$\Delta' = 1{,}407$
	2.	1,395	1,50	1,335	1,410	
	3.	1,39	1,415	1,42	1,408	
	4.	1,345	1,425	1,42	1,397	
	5.	1,39	1,44	1,405	1,412	

Es wird:

$$\overline{\Delta}_{c_1} = \frac{1{,}407 \cdot 3{,}702}{4471 \cdot 5 \cdot 0{,}72},$$

$$\overline{\Delta}_{xz} = \delta_x - \delta_z = + 0{,}2396 \cdot 10^{-4}.$$

2. Absolute Verzögerungen.

X-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	1.	0,112	0,129	0,218	0,153
	2.	0,158	0,167	0,134	0,153 $\}$ $\delta_x = 0{,}154$
	3.	0,157	0,157	0,152	0,155

Aus δ_x berechnet sich:

$$\delta_x = \frac{0{,}154 \cdot 3{,}702}{3936 \cdot 9{,}7},$$

$$\delta_x = + 0{,}1493 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	− 0,091	− 0,090	− 0,078	$- 0{,}086 = \delta_z$

Hiernach wird:

$$\delta_z = \frac{- 0{,}086 \cdot 3{,}702}{3936 \cdot 9{,}7},$$

$$\delta_z = - 0{,}0834 \cdot 10^{-4}.$$

Prisma 4.

Beobachtungsrichtung K_2.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3471 g	1.	1,255	1,275	1,125	$1{,}218 = \Delta_1'$
4471	2.	1,585	1,56	1,503	1,550 $\}$ $1{,}546 = \Delta_2'$
	3.	1,415	1,57	1,64	1,542

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt hier:

$$\overline{\Delta_{hv}'} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + \Delta_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3{,}689}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta_{hv}'} = \overline{\delta_h'} - \overline{\delta_v'} = +\,0{,}2639 \cdot 10^{-4}.}$$

Rückwärts erhält man:

$$\Delta_1' = 1{,}207$$
$$\Delta_2' = 1{,}555.$$

2. Absolute Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,117	0,115	0,116	0,116	$\delta_h' = 0{,}116$
	2.	0,124	0,113	0,114	0,117	

Daraus wird:

$$\overline{\delta_h'} = \frac{0{,}116 \cdot 3{,}689}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_h'} = +\,0{,}1811 \cdot 10^{-4}.}$$

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	− 0,058	− 0,052	− 0,048	− 0,053	$\delta_v' = -\,0{,}045$
	2.	− 0,042	− 0,039	− 0,031	− 0,037	

Daraus folgt:

$$\overline{\delta_v'} = -\frac{0{,}045 \cdot 3{,}689}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_v'} = -\,0{,}044 \cdot 10^{-4}.}$$

Dieser Wert ist sehr unsicher. Aus $\overline{\delta_h'}$ und $\overline{\Delta_{hv}'}$ würde folgen:

$$\underline{\overline{\delta_v'} = -\,0{,}083 \cdot 10^{-4}.}$$

Prisma 5.

Beobachtungsrichtung $\| K_2$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
4471 g	1.	1,60	1,77	1,91	1,760	$\Delta_{hv}'' = 1{,}739$
	2.	1,705	1,74	1,74	1,728	
	3.	1,555	1,74	1,89	1,728	

Demnach wird:

$$\overline{\Delta_{bv}''} = \frac{1{,}789 \cdot 3{,}698}{4471 \cdot 5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta_{bv}''} = +\,0{,}2960 \cdot 10^{-4}.}$$

2. Absolute Verzögerungen.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,108	0,109	0,112	0,110	$\delta_b'' = +\,0{,}115$
	2.	0,126	0,120	0,114	0,120	

Aus δ_b'' berechnet sich:

$$\overline{\delta_b''} = \frac{0{,}115 \cdot 3{,}698}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_b''} = +\,0{,}1800 \cdot 10^{-4}.}$$

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	− 0,064	− 0,064	− 0,072	$-\,0{,}067 = \delta_v''$

Es wird demnach:

$$\overline{\delta_v''} = -\,\frac{0{,}067 \cdot 3{,}698}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_v''} = -\,0{,}105 \cdot 10^{-4}.}$$

Prisma 6.

An diesem Prisma wurden in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 nur Messungen der absoluten Verzögerungen vorgenommen, da die der relativen Verzögerungen infolge zu undeutlicher Streifen im Kompensator zu unsicher waren.

Absolute Verzögerungen.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,110	0,113	0,107	0,110	$\delta_b''' = +\,0{,}112$
	2.	0,112	0,121	0,110	0,114	

Daraus folgt:

$$\overline{\delta_h'''} = \frac{0{,}113 \cdot 8{,}692}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_h'''} = +\,0{,}1750 \cdot 10^{-4}.}$$

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	− 0,027	− 0,032	− 0,033	− 0,031	$\delta_v''' = -0{,}031$
	2.	− 0,028	− 0,031	− 0,034	− 0,031	

Es folgt:

$$\overline{\delta_v'''} = -\frac{0{,}031 \cdot 8{,}692}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_v'''} = -\,0{,}0484 \cdot 10^{-4}.}$$

e) Berechnung der Konstanten und Prüfung der Theorie bzw. der Messungen.

Setzt man in die Formeln (16—31) die aus den Beobachtungen gewonnenen Resultate ein, so erhält man die piëzooptischen Konstanten oder Kombinationen derselben. Wird jeder Beobachtung ein ihrer Zuverlässigkeit entsprechendes Gewicht erteilt, so berechnen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate für die piëzooptischen Konstanten π_{ik} des Topases folgende Werte:

$$\pi_{11} = -\,0{,}504 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{12} = +\,0{,}320 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{13} = +\,0{,}222 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{21} = +\,0{,}511 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{22} = -\,0{,}588 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{23} = +\,0{,}246 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{31} = +\,0{,}369 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{32} = +\,0{,}218 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{33} = -\,0{,}447 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{44} = -\,0{,}836 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{55} = -\,0{,}229 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{66} = -\,0{,}736 \cdot 10^{-8} \cdot v^2.$$

Die Beziehungen (10) ergeben dann für die elastooptischen Konstanten des Topases folgendes Wertsystem:

$$p_{11} = -\,0{,}085 \cdot v^2; \quad p_{21} = +\,0{,}093 \cdot v^2; \quad p_{31} = +\,0{,}095 \cdot v^2;$$
$$p_{12} = +\,0{,}069 \cdot v^2; \quad p_{22} = -\,0{,}120 \cdot v^2; \quad p_{32} = +\,0{,}085 \cdot v^2;$$
$$p_{13} = +\,0{,}052 \cdot v^2; \quad p_{23} = +\,0{,}065 \cdot v^2; \quad p_{33} = -\,0{,}088 \cdot v^2;$$
$$p_{44} = -\,0{,}095 \cdot v^2; \quad p_{55} = -\,0{,}031 \cdot v^2; \quad p_{66} = -\,0{,}098 \cdot v^2.$$

Aus den so gefundenen Werten der piëzooptischen Konstanten kann man umgekehrt mit Hilfe der Gleichungen (16 bis 31) die relativen und absoluten Verzögerungen in den speziellen Fällen der Beobachtung berechnen. Die auf diese Weise gefundenen Werte werden in der nachstehenden Tabelle angegeben, wobei neben jeder berechneten Größe zugleich die beobachtete Größe gestellt wird.

Relative u. absolut. Verzög.	Berechnet	Beobachtet	Relative u. absolut. Verzög.	Berechnet	Beobachtet
$\overline{\Delta_{xx}}$	$+0{,}316 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}316 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_z}$	$-0{,}073 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}077 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_x}$	$-0{,}039 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}032 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{xz}}$	$+0{,}240 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}240 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_z}$	$+0{,}277 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}274 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_x}$	$+0{,}147 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}149 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{yz}}$	$+0{,}363 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}362 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_y}$	$-0{,}093 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}083 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$+0{,}271 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}276 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{hv}'}$	$+0{,}262 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}264 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_x}$	$-0{,}093 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}088 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_h'}$	$+0{,}170 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}181 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{xy}}$	$+0{,}323 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}323 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_v'}$	$-0{,}002 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}044 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{xv}}$	$+0{,}291 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}290 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{hv}''}$	$+0{,}298 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}296 \cdot 10^{-}$
$\overline{\delta_z}$	$+0{,}222 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}223 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_h''}$	$+0{,}178 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}180 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$-0{,}068 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}068 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_v''}$	$-0{,}120 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}105 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{yz}}$	$+0{,}250 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}251 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_h'''}$	$+0{,}161 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}175 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_v}$	$+0{,}176 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}172 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_v'''}$	$-0{,}048 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}048 \cdot 10^{-4}$

In den meisten Fällen liegt die Differenz zwischen der berechneten und der beobachteten Größe noch innerhalb der Fehlergrenze der optischen Beobachtungsmethoden. Infolge der negativen Vorzeichen der π_{kk} waren die beobachteten absoluten Verzögerungen außerordentlich klein, so daß die Genauigkeit der π_{kk} nur einige Prozent betragen kann. Immerhin ist eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Ansatz von Pockels erzielt worden. Die Genauigkeit der p_{kk} ist übrigens infolge der Art ihrer Berechnung aus den π_{kk} eine entsprechend geringe.

Ebenso wie bei den bisher untersuchten Kristallen besteht auch bei Topas eine Beziehung $\pi_{kk} = \pi_{zz}$ oder $p_{kk} = p_{zz}$ nicht.

Das negative Vorzeichen sämtlicher π_{kk} sowie p_{kk} verleiht dem piëzooptischen Verhalten des Topases ein eigenartiges

Gepräge, wie ja schon unter den vorliegenden Beobachtungen in jeder Beobachtungsrichtung negative Verzögerungen, d. h. Beschleunigungen, gemessen wurden. In einigen speziellen Fällen soll die Einwirkung dieses Vorzeichens noch näher ausgeführt werden.

Die Größenordnung der Konstanten ist durchweg dieselbe.

f) Anwendung der gefundenen Resultate auf spezielle Fälle.

Zunächst soll das *piëzooptische Verhalten des Topases für den Fall allseitig gleichen Druckes* diskutiert werden. Hierbei wird

$$p = X_x = Y_y = Z_z; \quad Y_z = Z_x = X_y = 0$$

und die Gleichungen der Polarisationskonstanten ergeben:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -p\{\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13}\},$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -p\{\pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23}\},$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -p\{\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{33}\}$$

oder nach Einsetzen der Zahlwerte für die π_{ik}

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -0{,}088 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -0{,}174 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -0{,}140 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.$$

Durch allseitig gleichen Druck erleiden demnach sämtliche Hauptlichtgeschwindigkeiten geringe Verzögerungen, oder was dasselbe ist: Die Hauptbrechungsindizes werden bei allseitig gleichem Druck zunehmen, durch allseitig gleichen Zug abnehmen. Die Änderung der Doppelbrechung durch allseitig gleichen Druck ergibt sich aus:

$$\omega_x^2 - \omega_z^2 - (\omega_x^{02} - \omega_z^{02}) = -p(\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} - \pi_{31} - \pi_{32} - \pi_{33})$$
$$= +0{,}102 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.$$

Man erhält eine geringe Zunahme derselben:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = +\frac{n_m^3}{2} \cdot 0{,}102 \cdot 10^{-8} \cdot p = +0{,}215 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Größe des halben Winkels der optischen Achsen wird dargestellt durch:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_z^2 - \omega_x^2}}.$$

Da nun für Topas gilt

$$\omega_x^2 - \omega_y^2 = \omega_x^{02} - \omega_y^{02} + 0{,}186 \cdot 10^{-6} \cdot v^2 \cdot p,$$
$$\omega_x^2 - \omega_z^2 = \omega_x^{02} - \omega_z^{02} + 0{,}102 \cdot 10^{-6} \cdot v^2 \cdot p,$$

so wird durch allseitig gleichen Druck der Winkel Ω vergrößert.

Eine weitere Anwendung der erhaltenen Resultate läßt sich auf *die Änderung der Brechungsindizes des Topases durch Erwärmung* machen. Nach Offret[1]) wird die Änderung der Brechungsindizes des Topases durch Temperaturerhöhung um 1°:

$$\frac{dn_x}{dt} = +0{,}81 \cdot 10^{-5}, \qquad \frac{dn_y}{dt} = +0{,}90 \cdot 10^{-5},$$
$$\frac{dn_z}{dt} = +0{,}80 \cdot 10^{-5}.$$

Da bei Temperaturerhöhung der Topas eine allseitige Dilatation erfährt, diese Dilatation aber allein gemäß dem piëzooptischen Verhalten des Topases eine Abnahme der Brechungsindizes hervorruft, vorstehende Werte aber eine Zunahme derselben angeben, so folgt hieraus, daß dieser Unterschied durch einen reinen Temperatureinfluß auf das optische Verhalten des Topases, der den piëzooptischen Veränderungen entgegenwirkt und dieselben überkompensiert, hervorgerufen wird.

Bei gleichförmiger Erwärmung um 1° C. ist nach Fizeau zu setzen:

$$x_x = +4{,}84 \cdot 10^{-6} = a_1,$$
$$y_y = +4{,}14 \cdot 10^{-6} = a_2,$$
$$z_z = +5{,}92 \cdot 10^{-6} = a_3.$$

Die Änderung des optischen Verhaltens allein durch diese thermische Dilatation würde gegeben sein durch:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = p_{11} \cdot a_1 + p_{12} \cdot a_2 + p_{13} \cdot a_3,$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = p_{21} \cdot a_1 + p_{22} \cdot a_2 + p_{23} \cdot a_3,$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = p_{31} \cdot a_1 + p_{32} \cdot a_2 + p_{33} \cdot a_3,$$

oder nach Einsetzung der Zahlwerte durch:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = +0{,}182 \cdot 10^{-6} \cdot v^2,$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = +0{,}338 \cdot 10^{-6} \cdot v^2,$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = +0{,}320 \cdot 10^{-6} \cdot v^2.$$

1) A. Offret, Bull. soc. franç. min. 13. 1890.

Die Änderung der Brechungsindizes wird demnach:

$$\left(\frac{dn_x}{dt}\right) = -0{,}381 \cdot 10^{-6}; \quad \left(\frac{dn_y}{dt}\right) = -0{,}713 \cdot 10^{-6};$$

$$\left(\frac{dn_z}{dt}\right) = -0{,}684 \cdot 10^{-6}.$$

Aus diesen Werten berechnet sich in Verbindung mit den von Offret erhaltenen für den reinen Temperatureinfluß folgendes:

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} = +0{,}85 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\partial n_y}{\partial t} = +0{,}97 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\partial n_z}{\partial t} = +0{,}87 \cdot 10^{-5}.$$

Der reine Temperatureinfluß überwiegt also sehr stark den der thermischen Dilatation, so daß die letztere in ihrem Einfluß auf die Änderung der Brechungsindizes nur in einer kleinen Verminderung der Wirkung zur Geltung kommt.

Bei Erwärmung des Topases erhält man allein durch die Dilatation eine Abnahme der Doppelbrechung:

$$\left(\frac{d(n_y - n_z)}{dt}\right) = -0{,}303 \cdot 10^{-6},$$

durch reinen Temperatureinfluß eine Zunahme derselben:

$$\frac{\partial (n_y - n_z)}{\partial t} = +0{,}2 \cdot 10^{-6},$$

nach der Beobachtung von Offret dagegen eine Abnahme der Doppelbrechung; also überwiegt auch in Hinblick auf die Änderung der Doppelbrechung die thermische Dilatation.

Im folgenden soll *die Einwirkung einseitigen Druckes* auf die Änderung des optischen Verhaltens des Topases des Näheren diskutiert werden. Der Druck wirke z. B. in der X^0-Y^0-Ebene. Die Richtung des Druckes sei unter einem Winkel φ gegen die X^0-Achse geneigt. Alsdann erhält man für die Polarisationskonstanten folgende Ausdrücke:

$$a_{11} = \omega_x^{02} - \{\pi_{11} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{12} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{22} = \omega_y^{02} - \{\pi_{21} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{22} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{33} = \omega_z^{02} - \{\pi_{31} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{33} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{12} = -\frac{\pi_{66}}{2} \cdot \sin(2\varphi) \cdot p; \quad a_{23} = a_{31} = 0.$$

Wie diese Größen sich mit der Richtung des Druckes ändern, zeigt folgende Tabelle, in der dieselben für den ersten Quadranten der X^0-Y^0-Ebene für verschiedene Druckrichtungen berechnet sind.

φ	$\frac{a_{11} - \omega_x^{0\,2}}{p \cdot v^2}$	$\frac{a_{22} - \omega_y^{0\,2}}{p \cdot v^2}$	$\frac{a_{33} - \omega_z^{0\,2}}{p \cdot v^2}$	$\frac{a_{12}}{p \cdot v^2}$
0°	$+ 0{,}504 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}511 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}369 \cdot 10^{-8}$	0
10°	$+ 0{,}479 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}478 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}365 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}126 \cdot 10^{-8}$
20°	$+ 0{,}408 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}383 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}351 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}237 \cdot 10^{-8}$
30°	$+ 0{,}298 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}238 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}330 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}320 \cdot 10^{-8}$
40°	$+ 0{,}164 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}059 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}307 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}362 \cdot 10^{-8}$
45°	$+ 0{,}092 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}036 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}294 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}369 \cdot 10^{-8}$
50°	$+ 0{,}020 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}131 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}280 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}362 \cdot 10^{-8}$
60°	$- 0{,}114 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}310 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}256 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}320 \cdot 10^{-8}$
70°	$- 0{,}224 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}455 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}236 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}237 \cdot 10^{-8}$
80°	$- 0{,}295 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}550 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}223 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}126 \cdot 10^{-8}$
90°	$- 0{,}320 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}583 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}218 \cdot 10^{-8}$	0

Es genügt die Angabe für den ersten Quadranten, weil infolge der Symmetrie des Kristalles im dritten Quadranten die Werte sich in derselben Reihenfolge, im zweiten und vierten Quadranten in umgekehrter Reihenfolge wiederholen.

Die Änderungen der Hauptlichtgeschwindigkeiten lassen sich nun aus den Polarisationskonstanten berechnen. Es kann hier mit genügender Annäherung $a_{11} = \omega_x^2$, $a_{22} = \omega_y^2$ gesetzt werden; denn die Drehung des Achsensystems um die Z^0-Achse ist eine außerordentlich geringe. Ferner wird $a_{33} = \omega_z^2$.

Es lassen sich leicht folgende Resultate übersehen: Für $\varphi = 0^0$ wird $\omega_x^2 - \omega_x^{0\,2}$ positiv:

$$\frac{\omega_x^2 - \omega_x^{0\,2}}{p^2} = 0{,}504 \cdot 10^{-8} \cdot p,$$

oder:

$$n_x - n_x^0 = -\frac{n_x^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}504 \cdot 10^{-8} \cdot p = -1{,}056 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Durch einseitigen Druck parallel der X^0-Achse wird also n_x kleiner, d. h. ω_x erfährt eine Beschleunigung. Bei wachsendem Winkel φ nimmt diese Beschleunigung ab. Sie wird schließlich bei einem Winkel von etwa $51\frac{1}{2}^0$ Null und geht dann zu

negativen Werten über, bis bei $\varphi = 90^0$ die größte Verzögerung erreicht ist. Hier wird:

$$\frac{\omega_x^2 - \omega_x^{0\,2}}{p^2} = -\,0{,}320 \cdot 10^{-8} \cdot p,$$

oder:

$$n_x - n_x^0 = +\,\frac{n_x^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}320 \cdot 10^{-8} \cdot p = +\,0{,}671 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Ein ähnliches Verhalten nur in umgekehrter Reihenfolge zeigt die Änderung von ω_y^0 bzw. n_y^0 bei Variation der Druckrichtung in der X^0-Y^0-Ebene.

Bei $\varphi = 0^0$ erleidet ω_y^0 eine Verzögerung, d. h. n_y^0 wird größer. Diese Verzögerung nimmt bei anwachsendem φ ab, wird bei einem Winkel von ungefähr $45^0 = 0$ und nimmt dann entgegengesetztes Vorzeichen an.

Für $\varphi = 0^0$ wird:

$$\frac{\omega_y^{0\,2} - \omega_y^2}{p^2} = \frac{\pi_{21}}{p^2} \cdot p,$$

oder:

$$n_y - n_y^0 = \frac{n_y^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}511 \cdot 10^{-8} \cdot p = +\,1{,}078 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Für $\varphi = 90^0$ wird:

$$\frac{\omega_y^{0\,2} - \omega_y^2}{p^2} = \frac{\pi_{22}}{p^2} \cdot p,$$

oder:

$$n_y - n_y^0 = -\,\frac{n_y^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}583 \cdot 10^{-8} \cdot p = -\,1{,}23 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Ferner wird für $\varphi = 0^0$, also für einseitigen Druck parallel der X^0-Achse, die Doppelbrechung:

$$n_y - n_z - (n_y^0 - n_z^0) = -\,\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{21}}{p^2}\right) \cdot p = +\,2{,}16 \cdot 10^{-8} \cdot p$$

und

$$n_s - n_z - (n_s^0 - n_z^0) = -\,\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{21}}{p^2}\right) \cdot p = +\,1{,}73 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

In dem Ausdruck für:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{n_y - n_z}{n_s - n_z}}$$

nimmt der Zähler um einen größeren Betrag zu als der Nenner, infolgedessen wird auch der Binormalenwinkel bei dieser Druckrichtung etwas größer.

Für einseitigen Druck parallel der Y^0-Achse, d. h. für $\varphi = 90^0$, erhält man dagegen:

$$n_y - n_z - (n_y^0 - n_z^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{13} - \pi_{23}}{c^2}\right) \cdot p = -1{,}905 \cdot 10^{-8} \cdot p$$

und

$$n_x - n_z - (n_x^0 - n_z^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{c^2}\right) \cdot p = -0{,}212 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Hier nimmt in dem Ausdruck für sin Ω der Zähler um einen größeren Betrag ab als der Nenner, d. h. bei dieser Druckrichtung wird der Binormalenwinkel etwas kleiner. Ferner sieht man, daß bei einem Winkel von etwa 47° die mechanisch erzeugte Doppelbrechung $n_y - n_z - (n_y^0 - n_z^0) = 0$ wird. Bei dieser Druckrichtung findet also keine Einwirkung auf den Binormalenwinkel statt.

Erwähnen will ich noch, daß bei einer Druckrichtung von 45° gegen die X^0-Achse und einer Beobachtungsrichtung parallel der Z^0-Achse, die Kompensatormessungen, die von $n_y - n_z - (n_y^0 - n_z^0)$ abhängen, sehr unsicher waren. Gerade zwischen 40° und 50° schwankt diese Doppelbrechung außerordentlich stark. An den oberen und unteren Rändern des Präparates, an denen sich selten eine genau definierte Druckrichtung herstellen läßt, teilten sich bei Belastung zuweilen die schwarzen Kompensatorstreifen gabelförmig, entsprechend dem verschiedenen Vorzeichen der Doppelbrechung bei Druckrichtungen zwischen 40° und 50°. An Stellen in der Mitte des Präparates, wo eine gleichmäßigere Druckverteilung vorhanden war, war die Verschiebung des schwarzen Kompensatorstreifens außerordentlich gering, so daß auf eine genaue Messung dieser Verschiebung verzichtet wurde.

Wirkt der Druck parallel der X^0-Achse, ist also $\varphi = 0^0$, so wird für die Doppelbrechung $n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0)$ folgender Ausdruck erhalten:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{31}}{c^2}\right) \cdot p = +1{,}73 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Doppelbrechung des Topases erfährt also bei einseitigem Druck parallel der X^0-Achse eine geringe Zunahme. Umgekehrt ist es wieder bei einseitigem Druck parallel der Y^0-Achse. Hier erhält man:

$$n_z - n_y - (n_z^0 - n_y^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{12} - \pi_{32}}{c^2}\right) \cdot p = -0{,}212 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Doppelbrechung des Topases erfährt bei einseitigem Druck parallel Y^0 eine geringe Abnahme.

Bei Druckrichtungen zwischen 0^0 und 90^0 nimmt die Doppelbrechung für wachsende φ ab, wird bei etwa $70^0 = 0$ und nimmt dann negative Werte an.

Dieses eigenartige Oszillieren der mechanisch erzeugten Lichtgeschwindigkeiten bei Variationen des Druckes hat seinen Grund in dem negativen Vorzeichen der π_{33}. Diese geben auch zu ganz ähnlichen Verhältnissen in der Y^0-Z^0- und Z^0-X^0-Ebene Veranlassung. Es werden dort dieselben Resultate erhalten, nur mit etwas anderen Zahlwerten.

Speziell für einseitigen Druck parallel der Z^0-Achse mag noch der Wert für die mechanisch erzeugte Doppelbrechung angeführt werden. Man erhält:

$$n_x - n_z - (n_x^0 - n_z^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{v^2}\right) \cdot p = -1{,}44 \cdot 10^{-8} \cdot p\,.$$

Sie nimmt bei dieser Druckrichtung etwas ab.

g) Über die Dispersion der mechanisch erzeugten Lichtgeschwindigkeiten.

Es wurden in einigen Richtungen noch Beobachtungen über die Abhängigkeit der durch Druck erzeugten Verzögerung von der Farbe gemacht. Dieselben wurden in folgender Weise ausgeführt. An einer Stelle des Präparates wurden nacheinander die Verschiebungen des Kompensatorstreifens bzw. des Interferenzstreifens des Refraktors mit den verschiedenen Wellenlängen

$$\lambda = 668\ \mu\mu,\ 588\ \mu\mu,\ 502\ \mu\mu \text{ und } 447\ \mu\mu$$

gemessen. Zugleich wurde geprüft, ob die Druckverteilung an dieser Stelle während der Beobachtungsreihe dieselbe blieb. Da die Annahme der Proportionalität zwischen Druck und erzeugter Verzögerung zulässig ist, so hat man hiermit die Abhängigkeit zwischen den durch die verschiedenen Wellenlängen hervorgerufenen Verzögerungen gefunden. Die für $\lambda = 588\ \mu\mu$ gefundenen Werte sind schon genauer bestimmt worden. Auf diese lassen sich dann die für die anderen Wellenlängen reduzieren.

An Prisma 3 wurden in der Beobachtungsrichtung parallel X^0 folgende Kompensatormessungen erhalten:

λ	Δ'	Kontrolle	$\overline{\Delta_{yz}}$
668 $\mu\mu$	1,434	1,436	$0{,}2117 \cdot 10^{-4}$
588 $\mu\mu$	1,484	1,480 1,481	$0{,}2507 \cdot 10^{-4}$
502 $\mu\mu$	1,505	1,510	$0{,}3041 \cdot 10^{-4}$
447 $\mu\mu$	1,529		$0{,}3524 \cdot 10^{-4}$

Es läßt sich hieraus in genügender Annäherung nach der Formel:

$$2\lambda \cdot \overline{\Delta_{yz}} = \frac{\pi_{23} - \pi_{22}}{\rho^2} \cdot n_m^{\,0\,3}$$

unter Vernachlässigung der Dickenänderung die Differenz $\frac{\pi_{23} - \pi_{22}}{\rho^2}$ für die verschiedenen Wellenlängen berechnen. Man erhält:

λ	$\frac{\pi_{23} - \pi_{22}}{\rho^2}$
668 $\mu\mu$	$0{,}67 \cdot 10^{-6}$
588 $\mu\mu$	$0{,}69 \cdot 10^{-6}$
502 $\mu\mu$	$0{,}71 \cdot 10^{-6}$
447 $\mu\mu$	$0{,}73 \cdot 10^{-6}$

In der Beobachtungsrichtung parallel Y° wurden folgende Kompensatormessungen erhalten:

λ	Δ'	Kontrolle	$\overline{\Delta_{xz}}$
668 $\mu\mu$	1,898		$0{,}2090 \cdot 10^{-4}$
588 $\mu\mu$	1,901	1,901	$0{,}2396 \cdot 10^{-4}$
502 $\mu\mu$	1,905		$0{,}2860 \cdot 10^{-4}$
447 $\mu\mu$	1,912		$0{,}3290 \cdot 10^{-4}$

Hieraus berechnet sich $\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{\rho^2}$ für die verschiedenen Wellenlängen:

λ	$\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{\rho^2}$
668 $\mu\mu$	$0{,}665 \cdot 10^{-6}$
588 $\mu\mu$	$0{,}669 \cdot 10^{-6}$
502 $\mu\mu$	$0{,}675 \cdot 10^{-6}$
447 $\mu\mu$	$0{,}684 \cdot 10^{-6}$

Man findet aus diesen und ähnlichen hier nicht weiter angeführten Beobachtungen, daß die $\pi_{A\,B}$ mehr oder weniger

von der Wellenlänge abhängen. Es wird also auch bei elastischer Deformation des Topases immer eine geringe Änderung der natürlichen Dispersion eintreten.

Nachtrag.

Beobachtungen an Beryll.

Entsprechend der Symmetrie des hexagonalen Systems ist für die Polarisationskonstanten als Funktionen der Druckkomponenten $X_x \ldots Y_z \ldots$ zu setzen:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{11} X_x + \pi_{12} Y_y + \pi_{13} Z_z\},$$
$$a_{22} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{12} X_x + \pi_{11} Y_y + \pi_{13} Z_z\},$$
$$a_{33} - \omega_z^{02} = -\{\pi_{31} X_x + \pi_{31} Y_y + \pi_{33} Z_z\},$$
$$a_{44} = -\pi_{44} Y_z,\ a_{55} = -\pi_{44} Z_x,\ a_{66} = -(\pi_{11} - \pi_{12}) X_y,$$

oder als Funktionen der Deformationsgrößen $x_x \ldots y_z \ldots$:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = p_{11} x_x + p_{12} y_y + p_{13} z_z,$$
$$a_{22} - \omega_x^{02} = p_{12} x_x + p_{11} y_y + p_{13} z_z,$$
$$a_{33} - \omega_z^{02} = p_{31} x_x + p_{31} y_y + p_{33} z_z,$$
$$a_{44} = p_{44} y_z,\ a_{55} = p_{44} z_x,\ a_{66} = \tfrac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) x_y,$$

wobei als Z^0-Achse die sechszählige Symmetrieachse, die X^0- und Y^0-Achse in der zu letzterer senkrechten Ebene beliebig gewählt ist.

Die Beobachtungen der relativen und absoluten Verzögerungen an zwei würfelförmigen Präparaten, die aus einem brasilianischen Aquamarin hergestellt wurden, ergaben für die piëzooptischen Konstanten folgende Werte:

$$\pi_{11} = -0{,}349 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;\ \pi_{12} = +0{,}581 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{13} = +0{,}725 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{31} = +0{,}914 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;\ \pi_{33} = -0{,}418 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{44} = -2{,}28 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

und hieraus berechnet sich für die elastooptischen Konstanten:

$$p_{11} = +0{,}0099 \cdot v^2;\ p_{12} = +0{,}175 \cdot v^2;\ p_{13} = +0{,}191 \cdot v^2;$$
$$p_{31} = +0{,}313 \cdot v^2;\ p_{33} = +0{,}028 \cdot v^2;\ p_{44} = -0{,}152 \cdot v^2.$$

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Voigt, auch an dieser Stelle für die Anregung zu der Arbeit, sowie für sein mir stets bewiesenes Wohlwollen meinen allerherzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 21. Oktober 1919.)

3. *Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln;* von *Fritz Sigismund Schmidt.*

(Leipziger Dissertation.)

Die nachstehenden Untersuchungen wurden im Anschluß an eine Arbeit von Schiller und Döge[1]) im physikalischen Institut der Universität Leipzig im Winter 1912/13 begonnen und nach Unterbrechung durch den Krieg im ersten Vierteljahr 1919 abgeschlossen. Es sollte die Bewegung kugelförmiger nur unter dem Einfluß einer konstanten äußeren Kraft stehender Körper in Flüssigkeiten unter Erweiterung des Beobachtungsmateriales von Schiller und Döge untersucht und dabei das Hauptaugenmerk auf den beschleunigt verlaufenden Teil der Bewegung gelegt werden. Hrn. Dr. Schiller danke ich für seine wertvollen Ratschläge bei der Durchführung der Arbeit.

I. Versuchsanordnung.

a) Aufstieg von Ballonen in Luft.

Als Versuchskörper dienten in Luft steigende Pilotballone und in Wasser fallende beschwerte Wachskugeln. Zur Feststellung des Bewegungsverlaufes wurde im wesentlichen die von Schiller und Döge angegebene photographische Festlegung des Ortes der Körper in verschiedenen Zeitpunkten, die gleichen Abstand voneinander hatten, von der Ruhelage aus beginnend benutzt. Es gelangten zwei verschiedene Größen von Ballonen zur Verwendung. Die größeren waren Pilotballone der Continental-Caoutchouc und Guttapercha Compagnie in Hannover. Sie bestanden aus etwa 0,4 mm starker Gummiplatte, hatten gefüllt einen Radius zwischen 26,3 und 29,5 cm und wogen mit Zubinde- und Haltefäden und Haltering zwischen 61,58 und 67,67 g. Die kleineren aus schwächerem Gummi stammten von der Firma Katzenstein in

1) Physik. Zeitschr. 13. S. 234. 1912.

Leipzig. Ihr Radius schwankte zwischen 7,4 und 8,45 cm, ihr Gewicht einschließlich Ring und Fäden zwischen 1,62 und 1,67 g. Als Aufstiegsort diente der etwa 11 m hohe überdachte Lichthof des physikalischen Institutes. Die nächste Wand war von der Aufstiegsstelle über 5 m entfernt. Zur Füllung der Ballone wurde Wasserstoff (Flaschengas) benutzt.

Während des Aufstieges wurde der Ballon mit zwei photographischen Apparaten, deren optische Achsen etwa recht-

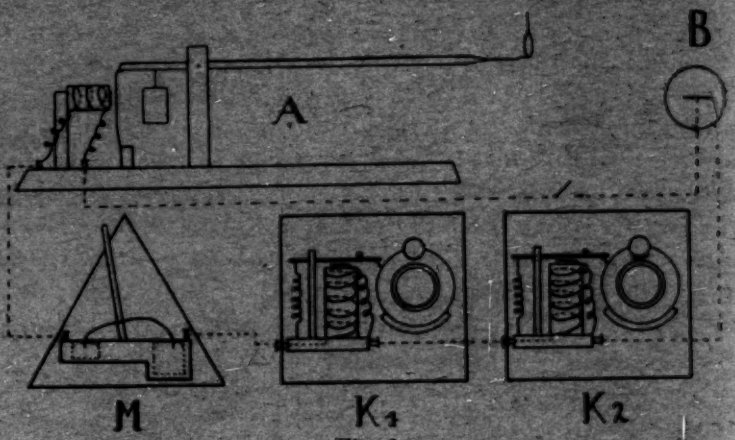


Fig. 1.

A Ablaßvorrichtung *K*$_1$ Kamera I *B* Batterie
M Metronom *M*$_2$ Kamera II

winklig zueinander standen, photographiert. Dazu war ein Stromkreis hergestellt (vgl. Fig. 1), in dem sich ein Metronom, die Ablaßvorrichtung für den Ballon und je ein an den Kameras angebrachter Elektromagnet befanden. Das Metronom schloß den Strom durch Eintauchen eines Drahtes in einen Quecksilberkontakt in gleichen etwa eine halbe Sekunde großen Zeitintervallen. Bei jedem Stromschluß zogen die Elektromagnete an den Kameras einen Hebel an, der seinerseits auf die Auslösungshebel der Verschlüsse wirkte. Diese, Automatverschlüsse von Bausch und Lomb, spannten sich nach jeder Auslösung selbsttätig wieder, so daß eine beliebige Folge von Aufnahmen gemacht werden konnte. Die Verschlußgeschwindigkeit wurde so groß wie möglich, nach den Angaben auf den Verschlüssen entsprechend einer Belichtungsdauer von $^1/_{100}$ Sekunde genommen.

Die Ablaßvorrichtung bestand aus einem doppelarmigen etwa 80 cm langen zunächst horizontal stehenden um eine horizontale Achse drehbaren Hebel, an dessen einem kürzeren Arm ein Gewicht hing. Sein Herabfallen wurde durch eine Sperrklinke verhindert. Das Ende des längeren Armes verjüngte sich in einen dünnen Draht, unter dessen äußerstes Ende der Haltering des Ballons gelegt wurde. Beim ersten Stromschluß durch das Metronom wurde die Sperrklinke durch einen Elektromagneten zurückgezogen, das Gewicht des kurzen Hebelarmes schnellte den langen in die Höhe. Der Ballon wurde so ohne Stoß freigegeben.

Gleichzeitig wurden die Verschlüsse der Kameras das erstemal betätigt und der Ballon in der Ausgangsstellung photographiert. Dieser ersten Aufnahme folgten dann nach gleichen Zeiten die nächsten während des Aufstieges des Ballons, bis dieser den Gesichtskreis der Kameras verlassen hatte.

Um gute Aufnahmen zu erzielen, mußten blau gefärbte Ballone verwendet werden. Als Hintergrund für die Aufnahmen wurden lange schwarze Tuchstreifen an den Wänden gegenüber den Kameras aufgezogen, so daß verhindert wurde, daß bei der mehrmaligen Belichtung der Platten die Stellen, wo der Ballon sich nicht befand, eine Wirkung ausüben konnten. Außerdem wurden lichtstarke Objektive (zwei Zeiß-Tessare, Lichtstärke 1 : 6,8 Brennweite 21 cm) und höchstempfindliche Platten (Lumière Σ) benutzt. Das Licht der Sommermonate reichte dann zur Erzielung brauchbarer Aufnahmen aus. Die gleichzeitige Aufnahme jedes Aufstieges durch zwei Kameras hatte den Zweck, Abweichungen des Ballons von der geraden Aufstiegbahn festzustellen und, falls solche auftraten, den betreffenden Aufstieg ausschalten zu können.

Vor der Füllung stellte eine Wägung das Gewicht des Ballons einschließlich Haltering sowie Halte- und Verschlußfäden fest. Vor dem Aufstieg wurde zunächst der Umfang mit einem Bandmaß gemessen, darauf der unter Umständen mit bekannten Gewichten als Ballast beschwerte Ballon dadurch abgewogen, daß eine angehängte Wagschale mit Gewichten so belastet wurde, bis der Ballon ohne zu steigen und zu fallen schwebte. Das Gewicht der Wagschale war vorher ermittelt worden. Die Zeiten der Messungen von Umfang und

Auftrieb wurden notiert. Darauf erfolgte der Aufstieg, nach ihm wieder Feststellung des Auftriebes und des Umfanges, die jetzt im allgemeinen wegen des ausgeströmten Wasserstoffs kleiner ausfielen. Aus allen Messungen wurden Auftrieb und Umfang zur Zeit des Aufstieges interpoliert. Die verwendeten Auftriebe lagen bei den großen Ballonen zwischen 0,99 und 29,81, bei den kleinen zwischen 0,28 und 1,86 g. Er wurde bei den großen bis auf 0,01, bei den kleinen bis auf 0,005 g, der Umfang bei beiden Größen bis auf 0,5 cm bestimmt. Ob die Luft ruhig war, zeigte der beim Abwiegen zur Feststellung des Auftriebes sich selbst überlassene Ballon. Der Aufstiegraum konnte durch Schließung sämtlicher Öffnungen strömungsfrei gehalten werden. Eine Zu- oder Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, so daß sie eine die Bewegung merklich beeinflussende Dichteänderung hervorgerufen hätte, war niemals nachzuweisen.

Die so gewonnenen Platten, zwei von jedem Ballonaufstieg, zeigten den Ballon an den Orten, die er zu den um gleiche Intervalle auseinanderliegenden einzelnen Aufnahmezeiten innehatte. Bei Beginn der Bewegung befand sich der Ballonmittelpunkt ungefähr 0,75 m über dem Boden. Sein Weg konnte etwa auf einer Strecke von 2,75 m verfolgt werden. Zur Ausmessung der Platten diente ein Komparator von Zeiß. Mit ihm wurde auf jeder Platte der Ort des oberen und unteren Randes jedes Ballonbildes, verglichen mit dem der Ruhelage festgestellt und durch Mittelbildung der jeweilige Ort des Ballonmittelpunktes gefunden. Mit jeder Kamera war einmal ein am Aufstiegsort aufgehängter Maßstab photographiert worden, so daß durch Ausmessen dieser Platten das Vergrößerungsverhältnis der photographischen Apparate bekannt wurde. Mit dessen Hilfe ließ sich der Ort, den der Ballonmittelpunkt zu jeder Aufnahmezeit gehabt hatte, finden. Die Platten wurden bis auf 0,01 mm genau ausgemessen, was einem Wege des Ballons von 0,6 mm entsprach. Bei den größeren Geschwindigkeiten war jedoch wegen der Unschärfe der Ballonränder größere Unsicherheit bei deren Einstellen vorhanden. Da aber für jeden Ballonort vier Messungen (oberer und unterer Rand auf jeder der zwei Platten) zur Verfügung standen, fand eine gewisse selbsttätige Ausgleichung der Einstellfehler statt.

Um zu sehen, ob dadurch, daß der Ballon seine Bewegung in der Nähe des Bodens begann, Besonderheiten in dieser hervorgerufen wurden, wurde auch eine Reihe von Aufstiegen festgehalten, bei denen der Ballon an einem längeren Faden als gewöhnlich an die Ablaßvorrichtung gehängt wurde, so daß sich der Ballonmittelpunkt im Anfang etwa 1,5 m über dem Boden befand. Ein Einfluß dieser Änderung ließ sich nicht erkennen.

Bei den Aufnahmen wurde so verfahren, daß ein einmal gefüllter Ballon nacheinander mit verschiedener Belastung, also verschiedenem Auftriebe, hochgelassen und jedesmal photographiert wurde. Während der Zeit zwischen dem ersten und letzten Aufstieg änderten sich Form und Inhalt des Ballons nur wenig. Ballone, deren Gestalt merklich von der Kugelform abwich, wurden ausgeschaltet, ebenso solche, die in einer erheblich von der Geraden abweichenden Bahn aufstiegen, und ferner diejenigen, die beim Ablassen eine Drehung erfuhren, die durch schlechte Form und ungleiche Wandstärke des Gummis hervorgerufen sein dürften. Schließlich wurde zur Prüfung der Genauigkeit auch von einem Ballon eine Reihe von Aufnahmen hergestellt, ohne daß seine Belastung bei jedem Aufstieg geändert wurde. Der Umfang des Ballons änderte sich während der fünf vorgenommenen Aufstiege nicht. Die folgende Tab. 1 gibt die dabei gemessenen Geschwindigkeiten wieder.

Tabelle 1.

Zeit	Auftrieb	0,24	0,71	1,19	1,67	2,14	2,62 sec
1. Aufstieg	10,61 g	20,2	58,6	87,2	117,4	115,1	cm/sec
2. „	10,45	20,2	57,5	92,6	114,0	103,5	„
3. „	9,96	20,6	59,4	96,4	116,3	125,6	104,8 cm/sec
4. „	9,81	20,2	56,3	84,4	114,7	107,9	cm/sec
5. „	9,55	18,7	56,7	83,4	115,1	114,0	104,2 cm/sec

Der Radius des Ballons war in allen Fällen 26,8 cm, sein Gesamtgewicht (einschließlich Wasserstoff) 78,40 g. Nach Tab. 1 muß man bei Geschwindigkeiten über 100 cm/sec mit einem mittleren Fehler von etwa $\pm$ 7 Proz. rechnen, der in erster Linie durch unkontrollierbare die Geschwindigkeit beeinflussende Ursachen und erst in zweiter durch Ungenauig-

keiten der Messungen hervorgerufen wird. Für die Geschwindigkeit von 50 cm/sec beträgt er nur ± 2 Proz.

b) Fall von Kugeln in Wasser.

Nach derselben Methode wie bei den Ballonen wurde auch der jeweilige Ort von in Wasser fallenden Wachskugeln bestimmt. Zur Herstellung der Kugeln diente Bienenwachs. Durch Abdrehen nach allen Seiten der roh geformten Kugel auf dem Rande einer glatt und scharf senkrecht zur Achse abgeschnittenen Messingröhre von kreisförmigem Querschnitt und etwas kleinerem als der beabsichtigte Kugeldurchmesser ließ sich eine gute Kugelform erzielen. Das Ergebnis der mit einer Mikrometerschraubenlehre an den einzelnen Kugeln nach verschiedenen Richtungen vorgenommenen Messungen der Kugeldurchmesser ist in Tab. 2 zusammengestellt, die außerdem die Gewichte der Kugeln in Luft und in Wasser gemessen, dessen Temperatur und kinematische Zähigkeit ν, bei der die Versuche ausgeführt wurden, enthält. Dabei ist $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$, wo μ den Koeffizienten der inneren Reibung, ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet.

Tabelle 2.

Nr.	Große Kugeln						Kleine Kugeln					
	II	III	IV	V	VI		I	II	IV	V		
	3,28	3,21	3,27	3,29	3,21		2,09	2,10	2,10	2,10	cm Durchm.	
	3,29	3,22	3,28	3,30	3,226		2,095	2,10	2,06	2,10	"	"
	3,27	3,21	3,28	3,30	3,20		2,09	2,07	2,05	2,10	"	"
	3,28	3,19	3,25	3,29	3,23		2,095	2,07	2,08	2,10	"	"
	3,28	3,21	3,27	3,29	3,20		2,10	2,09	2,05	2,10	"	"
	3,27	3,21	3,28	3,28	3,23		2,09	2,09	2,06	2,10	"	"
Mittel	3,28	3,21	3,27	3,29	3,22		2,09	2,09	2,07	2,10	"	
Gewicht in Luft	19,0526	17,4000	18,5086	20,2728	17,3256		4,9174	5,1244	4,8652	4,8628	g	
Gew. in Wasser	0,5851	0,1721	0,1169	1,5087	0,0514		0,0702	0,3166	0,0306	0,0370	g	
Wassertemp.	18,5	18,5	18,0	18,0	16,5		18,0	18,0	19,5	18,5	Grad	
Kine. Zähigkeit	1043	1043	1056	1056	1097		1056	1056	1018	1043	$\times 10^{-6}$ cm/sec	

In die Kugeln war unter der Oberfläche an einer Stelle etwas Blei eingearbeitet, um sie schwerer als Wasser zu machen. Von jeder der zwei benutzten Kugelgrößen wurden mehrere nahezu gleichgroße, aber verschieden schwere Kugeln hergestellt. Dem Blei gegenüber in bezug auf den Kugelmittelpunkt war dicht unter der Oberfläche ein kleiner eiserner Stift eingelassen. Er diente zum Festhalten der Kugeln vor dem Fall durch einen Elektromagneten. Die Kugeln fielen in einen 1,5 m hohen, 30 × 30 cm weiten Trog aus Eisenblech. In zwei einander gegenüberliegenden Seiten von ihm war je

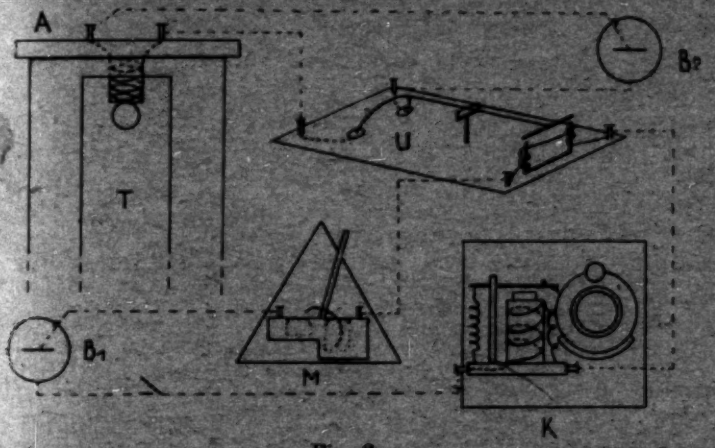


Fig. 2.

A Ablaßvorrichtung mit Haltemagnet	*M* Metronom
U Unterbrecher	*K* Kamera
B_1, B_2 Batterien	*T* Trog

ein fast vom oberen bis zum unteren Rande reichendes Glasfenster von 15 cm Breite mit Mennige eingekittet und verschraubt. Über dem Troge war ein zylindrischer Elektromagnet mit senkrechter Achse gelagert, dessen unterer Rand etwa 2 cm unter die Wasseroberfläche des gefüllten Troges tauchte. Dieser Haltemagnet hielt die mit dem Eisenstift nach oben unter ihn gebrachten Wachskugeln bis zu Beginn des Falles fest.

Die Aufnahmen wurden im Zimmer mit dem Fenster im Rücken mit einem der oben beschriebenen photographischen Apparate mit elektromagnetischer Verschlußauslösung aus 2,2 m Entfernung durch die beiden Glasfenster des Troges hindurch gemacht. Zur Sichtbarmachung der Kugeln wurde

während des Falles mit der Hand eine Glühbirne an dem dem Objektiv abgewendeten Trogfenster mit der Kugel mitgeführt. Die Glühbirne war, um das Licht diffus zu machen, mit Seidenpapier umkleidet. Die Kugeln hoben sich vom Lampenhintergrund im Negativ Weiß auf Schwarz scharf ab.

Für die Aufnahmen waren zwei Stromkreise nötig (vgl. Fig. 2). Der erste enthielt den Haltemagnet und die Quecksilberkontakte eines Unterbrechers. Er war vor der Aufnahme geschlossen. Der zweite ging durch das Metronom, den Elektromagneten an der Kamera und einen Elektromagneten, der den am ersten Stromkreis liegenden Unterbrecher öffnete. Diese Öffnung geschah beim ersten Stromschluß durch das Metronom gleichzeitig mit der ersten Aufnahme, so daß auch hier das erste Kugelbild auf der Platte die Kugel am Anfangsort, die folgenden Bilder sie dort zeigten, wo sie sich nach gleichen Zeitzwischenräumen befand.

Es wurden Aufnahmen im vollen Troge von 30 × 30 cm Grundfläche gemacht, sowie auch in dem verengten Troge, indem Blech- und Glaswände in verschiedenen Abständen eingehängt wurden, um den Einfluß der Wände kennen zu lernen. Masse und Abtrieb der Kugeln wurden vor dem Fall durch ihre Wägung in Luft und in Wasser ermittelt. Jede Kugel wurde mehrere Male, bis zu sechsmal, fallen gelassen und dabei photographiert. Um zu zeigen, wie weit dabei die gemessenen Geschwindigkeiten bei jedem einzelnen Fall übereinstimmten, diene Tab. 3. Sie gibt die dreimal an der großen Kugel V gemessenen Geschwindigkeiten wieder.

Tabelle 3.

Zeit	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75 sec
Platte 1	3,81	21,45	18,61	21,76	24,36	23,08	25,23	26,47 cm/sec
„ 2	4,06	20,92	19,09	21,63	24,30	23,73	25,84	26,39 „
„ 3	4,81	21,88	17,95	22,63	23,99	23,77	23,91	24,60 „

Die Unterschiede sind bei den kleinsten beobachteten Geschwindigkeiten erheblich. Der mittlere Fehler betrug in einigen Fällen sogar 100 Proz. Von der zweitkleinsten Geschwindigkeit ab findet Übereinstimmung innerhalb 2—3 Proz. statt. Für Geschwindigkeiten über 25 cm/sec wachsen die Fehler bis über 4 Proz.

Auch von den Kugeln wurden nur diejenigen benutzt, deren Bahn nahe der Senkrechten durch den Anfangspunkt blieb. Die in Tab. 2 fehlenden große Kugel I und kleine Kugel III wurden aus diesem Grunde ausgeschaltet. Ein in der Mitte des Troges aufgehängter Maßstab lieferte eine Platte zur Bestimmung des Abbildungsverhältnisses der Kamera. Die Ausmessung der Platten erfolgte ebenso wie die der Ballonplatten.

Die Ausmessung der Platten lieferte nach Reduktion auf den wirklichen Maßstab die Abhängigkeit des von den Kugeln bzw. Ballonen zurückgelegten Weges von der Zeit. Durch Bildung der Differenzenquotienten wurde daraus die Geschwindigkeit für die in der Mitte zwischen zwei Aufnahmezeiten liegenden Zeitpunkte abgeleitet. Die so gebildeten Zeit-Geschwindigkeitskurven lassen einen leichteren Einblick in die Bewegung zu als die Zeit-Wegkurven, andererseits sind sie mit geringeren Fehlern behaftet als die Zeit- Beschleunigungskurven, die man durch Bildung der zweiten Differenzenquotienten heranziehen könnte.

Die Ballone wichen dadurch, daß sie einen Füllansatz und mit ihm durch einen etwa 15 cm langen Faden verbunden, einen Haltering aus dünnem Draht von ungefähr 5 cm Durchmesser trugen, von der genauen Kugelform mehr ab als die Wachskugeln, die eine allseitige glatte Oberfläche hatten. Jedoch ließ sich nicht erkennen, daß durch diese Unterschiede in der Form der Verlauf der Bewegung beider Körper verschieden gemacht worden wäre.

Die Abtriebe der Kugeln konnten durch anhaftende dünne Luftschichten und kleine Bläschen gefälscht werden. Diese wurden, soweit möglich, entfernt und die Kugeln nach der Wägung unter Wasser nicht wieder getrocknet, sondern unter Wasser aufbewahrt. Die großen Geschwindigkeiten sind mit größeren Meßfehlern behaftet als die kleinen, einmal wegen der größeren Umschärfe der Bilder, dann wegen der größeren Wegstrecken, aus denen die Geschwindigkeiten interpoliert werden mußten. Schließlich ist es möglich, daß die Geschwindigkeit im ersten Zeitintervall durch einen einseitig wirkenden Fehler verfälscht worden ist, da es hier auf die Gleichzeitigkeit der ersten Aufnahme und des Loslassens ankommt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß durch zurückbleibenden

Magnetismus das Abfallen der Kugeln etwas verzögert werden konnte. Dadurch dürften sich die verhältnismäßig großen Abweichungen dieser Geschwindigkeiten bei verschiedenen mit derselben Kugel erhaltenen Platten erklären.

II. Beobachtungsergebnisse.

a) Stationäre Bewegung. Widerstandkoeffizient.

Der Widerstand eines Körpers, der sich in einer ruhenden Flüssigkeit nur unter dem Einfluß seines konstanten Auf- bzw. Abtriebes bewegt, ist

$$(1) \qquad Wg = Ag - m\frac{dv}{dt},$$

wo Wg den Widerstand, Ag den Auftrieb, beide in Dynen ausgedrückt, g die Schwerebeschleunigung, m die Masse des Körpers, v seine Geschwindigkeit und t die Zeit bedeutet. Für stationäre Bewegung, wo

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

und somit $W = A$ ist, haben Theorie und die verschiedensten Versuche den Widerstand proportional mit v^2, F und ϱ ergeben (F größter Querschnitt des Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung, ϱ Dichte der Flüssigkeit), falls die in Betracht kommende Reynoldsche Zahl

$$R = \frac{vl}{\nu}$$

(l ein Längenmaß des Körpers, $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit, wenn μ ihre innere Reibung) oberhalb einer gewissen Grenze liegt. Allen[1]) gibt für kugelförmige Körper an (r Kugelradius):

$$\begin{aligned} Wg &\text{ proportional } v \quad \text{für } R = \frac{vr}{\nu} < 1, \\ Wg &\quad \text{„} \quad v^{1,5} \text{„} \quad 1 < R < 127, \\ Wg &\quad \text{„} \quad v^2 \quad \text{„} \quad R > 1200. \end{aligned}$$

Für das Gebiet $127 < R < 1200$ fehlten Beobachtungen. Zum

1) H. S. Allen, The motion of a sphere in a viscous fluid. Phil. Mag. S. 323 u. 519. 1900.

Teil füllt die vorliegende Arbeit diese Lücke aus. Im Bereiche des quadratischen Gesetzes ist also

$$W g = \psi \varrho F v^2, \tag{2}$$

wenn mit ψ der Widerstandskoeffizient bezeichnet wird. Dabei ist ψ, solange die Reibung im Vergleich zu den Trägheitswirkungen keinen merklichen Einfluß ausübt, was sie nur bei kleinen Geschwindigkeiten tut, und solange der durch die Bewegung des Körpers hervorgerufene Turbulenzzustand sich nicht ändert[1]), konstant zu erwarten. Zur Prüfung dieser Verhältnisse wurden aus den vorliegenden Beobachtungen diejenigen herausgegriffen, bei denen die Körper ihre Endgeschwindigkeit erreicht hatten. Bei sämtlichen Ballonen lag der Punkt, von dem ab die Geschwindigkeit konstant wurde, außerhalb des Bereiches, der auf den Platten festgehalten werden konnte. Nur bei den Wachskugeln mit kleineren Abtrieben ließ sich mit Sicherheit der Eintritt der stationären Bewegung durch Konstanz der Geschwindigkeit während mehrerer Zeitintervalle nachweisen. In Fig. 3 sind die aus diesen Platten nach Gleichung (2) ermittelten Werte von ψ

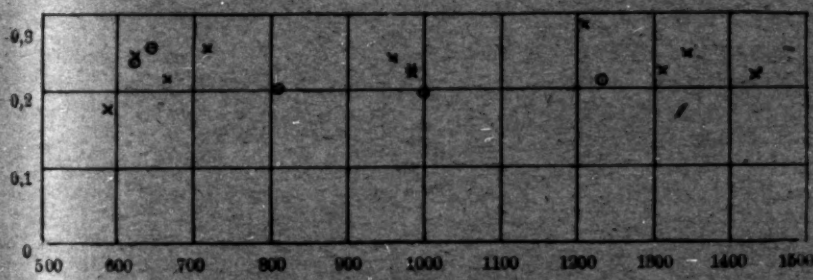


Fig. 3.

als Funktion von R aufgetragen und zwar sowohl die im weitesten Troge von 80 × 80 cm Grundfläche wie auch die im verengten Troge gemessenen, wie in Tab. 4 näher angegeben ist.

1) L. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. Berlin 1914. R. Wenger, Die Steiggeschwindigkeit der Gummiballone u. die Turbulenz in d. Atmosphäre. Ann. d. Hydrogr. 45 IV. 1917.

Tabelle 4.

Troggrundfläche	Kleine Kugel			Große Kugel		
	IV	V	I	VI	IV	III
30 × 30 cm	0,24	0,26	0,20	0,20	0,21	
20 × 30 „			0,22			
20 × 20 „	0,21		0,21	0,18	0,22	0,22
10 × 10 „	0,24		0,23	0,26	0,25	0,28

Widerstandskoeffizient $\psi = \frac{W g}{\varrho F v^3}$.

Die im weitesten Troge beobachteten Endgeschwindigkeiten, auf Grund deren ψ berechnet wurde, sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

	Kleine Kugel			Große Kugel	
	IV	V	I	VI	IV
Versuch 1	6,15	6,29	10,24	5,54	7,71 cm/sec
„ 2	6,03	6,56	10,15	5,23	7,95 „
„ 3	6,25	6,35	10,23		8,31 „
„ 4			9,96		„
Mittel . . .	6,14	6,40	10,15	5,39	7,99 „

Endgeschwindigkeiten.

ψ aus diesen Werten ermittelt, schwankt um den Wert 0,22 herum, ohne daß eine klare Abhängigkeit von R zu erkennen wäre. Die sich für die zwischen 600 und 700 liegenden Beträge von R andeutende Vergrößerung von ψ (vgl. Fig. 3) könnte gerade noch durch die Ungenauigkeiten der Geschwindigkeitsbestimmungen erklärt werden (vgl. auch S. 662). Fehler bei diesen machen sich etwa in doppeltem Maße im Werte von ψ bemerkbar. Man kann also ψ im Bereiche $600 < R < 1500$ als Konstante ansehen und damit das quadratische Widerstandsgesetz Gleichung (2) für diesen Bereich als gültig betrachten. Der Einfluß näher gerückter Wände scheint sich als Vergrößerung von ψ und somit des Widerstandes geltend zu machen. In der Folge ist für ψ der Wert 0,22 zugrunde gelegt. In Tab. 6 ist eine Reihe von aus anderen Widerstandsmessungen berechneten Werten von ψ zusammengestellt.

Tabelle 6.

	ψ	beob. im Bereich $R = \frac{v r}{\nu}$ größer als	beob. im Bereich $R = \frac{v r}{\nu}$ kleiner als	
Shakespear, Phil. Mag. 1914. S. 728 . . .	0,21—0,24	948	22 700	bewegte Kugeln in ruhender Luft
H. S. Allen, Phil. Mag. 1900. S. 323, 519 . .	0,17—0,20	1200	40 000	bewegte Stahlkugeln in ruhend. Wasser
Hesselberg u. Birkeland, Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre. IV. 4	0,4—0,2	2000	200 000	kleine / große Ballone in ruhender Luft
Eiffel, Sur la resistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. (1912) S. 1597 . . .	0,21		60 000	ruhende Kugeln im Luftstrom
Prandtl, Göttinger Berichte. 1914 . . .	0,22		50 000	ruhende Kugeln im Luftstrom.

Danach erscheint es berechtigt, auch für den Bereich $1500 < R < 50000$, der für die in dieser Arbeit gemachten Versuche noch in Frage kommt, ψ zu 0,22 anzunehmen.

b) Beschleunigte Bewegung. Beobachtete Geschwindigkeiten.

Nimmt man nun an, daß Gleichung (2) auch für nichtstationäre Bewegung den Wert des Widerstandes richtig angibt, so kann man die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit durch Auflösung der aus Gleichung (1) und (2) hervorgegangenen Gleichung

$$m \frac{dv}{dt} = Ag - \psi \varrho F v^2$$

nach v finden.[1]) Man erhält:

$$(3) \qquad v = \sqrt{\frac{Ag}{\psi \varrho F}} \cdot \frac{e^{\frac{2}{m}\sqrt{Ag\psi\varrho F}\cdot t} - 1}{e^{\frac{2}{m}\sqrt{Ag\psi\varrho F}\cdot t} + 1}.$$

In dieser Gleichung sind, wenn für ψ der oben ermittelte Wert 0,22 eingesetzt wird, alle Konstanten bekannt bzw. meßbar.

1) Hesselberg u. Birkeland, a. a. O.

Für v ergibt sich eine Kurve (vgl. auch Fig. 9), die zunächst mit t rasch wächst und sich dann asymptotisch der Endgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi \varrho F}}$$

nähert. Für $t = 0$ ist die Neigung der Kurve gegen die t-Achse gleich Ag/m. Von zwei Kurven verläuft die mit größerem Auftrieb völlig oberhalb der mit kleinerem Auftrieb. Der Vergleich der so errechneten und beobachteten Zeit-Geschwindigkeitskurven muß darüber Aufschluß geben, ob auch für

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Gleichung (2) Gültigkeit besitzt bzw. in welcher Art sich der Widerstand in diesem Falle ändert. Er wurde für alle beobachteten Bewegungen der Ballone und Kugeln angestellt und ergab:

1. Die beobachteten Geschwindigkeiten bleiben, bevor die Endgeschwindigkeit erreicht wird, stets kleiner, als sie sich zu denselben Zeiten aus Gleichung (3) errechnen. Das quadratische Gesetz gilt demnach nicht für beschleunigte Bewegung, sondern der Widerstand ist im ganzen größer während der Zeit, in der Beschleunigung stattfindet, als er bei denselben Geschwindigkeiten bei stationärer Bewegung sein würde. Der zurückgelegte Weg ist kleiner als in diesem Fall.

2. Nach den Beobachtungen wächst v nicht, wie Gleichung (3) verlangt, dauernd mit t, sondern es nimmt zunächst zu bis zu einem Maximum, das kleiner als die Endgeschwindigkeit ist, geht darauf durch ein Minimum, um dann erst meist nach weiteren, aber geringeren Schwankungen der Endgeschwindigkeit asymptotisch zuzustreben. Diese Eigentümlichkeiten treten in gleicher Weise bei den Ballonen wie bei den Wachskugeln auf. Bei den großen Ballonen reichen die Beobachtungen infolge der räumlichen Verhältnisse, unter denen sie gemacht werden mußten, fast alle nur etwas über das erste Maximum hinaus. Einige konnten so weit verfolgt werden, daß auch das folgende Minimum mit erfaßt wurde. Die kleinen Ballone und die Kugeln lassen alle Maximum und Minimum erkennen bis auf die kleine Kugel II, deren Kurve nur einen

Knick aufweist, wo das Maximum zu vermuten wäre (vgl. Fig. 7). Die Kugeln mit kleineren Abtrieben haben auf einer längeren Strecke ihre Endgeschwindigkeit angenommen. Der Widerstand ergibt sich demnach nicht als eindeutige Funktion von v, sondern er nimmt je nach dem vorhergegangenen Verlauf der Bewegung verschiedene Werte bei derselben Geschwindigkeit an.

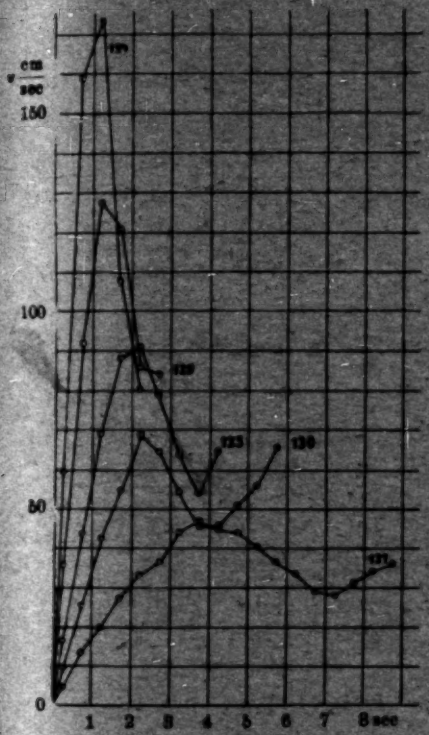


Fig. 4. Große Ballone.

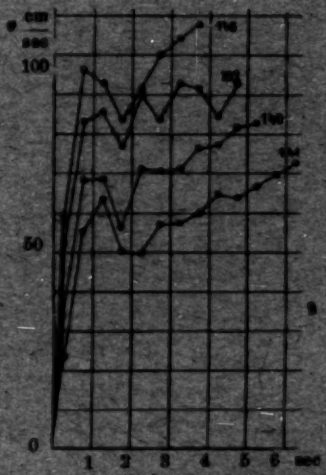


Fig. 5. Kleine Ballone.

In Figg. 4—7 sind die mit einer Anzahl von Ballonen, sowie die mit den Kugeln erhaltenen Kurven v (t) wiedergegeben. Bei den Kugeln ist dabei von mehreren jedesmal zur Verfügung stehenden Platten, d. h. Versuchen unter gleichen Bedingungen, eine ausgewählt worden, deren Ausmessung Geschwindigkeiten ergab, die etwa in der Mitte zwischen denen mit sämtlichen Platten gewonnenen Werten lagen.

Dabei war:

Ballon Nr.	Radius cm	Gesamtgewicht einschließlich Wasserstoff g	Auftrieb g
124	22,4	37,22	15,24
125	22,4	47,22	4,51
129	21,1	37,90	7,82
130	21,1	42,90	2,42
131	21,1	43,90	0,99
133	7,8	1,785	0,63
140	7,9	1,790	0,42
141	7,8	1,785	0,30
145	8,0	1,845	0,71

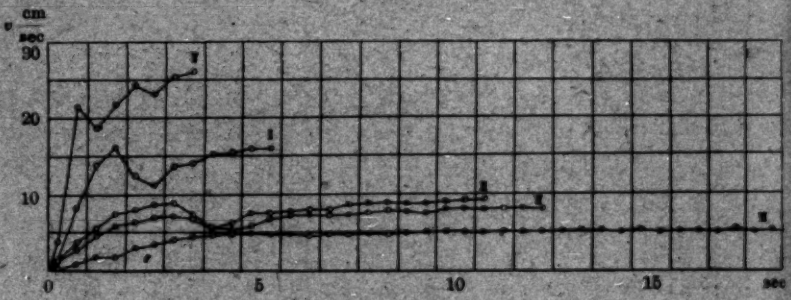


Fig. 6. Große Kugeln.

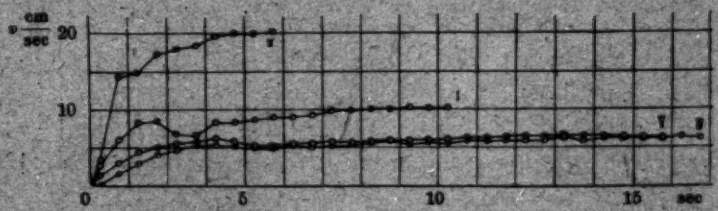


Fig. 7. Kleine Kugeln.

c) Transformation aller Beobachtungen auf eine Flüssigkeit und eine Körpergröße.

Vorerst ist es, um die an Ballonen und Kugeln verschiedenen Maßstabes und in verschiedenen Flüssigkeiten gemachten Beobachtungen miteinander vergleichen zu können, nötig, alle auf eine Größe und eine Flüssigkeit zu transformieren. Es werde hierzu die große Kugel IV (Radius 1,635 cm) und Wasser von 18° (innere Reibung $\mu = 0{,}01055$, Dichte $\varrho = 0{,}9986$, kinematische Zähigkeit $\nu = 0{,}01056$) genommen. Das Gesetz

über die Ähnlichkeit von Flüssigkeitsbewegungen verlangt, daß folgende Gleichungen erfüllt sein müssen[1]):

$$(4) \qquad A = A_0 \frac{\mu^2 \varrho_0}{\mu_0^2 \varrho}, \quad v = v_0 \frac{l_0 \nu}{l \nu_0}, \quad t = t_0 \frac{\nu_0 l^2}{\nu l_0^2},$$

wenn zu einer Bewegung in einer gewissen Flüssigkeit, bei einem gewissen Längenmaß (angedeutet durch den Index Null) die ihr ähnliche in einer anderen Flüssigkeit und bei einem anderen Längenmaß (anderer Körpergröße) gefunden werden soll. Sämtliche beobachteten Zeitgeschwindigkeitskurven wurden durch die Gleichungen (4) in neue Kurven transformiert, die die Bewegung eines kugelförmigen Körpers vom Radius 1,635 cm in Wasser von 18° wiedergeben, wenn auf ihn die sich aus den gemessenen durch die erste der Gleichungen (4) ergebenden Auf- bzw. Abtriebe wirken. Als Vergleichsmaß diente der Radius der Körper. Für μ und ϱ des Wassers wurden die in Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik für die verschiedenen Temperaturen angegebenen Werte eingesetzt. Die Temperatur bei den Ballonaufstiegen betrug stets wenig über oder unter 20°. Für die Luftdichte wurde ihr mittlerer Wert bei den Versuchen 0,0012 benutzt, für ihre innere Reibung das Mittel der im Tabellenwerk von Landolt-Börnstein für 20° angegebenen Werte, nämlich 0,000190. Wenn das Ähnlichkeitsgesetz richtig ist, müßten, falls zufällig in der Reihe der Beobachtungen zwei vorhanden wären, deren Kräfte (Auf- oder Abtriebe) nach der Transformation ganz oder nahezu übereinstimmten, auch die aus den unter ganz verschiedenen Umständen beobachteten Werten von v und t durch Transformation hervorgegangenen Kurven ganz oder nahezu übereinstimmen, im übrigen die Kurven sich nach den zu ihnen gehörigen transformierten Auftrieben ordnen. Das ist bei dem vorliegenden Beobachtungsmaterial durchweg der Fall. In Fig. 8 sind die aus den Kurven der Figg. 4—7 durch Transformation gewonnenen Kurven eingezeichnet. Nicht mit angeführt sind, um die Übersicht nicht zu gefährden, die Ballone 125 und 129, die in aus Fig. 4 leicht ersichtlicher Weise zwischen bzw. über den Kurven von 124 und 130 liegen, sowie große Kugel III und kleine Kugel V, deren Kurven sehr

1) Vgl. z. B. Cl. Schäfer, Einf. in die theor. Physik, Bd. I. S. 904. Leipzig 1914.

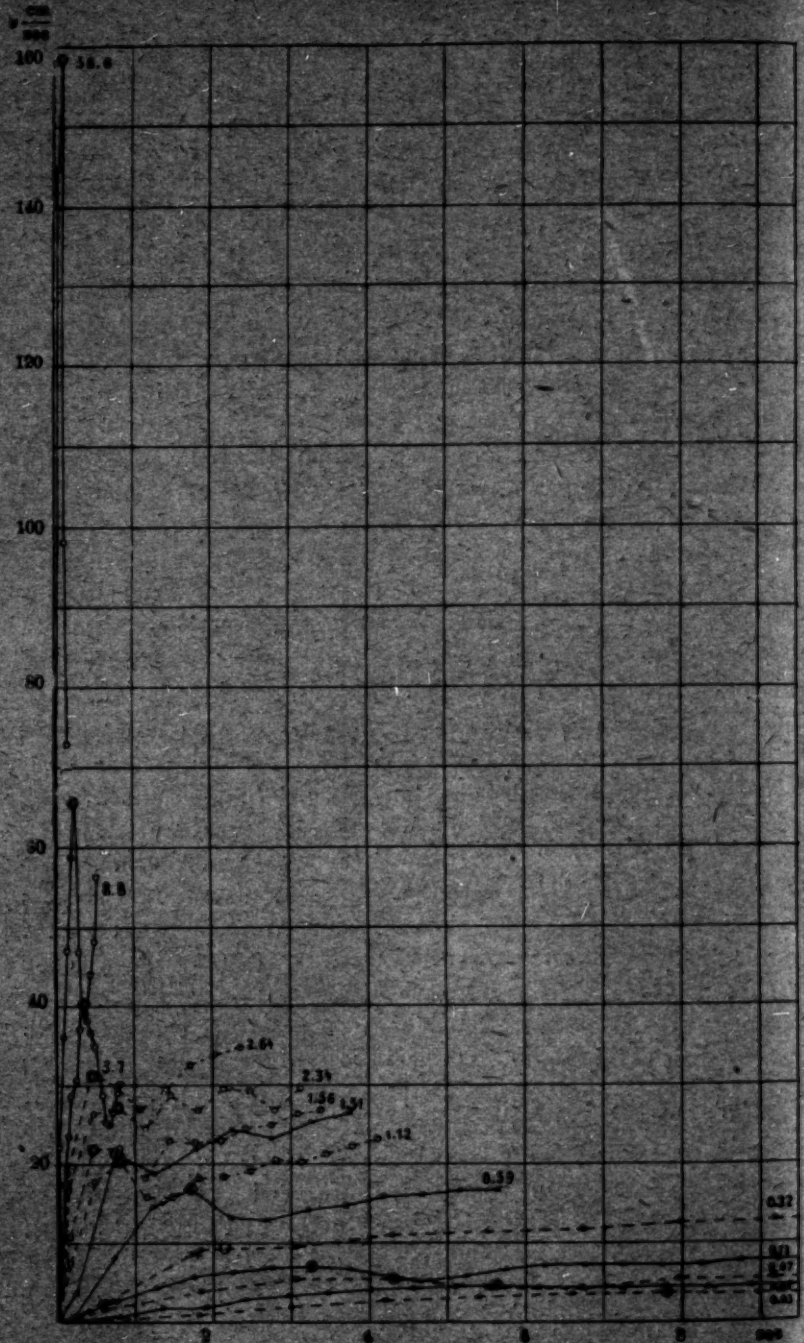

160
140
120
100
80
60
40
20
56.6
8.8
3.7
2.64
2.34
1.56
1.51
1.12
0.59
0.32
2
4
6
8

Fig. 8.

nahe mit anderen Kurven derselben Kugelgröße zusammenliegen. An jede Kurve in Fig. 8 ist der dazugehörige (transformierte) Auftrieb angeschrieben. Um die Herkunft der Kurven zu kennzeichnen, sind die zu den großen und kleinen Ballonen gehörigen Geschwindigkeiten durch Kreise, die zu den großen und kleinen Kugeln gehörigen durch Kreuze bezeichnet und die zu den großen Kugeln und großen Ballonen gehörigen Kurven ausgezogen, die zu den kleinen Kugeln und kleinen Ballonen gehörigen gestrichelt gezeichnet worden. Außerdem sind die Maxima von v noch besonders auf jeder Kurve durch einen etwas größeren Kreis bezeichnet. Nach rechts hin setzen sich die zu Auftrieben von 0,82 g und kleiner gehörigen Kurven weiter fort, als auf Fig. 8 zu erkennen ist, in der Weise, wie aus Figg. 6 und 7 ersichtlich ist. Dabei entspricht der letzten mit der kleinen Kugel IV beobachteten Zeit von 15,75 Sek. die Zeit 37,8 Sek. der transformierten Kurve mit dem Auftrieb 0,03 g.

Fig. 8 zeigt, daß sich alle Kurven in eine nach ihren Auftrieben geordnete Schar einfügen und daß für die wenig verschiedenen Auftriebe 1,51 und 1,56, die einerseits der großen Kugel V, andererseits dem Ballon 140 entsprechen, die transformierten Bewegungen nahezu gleich, die ursprünglichen demnach ähnlich verlaufen. Auch die Besonderheiten aller Kurven, ihre Maxima und Minima, zeigen innerhalb der ganzen Schar ein gesetzmäßiges Verhalten, wie weiter unten noch weiter ausgeführt wird. Der Umstand, daß sämtliche der unter den verschiedensten Bedingungen gemachten Beobachtungen sich in eine gleichmäßig geordnete Schar transformieren lassen, ist eine Bestätigung für die Richtigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes.

Von jetzt ab werden zur Untersuchung nur noch die transformierten Werte von v, t und A herangezogen.

d) Näherungsweise Darstellung der Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Zeit.

Es wurde nun zunächst versucht, den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit durch eine Gleichung darzustellen, die, ohne auf die Schwankungen der Geschwindigkeit und deren Durchgang durch ein Maximum und Minimum vor Erreichung der Endgeschwindigkeit Rücksicht zu nehmen, geeignet wäre, in erster Annäherung die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von

der Zeit und jedenfalls besser als Gleichung (3) zu beschreiben. Als brauchbar erwies sich die Gleichung:

$$v = v_E(1 - C^t), \tag{5}$$

wo v die Endgeschwindigkeit gleich

$$\sqrt{\frac{A\,g}{\psi\,\varrho\,F}},$$

C eine Konstante kleiner als 1 bedeutet. Die Konstante C wurde für eine Reihe von Kurven der Schar durch graphische Ausgleichung ermittelt. In Fig. 9 sind nochmals einige beobachtete (transformierte) Zeit-Geschwindigkeitskurven aufgeführt und dazu die nach Gleichung (5) (ausgezogene Kurve) und nach Gleichung (3) (gestrichelte Kurve) errechnete Kurve gezeichnet. Die angeschriebenen Zahlen sind wieder die zu den einzelnen Kurven gehörigen Auftriebe.

Hieraus ist das auf S. 646 unter 1. Gesagte ersichtlich, daß die beobachteten Geschwindigkeiten, bevor die Bewegung stationär geworden ist, bevor also der Wert der Endgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{A\,g}{\psi\,\varrho\,F}}$$

erreicht ist, alle unter der aus Gleichung (3) errechneten (gestrichelten) Kurve bleiben. Bei dieser ist für $t = 0$ die Neigung gegen die t-Achse, das ist die Anfangsbeschleunigung, gleich $A\,g/m$. Die beobachtete Beschleunigung für $t = 0$ ist stets geringer als dieser Wert, da die wirksame Kraft, der Auftrieb, nicht nur die Körpermasse allein, sondern auch die umgebende Flüssigkeit beschleunigen muß. Es ist daher der Auftrieb, der gleich der Summe aus Produkten von Masse und Beschleunigung des Körpers und jedes umgebenden Flüssigkeitselementes ist, größer als das Produkt von Masse und Beschleunigung des Körpers allein, den allein der Messung zugänglichen Größen. Das heißt aber, es macht sich sofort bei Beginn der Bewegung auch für verschwindend kleine Geschwindigkeiten ein endlicher Widerstand bemerkbar, was in Gleichung (2) nicht zum Ausdruck kommt. Benutzt man Gleichung (5) als näherungsweise Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Zeit, so ergibt sich bei Berechnung des Widerstandes $W_g = A_g - m\frac{dv}{dt}$:

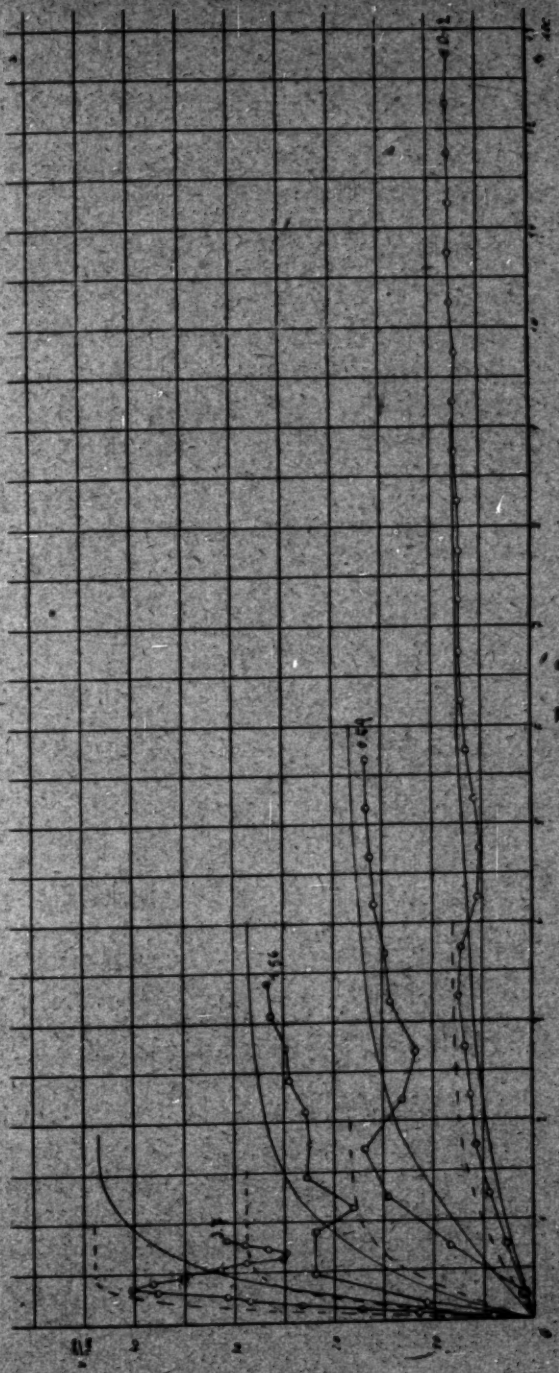


Fig. 9

$$C = 1 - \frac{v}{v_E},$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_E C \ln C = (v - v_E) \ln C,$$

$$Wg = Ag - m(v - v_E \ln C),$$

$$= (Ag + m v_E \ln C) - m \ln C \cdot v,$$

$$Wg = a_1 + a_2 \cdot v,$$

wo a_1 und a_2 Konstante sind. Um den Unterschied dieses Widerstandes gegen den sich bei derselben Geschwindigkeit aber stationärer Bewegung ergebenden Widerstand zu finden, werde Wg in zwei Bestandteile zerlegt, einen nur von der Geschwindigkeit nach dem quadratischen Gesetz abhängigen $gW_v = \psi \varrho F v^2$ und einen von der Beschleunigung abhängigen gW_b. Für ihn folgt aus Gleichung (5):

$$Wg = gW_b + gW_v = gW_b + \psi \varrho F v^2 = Ag - m \frac{dv}{dt}$$

$$gW_b = Ag - m \frac{dv}{dt} - \psi \varrho F v^2$$

$$\mp Ag - m \frac{dv}{dt} - \psi \varrho F \left(\frac{dv}{dt} \frac{1}{\ln C} + v_E \right)^2$$

und, da $Ag = \psi \varrho F v_E^2$,

$$= -\left(m + \frac{2 \psi \varrho F v_E}{\ln C} \right) \frac{dv}{dt} - \frac{\psi \varrho F}{\ln^2 C} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2,$$

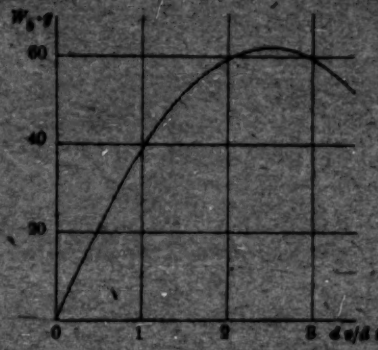
$$(6) \qquad Wg = \psi \varrho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Für

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

geht diese Gleichung in das gewöhnliche quadratische Widerstandsgesetz über, für $v = 0$ gibt sie einen von Null verschiedenen Wert von Wg. Ferner entspricht Gleichung (5) dadurch besser den wirklichen Verhältnissen als Gleichung (3), daß sie die Annäherung von v an die Endgeschwindigkeit richtiger wiedergibt als diese, wie Fig. 9 erkennen läßt. Fig. 10 zeigt die Abhängigkeit des Beschleunigungswiderstandes $W_b g$ von der Beschleunigung für den Auftrieb 0,12 g. Die größte Abweichung vom quadratischen Gesetz tritt also nicht bei Beginn der Bewegung, sondern erst später ein, wenn die Beschleunigung schon abgenommen hat.

Bei der Ausgleichung der Kurve $v(t)$ und der dabei erfolgten Ermittlung von C sind Willkürlichkeiten nicht zu vermeiden, die um so größer sind, je weiter die zuletzt beobachtete Geschwindigkeit noch hinter der Endgeschwindigkeit zurückbleibt. Im ungünstigsten Falle ergeben sich dabei Unsicherheiten von v von 10 Proz., sofern v etwa $^1/_2\, v$ ist. Für größere



$A = 0{,}12$ g, $\quad m = 18{,}51$, $\quad v_E = 7{,}05$ cm/sec $\quad C = 0{,}65$,

$$g\, W_s = 49{,}54 \frac{dv}{dt} - 9{,}93 \left(\frac{dv}{dt}\right)^3$$

Fig. 10.

und kleinere v sind die Unsicherheiten geringer. Trägt man die Werte C, die sich aus den verschiedenen Kurven der Schar in Fig. 8 ergeben haben, in Abhängigkeit vom Auftrieb auf und verbindet man die Punkte durch eine Kurve, so erhält man Fig. 11. Mit ihrer Hilfe ist es jetzt möglich, den Bewegungsverlauf für irgendeinen Auftrieb bei beliebigem Radius in beliebiger Flüssigkeit zu beschreiben. Dazu ermittelt man aus ihr für den aus dem vorgegebenen auf die Verhältnisse von Fig. 8 transformierten Auftrieb den Wert von C. Bezeichnet man alle Größen unter den gegebenen Verhältnissen, für die die Bewegung gesucht wird, mit dem Index Null, die von Fig. 8 ohne Index, so ist:

$$v = v_E(1 - C^t), \qquad v_0 = v_{E_0}(1 - C_0^{t_0}),$$

$$\lg C = \frac{1}{t} \lg\left(1 - \frac{v}{v_E}\right), \quad \lg C_0 = \frac{1}{t_0} \lg\left(1 - \frac{v_0}{v_{E_0}}\right) = \frac{1}{t_0} \lg\left(1 - \frac{v}{v_E}\right),$$

$$\lg C_0 = \frac{t}{t_0} \lg C = \frac{r_0 l^2}{r l_0^2} \lg C$$

nach der 3. Gleichung (4). Da ferner

$$v_{E_0} = \sqrt{\frac{A_0 g}{\psi \varrho_0 F_0}}$$

ist, sind in der Gleichung

$$v_0 = v_{E_0}(1 - C_0^{t^n})$$

alle Konstanten bekannt und damit der Verlauf von v_0 angenähert ohne Berücksichtigung von Maximum und Minimum bestimmt.

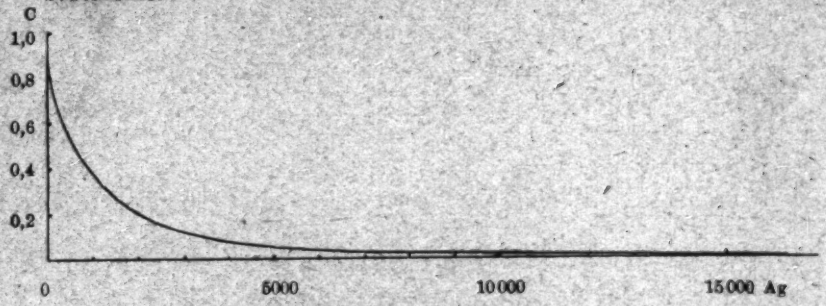


Fig. 11.

e) Strömungsverlauf um die Kugeln.

Der auffallendste Unterschied zwischen den ausgeglichenen und den beobachteten Kurven besteht darin, daß v in Wirklichkeit nicht dauernd mit t wächst, sondern große Schwankungen erleidet. Diese müssen, da äußere Einflüsse, die Geschwindigkeitsänderungen dieser Größenordnung hervorbringen konnten, vollkommen ausgeschlossen waren und die Erscheinung in ganz gleicher Weise sowohl in Luft wie in Wasser auftritt, unbedingt mit der Bewegung verknüpft sein. Einen gewissen Aufschluß gab die Beobachtung des Strömungsverlaufes um die Körper. Wurde eine Wachskugel in Fuchsinlösung getaucht und darauf vorsichtig unter den Haltemagneten gebracht, so konnten beim Fall der Kugel die Strömungslinien der der Kugel benachbarten Flüssigkeitsteile sichtbar gemacht werden. Es bildete sich kurz nach Beginn der Bewegung ein Wirbelring aus, der etwas kleineren als Kugeldurchmesser besaß, dessen Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung lag und der sich an die Kugel angeheftet mit ihr mitbewegte. Während der Bewegung vergrößerte sich seine Masse. Etwa zur Zeit des ersten Minimums von v trennte sich der Wirbelring von der Kugel und blieb gegen diese zurück. Die Strömung hinter

der Kugel wurde von da ab meist turbulent, zuweilen schien sich noch ein zweiter Wirbelring ausbilden zu wollen. Da die an der Kugel haftende Farbe bis dahin fast aufgezehrt war, ließ sich über den weiteren Strömungsverlauf kein klares Bild mehr gewinnen. Fig. 12 zeigt das nach einer leider nicht sehr deutlichen Photographie gezeichnete Strömungsbild. Die Trennung von Wirbel und Kugel erfolgte meist nicht gleichzeitig an allen Stellen des Ringes. Gewöhnlich haftete der Wirbel an einer Seite der Kugel länger. Nach dieser Seite hin erlitt dann bei der Trennung die Kugel eine Ablenkung und pendelte dann während des weiteren Falles um die Senkrechte durch den Ausgangspunkt hin und her. Ob Unregelmäßigkeiten der Kugeloberfläche die Ursache dieser bei einigen Kugeln, die zu Geschwindigkeitsmessungen nicht benutzt wurden, sehr starken, bei anderen nur geringen Störungen der geradlinigen Bewegung sind, bleibe dahingestellt. Wie die Strömung hinter dem Wirbel verlief, ob sie dort turbulent war oder nicht, ließ sich nicht erkennen, da durch die der Kugel anhaftende Farbe nur die in den Wirbel einbezogene Flüssigkeitsteile gefärbt wurden.

Fig. 12.

Die potentielle Energie der Kugel verwandelt sich während der Bewegung in kinetische Energie. Die Beobachtungen lehren, daß die Abnahme der potentiellen Energie, die ständig erfolgt, nicht gleich ist der Zunahme der kinetischen Energie der Kugel, daß diese sogar in gewissen Zeiten auch eine Abnahme erfährt. Die Differenz beider muß sich, wenn man von der durch Reibung erzeugten Wärme absieht, in der Flüssigkeit wiederfinden als deren kinetische Energie, die ständig zunimmt, besonders stark in den Zeiträumen, wo die Geschwindigkeit der Kugel abnimmt. Sie besteht aus der Energie des Wirbels und der Energie der übrigen Flüssigkeit. Zwischen Kugel, Wirbel und der übrigen Flüssigkeit findet ein beständiger Energieaustausch statt, über dessen Einzelheiten die Beobachtungen nichts aussagen, da nur die kinetische Energie der Kugel gemessen werden kann. Doch könnte die Entstehung des ersten Maximums und Minimums von v etwa

folgendermaßen gedacht werden. Es ist wahrscheinlich, daß die Zunahme der Energie der Flüssigkeit zum größten Teil zur Bildung des Wirbels verbraucht wird, und zwar einerseits zur Erzeugung seiner Rotationsgeschwindigkeit, andererseits um, wie der Augenschein lehrt, seine Masse zu vergrößern. Solange diese beiden Faktoren wirken (in welchem Verhältnis sie zueinander stehen, lassen die Beobachtungen nicht erkennen), wird der Kugel Energie entzogen, so daß ihre Geschwindigkeit immer weniger zu-, schließlich sogar abnimmt. Mit der Trennung des Wirbels von der Kugel hört dieser auf, ihr Energie zu entziehen. Nur der Energieverbrauch der übrigen Flüssigkeit ist jetzt von der Kugel zu decken, der so gering ist, daß deren Geschwindigkeit wieder zunehmen kann. Da bei der Trennung von Wirbel und Kugel sich das ganze Strömungsbild wesentlich ändert und mit ihm die Energieverteilung in der Flüssigkeit, ist es erklärlich, daß von diesem Augenblick an die Änderung der kinetischen Energie der Kugel in anderer Weise als vor diesem Zeitpunkte erfolgt und daß daher auch die Beziehung zwischen Widerstand und Geschwindigkeit und somit zwischen Geschwindigkeit und Zeit anders wird als vorher.

f) Die Maxima und Minima der Geschwindigkeit.

Das erste Maximum von v bei sämtlichen Kurven der Schar der Fig. 8 hängt in einfacher Weise vom Auftrieb ab. Seine Werte schmiegen sich der Kurve

$$v_{max}^2 = 0{,}4 \times A\,g \tag{7}$$

an. Da ferner

$$v_E^2 = \frac{A\,g}{\psi\,\varrho\,F} = \frac{A\,g}{1{,}847}$$

ist, wird

$$v_{max}^2 = v_E^2 \times 0{,}4 \times 1{,}847 = v_E^2 \times 0{,}74\,,$$

$$\frac{v_{max}}{v_E} = 0{,}86$$

konstant für alle Kurven der Schar. Dazu sind sämtliche Beobachtungen herangezogen worden, außer den in Fig. 8 erwähnten noch 21 Aufstiege von großen und 4 von kleinen Ballonen.

Die zusammengehörigen Werte von v_{max} und t liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der v-Achse und einer Parallelen zu t-Achse als Asymptoten. Die Ausgleichung sämtlicher Beobachtungen führt auf die Gleichung:

$$(v_{max} - 3{,}2)\, t_{max} = 13{,}15$$

und

$$t_{max} = \frac{13{,}15}{\sqrt{0{,}4 \times Ag} - 3{,}2}, \tag{8}$$

wenn für v_{max} die oben ermittelte Abhängigkeit vom Auftrieb eingesetzt wird. Die beiden Gleichungen (7) und (8) lassen jetzt das erste Geschwindigkeitsmaximum eines sich in Wasser von 18° unter einem beliebigen gegebenen Auftrieb bewegenden kugelförmigen Körpers vom Radius 1,635 cm berechnen, sowie die Zeit, zu der es eintritt. Für eine andere Flüssigkeit und andere Körpergröße ergeben sich hieraus die Werte von v_{max} und dem dazugehörigen t_{max} durch Anwendung der Gleichungen (4).

Ganz ähnlich verhalten sich die dem ersten Maximum folgenden Minima von v. Es ist:

$$v_{min}^2 = 0{,}36 \times Ag, \tag{7a}$$

$$\frac{v_{min}}{v_g} = 0{,}815,$$

$$(v_{min} - 2)\, t_{min} = 18,$$

$$t_{min} = \frac{18}{\sqrt{0{,}36 \times Ag} - 2}. \tag{8a}$$

Jedoch sind die Abweichungen von der Hyperbel hier größer als bei den Maximis. In Fig. 13 sind die beobachteten Maxima und Minima von v in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen und die beiden Hyperbeln eingezeichnet. Die mit den Ballonen und die mit den Kugeln gewonnenen Beobachtungen unterscheiden sich in keiner Weise. Sie gehorchen alle demselben Gesetz. Hierin kommt die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes exakter zum Ausdruck als oben. Daher erscheint es auch erlaubt, den Teil der Bewegung der Ballone, der nicht mehr beobachtet werden konnte, nach den an den Kugeln gewonnenen Einblicken zu ergänzen, z. B. zum Zwecke der Ausgleichung nach Gleichung (5), und die Geschwindigkeitsschwankungen der Bildung eines Wirbelringes zuzuschreiben.

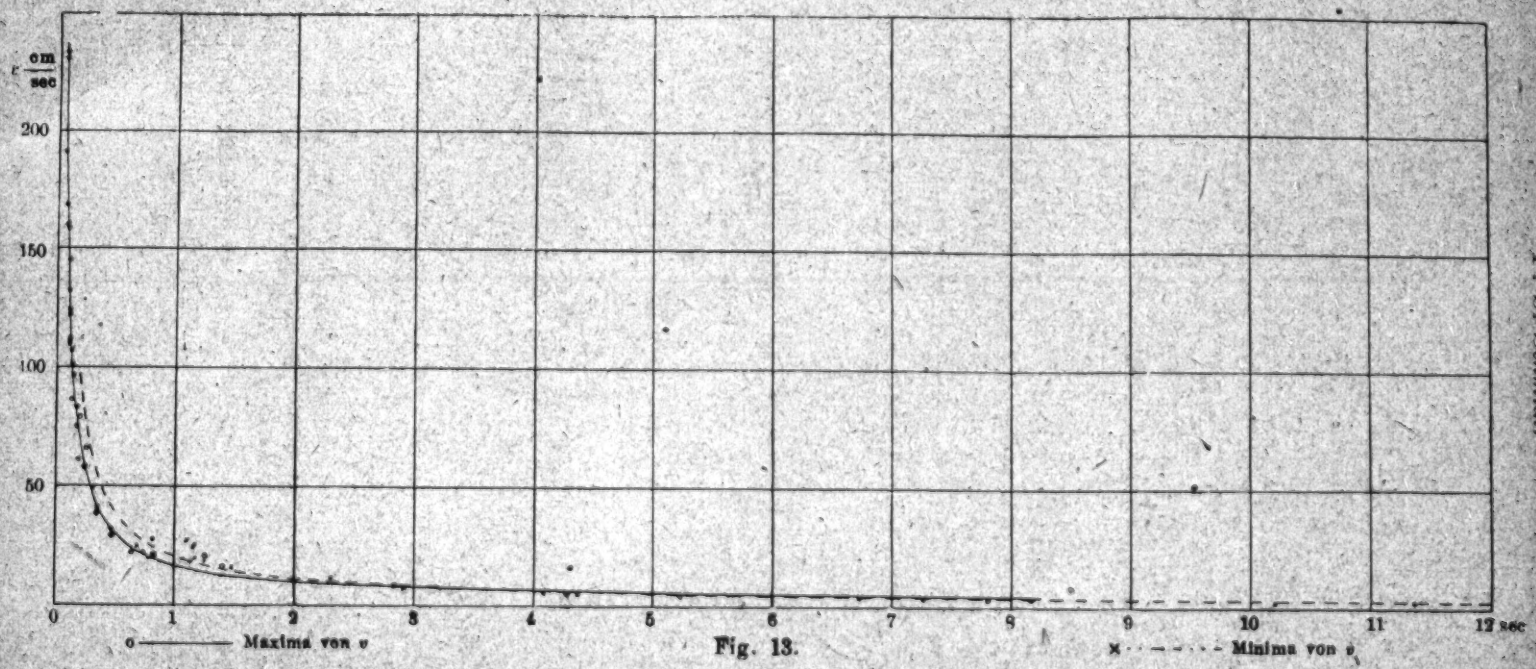

cm/sec
200
150
100
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12 sec
o——— Maxima von v
x - - - - - Minima von v

Fig. 13.

Ob auch bei größeren als den hier verwendeten Auftrieben die Art der Bewegung erhalten bleibt, insbesondere der Durchgang von v durch ein Maximum und Minimum, müßten weitere Versuche entscheiden. Dafür scheint eine Beobachtung zu sprechen, die oft an Freiballonen gemacht worden ist.[1]) Bei ihnen macht sich kurz nach dem Loslassen eine starke Verminderung der Steiggeschwindigkeit bemerkbar, die fast immer der Anlaß zu einer Ballastabgabe ist. Es liegt nahe, auch hier als Ursache die Bildung eines Wirbelringes anzunehmen, nach dessen Trennung vom Ballon dieser dann wieder schneller steigen würde. Der ausgeworfene Ballast könnte daher, falls nicht gerade Hindernisse im Wege sind, gespart werden. Der Verlauf der Zeit-Geschwindigkeitskurve würde allerdings wahrscheinlich etwas anderes sein als eine Extrapolation der Schar in Fig. 8 ergeben würde, da bei den großen für einen Freiballon in Frage kommenden Reynoldschen Zahlen, sofern sie den Wert von etwa 50000 überschreiten, der Widerstandskoeffizient einen erheblich kleineren Wert annimmt, wie die Versuche von Prandtl und Eiffel ergeben haben.

Die Werte von v_{max} nähern sich mit Abnahme des Auftriebes nicht dem Wert Null, sondern 3,2 und die Minima dem Wert 2. Das erscheint darauf hinzuweisen, daß für Auftriebe die nach der Gleichung $Ag = \psi \varrho F v_E^2$ eine kleinere Endgeschwindigkeit ergeben als 3,2 cm/sec, der Strömungsverlauf anders ist als bei den hier gemachten Versuchen. Vielleicht kommt es dann nicht zur Ausbildung eines Wirbelringes und wahrscheinlich wird dann das quadratische Widerstandsgesetz durch ein anderes ersetzt. Der Umstand, daß sich v_{max} und v_{min} nicht demselben Grenzwert nähern bei abnehmendem Auftrieb, wird in Beobachtungsfehlern seinen Grund haben. Der Endgeschwindigkeit 3,2 cm/sec kommt eine Reynoldsche Zahl

$$\frac{r v}{\nu} = 310$$

zu. Nun gilt nach den Beobachtungen von Allen für $R \leqq 127$ die Beziehnung: Widerstand proportional $v^{1,5}$, nach den hier gemachten Beobachtungen für $R \geqq 600$: Widerstand proportional v^2. Die Vermutung liegt also nahe, etwa bei der Zahl

1) Nach einer Mitteilung von Hrn. Geheimrat Wiener.

$R = 300$ den Übergang zwischen beiden Gesetzen zu suchen. Ausdehnung der Versuche in diesen Bereich könnte darüber Aufschluß geben. Diese würden auch zeigen, ob der Andeutung, daß für die kleinsten Reynoldschen Zahlen ($R = 600$), für die hier Geschwindigkeiten beobachtet wurden, ψ nicht mehr konstant ist, sondern mit Abnahme von R wächst (vgl. S. 644), wirkliche Tatsachen zugrunde liegen, oder ob sie nur Ungenauigkeiten in Messungen ihre Entstehung verdankt. Die Änderung, Zunahme von ψ mit Abnahme von R liegt in dem Sinne, wie sie eintreten müßte, wenn mit Abnahme von R der Widerstand proportional einer Potenz von v, die kleiner als 2 ist, würde.

Durch die Gleichungen (7), (8), (7a) und (8a) sind jetzt die Hauptpunkte der Bewegung genau festgelegt, da durch sie für jeden Auftrieb die Größe der Geschwindigkeit im ersten Maximum und Minimum von v, sowie die Zeiten, zu denen sie eintreten, bekannt sind. Ferner kennt man die Endgeschwindigkeit. Im einzelnen geben die Kurven der Schar in Fig. 8 Aufschluß über den Bewegungsverlauf. Sucht man diesen für beliebig gegebene Verhältnisse, so transformiert man den betreffenden Auftrieb auf die von Fig. 8, interpoliert mit ihm die dazugehörige Kurve aus den Kurven der Schar und transformiert diese Kurve auf die gegebenen Verhältnisse. Für Körper von anderer als kugelförmiger Gestalt müßte durch Versuche eine der auf Fig. 8 enthaltenen analoge Schar gewonnen werden.

Die hier gewonnenen Ergebnisse stehen zum Teil in Widerspruch zu denen der eingangs erwähnten Arbeit von Schiller und Döge. Für die stationäre Bewegung hatten sich dort Widerstandskoeffizienten von 0,29 und größer ergeben im Gegensatz zu 0,22 hier. Ferner war gefunden worden, daß die scheinbare Masse des Körpers während der beschleunigten Bewegung, von größeren Werten als die wirkliche Masse bis zu solchen kleiner als diese abnahm, d. h., daß der Widerstand im Anfang größer, dann kleiner war, als er nach dem quadratischen Gesetz sein sollte. Hier dagegen hat sich der Widerstand immer größer als $\psi \varrho F v^2$ gezeigt, solange Beschleunigung vorhanden war. Die Ergebnisse der ersten Arbeit dürften dadurch zustande gekommen sein, daß an Stelle der

wirklichen Endgeschwindigkeit die Geschwindigkeit im ersten Maximum als diese angesehen wurde. Nach einer Mitteilung von Dr. Schiller wurde das Mittel aus den um den größten beobachteten Wert liegenden Geschwindigkeiten als Endgeschwindigkeit benutzt, da, vielleicht wegen nicht ausreichend exakten Arbeiten des dort benutzten einfacheren Verschlußmechanismus, der genaue Charakter der Kurven nicht wie in der vorliegenden Arbeit zutage trat. Tatsächlich haben auch hier die erst später angestellten Kugelversuche, die eine längere Verfolgung der Bewegung gestatteten, als bei den Ballonen in Luft möglich war, darüber Aufschluß gegeben, daß die Geschwindigkeit nach Erreichung des ersten Maximums nicht um dessen Wert herumpendelt, sondern sich schließlich einem erheblich höheren Grenzwert nähert. Aus der Benutzung einer kleineren Geschwindigkeit als die Endgeschwindigkeit ergibt sich aber aus der Gleichung

$$Ag = \psi \varrho F v^2$$

ein zu großer Wert von ψ. Nach den hier gemachten Beobachtungen wird die aus diesen zu großen Werten von ψ berechnete Endgeschwindigkeit von kleineren als den dort benutzten Ballonen bereits erheblich überschritten, ein Beweis dafür, daß der hier nur aus den Endgeschwindigkeiten der Wachskugeln ermittelte Wert von ψ den wirklichen Verhältnissen wenigstens bei den kleinen Ballonen näher kommt als der von Schiller und Döge angegebene kleinste Wert. Es ist wahrscheinlich, daß dies auch für größere Ballone zutrifft, womit dann dort weiter gezogene Folgerungen über Abnahme der scheinbaren Masse bei Bewegung mit Beschleunigung hinfällig würden.

III. Zusammenfassung.

Die Beobachtung kugelförmiger frei fallender oder steigender Körper in ruhender Flüssigkeit ergab:

1. Widerstand nach Erreichung der Endgeschwindigkeit

$$Wg = \psi \varrho F v^2,$$

$$\psi = 0{,}22 \quad \text{für} \quad 600 < R = \frac{vr}{\nu} < 1500.$$

2. Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes für den ganzen Verlauf der Bewegung und infolgedessen Möglichkeit, unter

verschiedenen Bedingungen (Flüssigkeit, Längenmaß) gemachte Beobachtungen auf die gleichen zu transformieren.

3. Vor Erreichung der Endgeschwindigkeit ist

$$W g > \psi \varrho F v^2,$$

und zwar näherungsweise darstellbar durch:

$$W g = \psi \varrho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

die Geschwindigkeit durch: $v = v_E (1 - C^t)$.

4. Die Geschwindigkeit nimmt nicht ständig zu mit der Zeit, sondern nimmt vor Erreichung der Endgeschwindigkeit ein Maximum und ein Minimum an, um nach ihnen unter weiteren Schwankungen der Endgeschwindigkeit zuzustreben. Die zusammengehörigen Werte von Geschwindigkeit und Zeit in den Maximis und Minimis sind durch einfache Beziehungen miteinander verknüpft.

5. Maximum und Minimum der Geschwindigkeit hängen mit Bildung, Wachsen und Trennung eines Wirbelringes hinter dem Körper zusammen, der in einzelnen Fällen sichtbar gemacht werden konnte.

6. Die Beobachtungen ermöglichen die Vorhersage des Verlaufes der Bewegung eines unter konstanter Kraft stehenden Körpers von Kugelform, wenn Radius, Kraft und Flüssigkeit irgendwie gegeben sind, sofern die zu den sich aus dem quadratischen Widerstandsgesetz ergebenden Endgeschwindigkeiten gehörigen Reynoldschen Zahlen

$$R = \frac{vr}{\nu}$$

zwischen 600 und 50000 liegen.

Leipzig, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 23. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

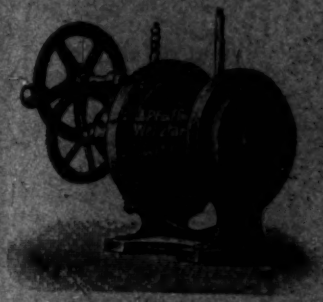
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

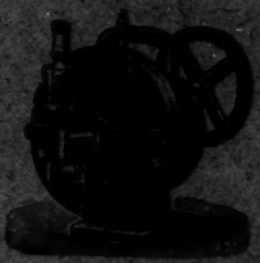
System Pfeiffer, D.R.P.



Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

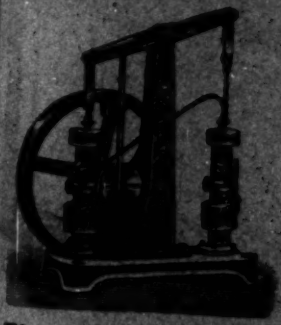
Neukonstruktionen nach Angabe.

System Gaede, D.R.P. angemeldet



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



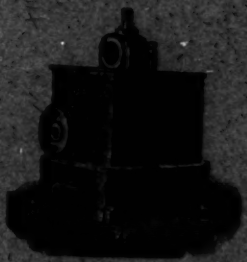
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieberluftpumpen,

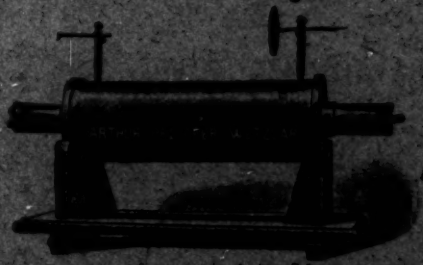
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. P. Lenard. Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III. Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien. Mit Beiträgen von W. Weick und Hans Ferd. Mayer. (Fortsetzung von Band 60, S. 350.) 665
2. R. Gans und A. Fonseca. Die magnetischen Eigenschaften von Nickel-Kupfer-Legierungen. (Nach Messungen von A. Fonseca.) 742
3. H. Haga und F. Zernike. Über thermoelektrische Ströme in Quecksilber 758

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

1920. № 8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien;*

von P. Lenard,

mit Beiträgen von W. Weick u. Hans Ferd. Mayer.[1])

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

(Fortsetzung von Band 60, S. 380.)

Das Vorliegende behandelt zunächst in Abschnitt 6 die Wanderungsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Fällen des Verhaltens der Mediumsmoleküle an der Partikeloberfläche, welche außer dem Falle der elastischen Reflexion noch eine Rolle spielen können — nämlich bei diffuser Reflexion und bei Aufnahme der Mediumsmoleküle in die Oberflächenschicht des Partikels und nachherigem Wiederabdampfen aus derselben —, nachdem die Möglichkeiten des Vorkommens dieser Fälle und ihre Eigentümlichkeiten bereits im Abschnitt 5 eingehend betrachtet worden sind.

Abschnitt 7 gibt eine Zusammenfassung der Gesamtkenntnis über die gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln sowohl mit Rücksicht auf die historische Entwicklung, als auch auf die Anwendungen.

Abschnitt 8 untersucht die Gültigkeitsbereiche der gaskinetischen und der hydrodynamischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln und ihren gegenseitigen Anschluß.

Abschnitt 9 betrifft flüssige Medien und zeigt, in welcher Weise die gaskinetische Behandlung auf dieselben anwendbar ist und wo ihre Grenzen sowohl als die der hydrodynamischen Behandlung liegen. Dazu gehören auch Betrachtungen über den Reibungsvorgang in Flüssigkeiten und Versuche über die Reibung im elektrischen Felde. Die Resultate werden zu eingehender Untersuchung der elektrolytischen Ionen benutzt, was zur Ermittlung von deren Radien und Wassergehalt führt.

1) Die Beiträge betreffen die vorhergegangenen Abschnitte; vgl. diese.

Ionenkern und Wassermoleküle werden zum Teil nicht aneinander-, sondern ineinander gelagert gefunden unter Umständen (bei den kleinsten Ionen, z. B. *H*) mit starker Raumzusammenziehung des Ganzen.

Abschnitt 10 gibt eine übersichtliche Zusammenstellung von Wanderungsgeschwindigkeitsformeln aus den Teilen I—III dieser Untersuchungen.

Abschnitt 6. Wanderungsgeschwindigkeitsberechnung für die Stoßfälle *B*, *C* und *D*.

131. In derselben Weise wie a. a. O. 1900 für den Fall *A* der elastischen Stöße vollkommen glatter Kugeln geschehen, kann die Wanderungsgeschwindigkeit nach den Prinzipien der kinetischen Gastheorie auch für die anderen, im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Fälle berechnet werden, und auch die in den Abschnitten 1 und 2 behandelten Verfeinerungen können angebracht werden. Es kommt nur darauf an, den in Kraftrichtung genommenen mittleren *Geschwindigkeitsverlust des wandernden Partikels beim Zusammenstoße mit einem ruhenden Mediumsmolekül* für die Fälle *B*, *C* und *D* zu berechnen, woraus dann alles Weitere folgt. Der Übersichtlichkeit halber führen wir auch das Endresultat des Falles *A* hier mit auf.

Fall A: Elastische Reflexion bei vollkommen glatter Kugeloberfläche des Partikels.

132. Es ist [Gl. (21)]:

$$\omega_A = \frac{3}{3+\mu}\,\Omega_\mu\,[\omega]_A = \frac{3(1+\mu)}{2\sqrt{\mu}\,(3+\mu)}\,\Omega_\mu\,\frac{K}{D\pi s^2 W}. \tag{52}$$

Fall B: Diffuse Reflexion.

133. Es sei u der augenblickliche Wert der Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels unmittelbar vor einem Zusammenstoß mit einem ruhenden Mediumsmolekül.[1]) Um die nach dem Stoße übrigbleibende Geschwindigkeitskomponente des Partikels in Richtung von u, d. i. in Richtung der treibenden Kraft im Mittel über alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes zu berechnen, nehmen wir — was im Resultate dasselbe, aber in der Durchführung bequemer ist — das Partikel als ruhend und die Mediumsmoleküle mit der Geschwindigkeit u der Kraftrichtung entgegen bewegt an.

1) Vgl. die Durchführung der analogen Überlegung für den Fall *A*: 1900, S. 312.

134. Da der Fall *B* nicht zentrale Kräfte zwischen Partikeln und Mediumsmolekülen beim Zusammenstoß voraussetzt, so werden auch Rotationen des Partikels auftreten; da aber aus Symmetriegründen zu jedem Stoß auch ein in bezug auf die Rotation entgegengesetzt gleich wirkender Stoß vorkommt, wird die Rotationsenergie des Partikels nicht dauernd steigen, sondern nur um einen konstanten Mittelwert schwanken, so daß im Mittel über genügend viele Zusammenstöße ein Übergang von lebendiger Kraft der fortschreitenden Bewegung in Rotationsenergie nicht stattfindet. Man darf daher so rechnen, als griffen alle Stoßkräfte im Schwerpunkt des Partikels an.

135. Wir nennen *Auftreffpunkt* (A, bzw. A_1 in Fig. 2) denjenigen Punkt an der Oberfläche des im groben — aber nicht im einzelnen — kugelförmigen Partikels, an welchem die Berührung mit dem Molekül beim Zusammenstoß erfolgt, und *Auftreffwinkel* α den Winkel zwischen dem durch den Auftreffpunkt gezogenen Kugelradius und der Richtung von u. Infolge der im vorliegenden Falle *B* vorausgesetzten Rauhigkeit der Kugeloberfläche fällt der Kugelradius des Auftreffpunktes im allgemeinen nicht mit der Oberflächennormale dortselbst zusammen, und es ist daher der *Einfallswinkel* β des stoßenden Moleküls im allgemeinen verschieden vom Auftreffwinkel α[1]); es gehören zu sehr nahe demselben Auftreffwinkel α sehr verschiedene Einfallswinkel β.

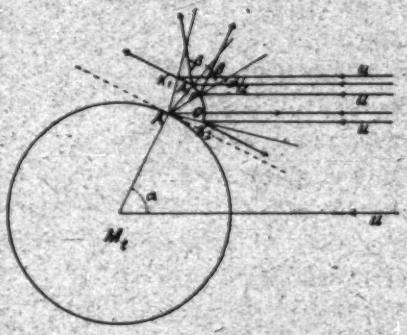


Fig. 2.

Zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeitsänderung beim Stoße (131) ist zuerst das Mittel zu nehmen über alle zu einem gegebenen Auftreffwinkel α gehörigen Einfallswinkel β und dann das Mittel über alle vorkommenden Auftreffwinkel α.

136. Bei einem Stoß mit dem Einfallswinkel β findet Umsetzung der normalen Komponente der Geschwindigkeit,

1) Im Falle *A* fallen β und α zusammen.

$u \cos \beta$, statt unter Gültigkeit des Prinzips des Schwerpunktes und der lebendigen Kraft, während die tangentiale Komponente unbeteiligt bleibt. Man hat daher (vgl. 134), wenn man das Partikel vor dem Stoße ruhend annimmt und das Molekül bewegt (vgl. 133), für die in Richtung der Normalen liegenden Geschwindigkeitskomponenten V des Partikels und v des Moleküls nach dem Stoß nach den genannten beiden Prinzipien die Gleichungen:

$$M u \cos \beta = M_1 V + M v$$

und

$$M u^2 \cos^2 \beta = M_1 V^2 + M v^2.$$

Danach ist mit Elimination von v:

$$V = \frac{2M}{M + M_1} u \cos \beta \tag{53}$$

und die in Richtung von u liegende Komponente davon:

$$V \cos \beta = \frac{2M}{M + M_1} u \cos^2 \beta.$$

War das Partikel mit der Geschwindigkeit u bewegt, das Molekül aber ruhend, so stellt $-V \cos \beta$ die Änderung von u durch den Stoß dar, soweit diese in Richtung von u fällt. Die gesuchte, in Richtung von u nach dem Stoß übrigbleibende Geschwindigkeit ist daher:

$$u' = u - V \cos \beta = \frac{u}{M + M_1} (M_1 - M + 2M \sin^2 \beta). \tag{54}$$

137. Zu jedem Auftreffwinkel α gehören, dem Fall B entsprechend, Abgangsrichtungen der reflektierten Moleküle, die gleichförmig über eine Halbkugel mit dem Auftreffpunkt A als Mittelpunkt verteilt sind. Man erhält diese Verteilung unter Beibehaltung der Annahme der Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel, wenn man den Punkt A bzw. das ihm zugehörige Oberflächenelement des Partikels mit seinen molekularen oder auch gröberen Rauhigkeiten in seiner Wirkung ersetzt durch die vollkommen glatte Fläche $K_1 K_2$ (Fig. 2), welche Teil einer Kugel mit dem Mittelpunkt A ist und ihrer Begrenzung nach nahezu als Kalotte vom Öffnungswinkel $\pi/2$ beschrieben werden kann.[1]) Der Winkelabstand des Ober-

1) Einfache geometrische Überlegung zeigt, daß die Fläche $K_1 K_2$ im allgemeinen nur angenähert die kreisförmige Begrenzung einer Kalotte hat; genau nur bei $\alpha = 0$; bei $\alpha = \pi/2$ geht die Begrenzung in zwei aufeinander senkrechte größte Kreise über. Die Durchstoßpunkte

flächenmittelpunktes P dieser Kalotte von dem der Richtung von u entgegengewandten Punkt O beträgt $\alpha/2$ und der Abstand des letzteren Punktes vom Rande K_2 der Kalotte beträgt $\pi/4 - \alpha/2$. Der jeweilige Einfallswinkel β ist durch den Winkelabstand des auf die Kalotte übertragenen Auftreffpunktes A von O gegeben.

Zur Berechnung des Mittelwertes der nach einem Stoße übrigbleibenden Geschwindigkeitskomponente u' des Partikels kommt es nur auf den Mittelwert von $\sin^2\beta$ an, da alle übrigen Größen in Gl. (54) konstant sind, und es ist (nach 135) bei konstantem α über alle durch die Kalotte gegebenen Winkel β zu integrieren, dann über alle durch die in Bewegungsrichtung vorangehende Halbkugel gegebenen Winkel α, wobei die Gewichte der einzelnen Winkelwerte durch die Größen der Projektionen der betreffenden Oberflächenelemente der Kalotte bzw. Halbkugel auf eine zur Richtung von u senkrechte Ebene gegeben sind, entsprechend gleichförmiger räumlicher Dichte der getroffenen Moleküle. Die Integrationen sind in Näherungen ausführbar, und man findet als Mittelwert von $\sin^2\beta$ nahe $1/3$.[1])

138. Die nach dem Stoß im Mittel übrigbleibende Komponente in Richtung der Kraft ist damit:

$$u' = \frac{u}{M + M_i}\left(M_i - M + \tfrac{2}{3}M\right) = u\,\frac{M_i - \tfrac{1}{3}M}{M_i + M}, \tag{55}$$

---

der Begrenzung mit der durch den Mittelpunkt des Partikels gehenden Zeichnungsebene sind stets durch die beiden um $\pi/2$ voneinander abstehende Punkte K_1 K_2 gegeben. Wir nennen die Fläche K_1 K_2 im übrigen stets kurz Kalotte, nehmen aber bei den im folgenden auszuführenden Integrationen ihre Begrenzung tatsächlich nicht genau kreisförmig an, sondern lassen Abweichungen hiervon eintreten, welche den soeben beschriebenen in Annäherung gleichkommen, was allerdings auch zur Vereinfachung der Rechnung geschieht. Daß hierbei die Annahme B für die größeren α nicht genau, sondern nur angenähert gewahrt bleibt, ist nicht als wesentlicher Mangel unserer Rechnung zu betrachten, da die Annahme B der allseitig gleichmäßig verteilten diffusen Reflexion an sich schwerlich jemals exakt erfüllt zu denken ist, sondern vielmehr nur als Extremfall einer Abweichung von elastischer Reflexion an vollkommen glatter Kugel Interesse hat.

1) Dieselbe Mittelnahme durch Integration, jedoch nur über die Halbkugel allein, war für die Annahme A a. a. O. 1900 auszuführen gewesen (vgl. S. 312 dort); es ergab sich dort $^1/_2$ als Mittelwert von $\sin^2\beta$. Der Unterschied zwischen den Annahmen A und B ist also im Resultate nicht groß.

und der Faktor, welcher bei jedem Zusammenstoß des wandernden Partikels mit einem ruhenden Mediumsmolekül im Mittel über alle vorkommenden Stoßarten zum augenblicklichen Wert u der Wanderungsgeschwindigkeit hinzutritt, ist also:

$$\mu' = \frac{M_t - \frac{1}{3}M}{M_t + M} = \frac{4\mu - 1}{3}. \quad (56)$$ [1])

139. Hiermit leiten wir zunächst die Wanderungsgeschwindigkeit in derselben Weise ab wie a. a. O. 1900, nämlich unter Annahme einheitlicher Molekulargeschwindigkeit und Weglänge und ohne Berücksichtigung des Einflusses der Bewegung der Mediumsmoleküle auf die Stoßwirkung.

Es ist die Verminderung der augenblicklichen Wanderungsgeschwindigkeit u durch einen Zusammenstoß im Mittel $u - u\mu' = u(1 - \mu')$. Im Falle des stationären Zustandes, der bei fortdauernder Wirkung des Kraftfeldes statthat, wird diese Verminderung ausgeglichen durch die zwischen je zwei Zusammenstößen eintretende Beschleunigung b durch das Kraftfeld. Es ist daher:

$$b \cdot [\tau] = u(1 - \mu'), \quad (57)$$

wo $b = K/M_t$ und $[\tau] = L_t/W_t$. Die gesuchte beobachtbare Wanderungsgeschwindigkeit $[\omega]$ ist die mittlere Geschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung des Partikels zwischen zwei Zusammenstößen:

$$[\omega] = u\mu' + \tfrac{1}{2}b[\tau], \quad (58)$$

oder mit dem aus Gl. (57) folgenden Wert von u:

$$[\omega] = b[\tau]\frac{1 + \mu'}{2(1 - \mu')}. \quad (59)$$

Da (mit Benutzung der Gleichung für L_t, Teil II, S. 401):

$$\left\{\begin{aligned} b \cdot [\tau] &= \frac{K}{M_t} \cdot \frac{L_t}{W_t} = \frac{K}{M_t} \cdot \frac{1}{N\pi s^2 \sqrt{W^2 + W_t^2}} \\ &= \frac{K}{M} \frac{1 - \mu}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{N\pi s^2 W} = \frac{K}{D\pi s^2 W} \frac{1 - \mu}{\sqrt{\mu}}, \end{aligned}\right. \quad (60)$$

so wird:

$$[\omega] = \frac{K}{D\pi s^2 W} \frac{1 - \mu}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1 + \mu'}{2(1 - \mu')}. \quad (61)$$

---

1) Im Falle A war dieser Faktor $\mu = \frac{M_t}{M_t + M}$ [Gl. (8a)].

Die Gl. (58) bis (61) sind ohne weiteres allgemein für alle Stoßfälle gültig, da wir bei der Ableitung die Größen μ und μ' gesondert gehalten haben. Man sieht auch, wie

$$\mu = M_t/(M_t + M)$$

nur durch Gl. (60) in Gl. (61) eintritt, wobei es nur die Rolle eines abkürzenden, für alle Fälle geltenden Umrechnungsfaktors von M_t auf M spielt, während μ' die bei Gl. (8a) und (56) definierte Bedeutung hat und daher je nach dem vorliegenden Stoßfalle verschiedene Werte annehmen muß. Für den Fall *A* (elastische Stöße bei glatt kugelförmigem Partikel) ist $\mu' = \mu$ [Gl. (8a)], und es geht dann Gl. (61) in Gl. (1) über. Für den hier zu behandelnden Fall *B* gilt für μ' die Gl. (56). Es wird damit:

$$[\omega]_B = \frac{1}{2}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1+2\mu}{2\sqrt{\mu}}\,. \quad (62)$$ [1])

Für große Partikel ($\mu = 1$) wird dies:

$$[\omega]_{B(\mu=1)} = \frac{3}{4}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,. \quad (62a)$$

140. Zur Berücksichtigung der Ungleichheiten der molekularen Geschwindigkeiten und Weglängen und des Einflusses der Bewegung der Mediumsmoleküle auf die Stoßwirkung, welche in $[\omega]$ fehlt, ist die auf die Grundlagen zurückgehende Gl. (20) vorhanden, worin im Bruche $\mu/(1-\mu)$ im Fall *B* μ durch μ' zu ersetzen ist [Gl. (56)]. Der vollständige Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit in diesem Falle *B* wird so:

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\,b\left[\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} + \frac{4\mu-1}{4(1-\mu)}\,\bar{\tau}\right], \quad (63)$$

oder mit Gl. (60):

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[(1-\mu)\,\frac{\bar{l}^2}{\bar{l}} + \frac{4\mu-1}{2}\,\bar{l}\right]. \quad (64)$$

---

1) Wählt man zur Einsetzung in Gl. (28) für $b[\tau]$ und μ' die ersten in den Gl. (60) bzw. (56) gegebenen Formen, so erhält man:

$$[\omega]_B = \frac{3}{4}\,K\,\frac{L_t}{W_t}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{3M_t}\right). \quad (62b)$$

Man sieht hier die beiden Massen M und M_t wieder unsymmetrisch auftreten, wie im Falle *A* [vgl. Gl. (1)], nur in anderer Weise. Vgl. dazu die Note zu 86.

Diese Form ist unmittelbar zur numerischen Berechnung brauchbar, da $\bar{l}$ und $\bar{l}^2$ bekannt sind; es ist $\bar{l} = \bar{r}_s/[r] = 1$, $\bar{l}^2 = \overline{r_s^2}/[r]^2 = 8/\pi$ [Gl. (51)].

Man kann — analog Gl. (52) — auch setzen:

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\,\Omega_\mu'\,[\omega]_B, \tag{65}$$

worin demnach:

$$\Omega_\mu' = \frac{2(1-\mu)}{2\mu+1}\,\frac{8}{\pi} + \frac{4\mu-1}{2\mu+1}\,\text{[1]} \tag{66}$$

analog Ω_μ im Falle A die Berücksichtigung der molekularen Ungleichheiten besorgt, während der Faktor $3/(3+\mu)$ wieder den Einfluß der ungeordneten Bewegung auf die Stoßverluste darstellt.

141. Da der Fall B hauptsächlich für große Partikel in Betracht kommt, so ist vor allem der Sonderfall $\mu = 1$ wichtig, welcher die einfache Form liefert[2]):

$$\omega_{B\,(\mu=1)} = \frac{9}{16}\,\frac{K}{D\,\pi\,s^3\,W}. \tag{67}$$

Im Vergleich zum Falle A ist also bei $\mu = 1$, und angenähert überhaupt bei nicht sehr kleinen Partikeln[3]):

$$\omega_B = \tfrac{3}{4}\,\omega_A. \tag{68}$$

Fall C: Aufnahme der auftreffenden Mediumsmoleküle in die Partikeloberfläche und späterer Wiederaustritt bei rotierendem oder gut wärmedurchlässigem Partikel.

142. Es kommt hier wieder nur auf die Neuberechnung der nach einem Zusammenstoß des Partikels mit einem ruhenden Mediumsmolekül im Mittel übrigbleibenden Geschwindigkeitskomponente an. Dabei dürfen alle Stoßkräfte durch den Schwerpunkt des Partikels gerichtet angenommen werden, da — wie bereits beim Falle B auseinandergesetzt — kein dauernd einseitig gerichteter Übergang von lebendiger Kraft der fort-

1) Man kann Ω_μ' auch aus der Gleichung für Ω_μ erhalten [Gl. (8)], wenn man dort μ durch μ' ersetzt.

2) Es ist $\Omega_1' = 1$; $\Omega_{0,9}' = 1{,}11$.

3) Es ist für den Fall B immer zu berücksichtigen, daß die Herleitung des für ihn charakteristischen Faktors $^3/_4$ nur durch angenäherte (wohl nur die erste Zahlenstelle verbürgende) Integrationen erfolgte, andererseits aber auch, daß genaue Verwirklichung dieses Falles der ganz gleichförmig diffusen Reflexion wohl niemals zu erwarten ist.

schreitenden Bewegung in die der Rotation bei den nicht zentralen Stößen stattfindet

Ist daher — mit derselben Bezeichnung wie oben im Fall *B* — u der augenblickliche Wert der Wanderungsgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoße, u' derselbe nach dem Stoße, so gilt nach dem Schwerpunktsprinzip:

$$u M_1 = u' M_1 + u' M,$$

da Partikel und Molekül nach dem Stoße gemeinsame Geschwindigkeit haben, woraus:

$$u' = u \frac{M_1}{M_1 + M}.$$

Da dies Resultat unabhängig ist vom Auftreffwinkel, so gilt es auch bereits als Mittelwert über alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes, und da dieser Mittelwert identisch ist mit dem für den Fall *A* geltenden entsprechenden Wert, $u' = u\mu$ [Gl. (8a)], so fällt auch der Wert der Wanderungsgeschwindigkeit identisch aus. Es ist also:

$$\omega_C = \omega_A. \tag{69}$$

Fall D: Senkrechtes Abgehen der Moleküle bei nichtrotierendem Partikel.

143. Die bei der Aufnahme des Mediumsmoleküls in das Partikel auftretende Geschwindigkeitsänderung des letzteren ist hier dieselbe wie im vorigen Falle, nämlich von u auf $u' = \mu u$; jedoch kommt nun außerdem — wie im vorigen Abschnitt unter *D* überlegt — auch beim Wiederabgehen des Moleküls vom Partikel noch eine wirksame Geschwindigkeitsänderung hinzu, wobei wir annehmen, daß die bei der Aufnahme verlorene lebendige Kraft beim Abgehen vollständig wieder ersetzt wird (vgl. 127). Es sind die lebendigen Kräfte:

Des Partikels vor der Aufnahme des Moleküls $\frac{M_1 u^2}{2}$,

nachher $\frac{M_1 \mu^2 u^2}{2}$,

des Moleküls vor der Aufnahme ins Partikel 0,

nachher $\frac{M \mu^2 u^2}{2}$,

insgesamt also vor der Aufnahme $\frac{M_1 u^2}{2}$,

nachher $\frac{(M_1 + M)\mu^2 u^2}{2} = \frac{M_1 \mu u^2}{2}$.

Der Verlust an lebendiger Kraft bei der Aufnahme ist also:

$$\frac{M_i u^2}{2}(1-\mu),$$

und diesem Verlust soll die Zunahme beim Abgehen gleich sein. Um letztere zu berechnen, brauchen nur Geschwindigkeiten relativ zum Schwerpunkt der Gesamtmasse $M_i + M$ betrachtet zu werden. Diese Geschwindigkeiten sind vor dem Abgehen Null, nachher seien sie V beim Partikel und v beim Molekül, beide zentral und vom Gesamtschwerpunkt weg gerichtet. Die Zunahme der lebendigen Kraft ist also:

$$\frac{M_i V^2}{2} + \frac{M v^2}{2},$$

wonach die gestellte Bedingung für V und v ist:

$$M_i V^2 + M v^2 = M_i u^2 (1-\mu). \tag{70}$$

Außerdem muß für das Abgehen des Moleküls das Schwerpunktsprinzip gelten:

$$M_i V + M v = 0. \tag{71}$$

Aus (70) und (71) findet man:

$$V = u(1-\mu) \text{ und } v = u\mu.$$

Es erhält also das Partikel beim Abgehen des Moleküls den Geschwindigkeitszuwachs $u(1-\mu)$ in Richtung seines Radius, wovon beim Auftreffwinkel α die Komponente in Richtung von u, d. i. in Wanderungsrichtung, $u(1-\mu)\cos\alpha$ ist. Dieser Zuwachs ist der ursprünglichen Geschwindigkeit u, welche zur Aufnahme des ruhenden Moleküls geführt hat, entgegen gerichtet. Es wird also die in Wanderungsrichtung genommene Geschwindigkeit, welche nach der Aufnahme des Moleküls μu ist, nach dem Wiederabgehen des Moleküls $\mu u - u(1-\mu)\cos\alpha$ sein.

144. Hiervon ist noch das Mittel über alle vorkommenden Auftreffwinkel α, je nach ihrer Häufigkeit, zu nehmen. Dabei kommt es, wie man sieht, nur auf den Mittelwert von $\cos\alpha$ an, und dieser ergibt sich als Resultat einer einfachen Integration zu $\frac{2}{3}$. Es ist also die gesamte Geschwindigkeitsänderung des Partikels in Kraftrichtung im Mittel über alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes mit einem ruhenden Molekül — dessen Wiederabgehen einbegriffen — im Falle D

$$\text{von } u \text{ auf } \mu u - \frac{2}{3}(1-\mu)u = u \cdot \frac{5\mu - 2}{3},$$

und der für diesen Fall charakteristische, diese Änderung bestimmende Faktor ist also:

$$\mu'' = \frac{5\mu - 2}{3} \tag{72}$$

145. Mittels dieses Faktors erhält man zunächst die Wanderungsgeschwindigkeit ohne Berücksichtigung der molekularen Ungleichheiten und des Einflusses der molekularen Bewegung auf die Stoßverluste, indem man ihn in Gl. (61) an Stelle des für den dortigen Fall geltenden Faktors μ' setzt:

$$[\omega]_D = \frac{1}{2}\,\frac{K}{D\pi s^3 W}\,\frac{1+5\mu}{5\sqrt{\mu}}\,. \tag{73}$$

146. Ebenso ergibt sich mittels μ'' der vollständige Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit analog Gl. (63) und (64):

$$\begin{cases} \omega_D = \dfrac{3}{3+\mu}\,b\left[\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\overline{\tau^3}}{\bar{\tau}} + \dfrac{\mu''}{1-\mu''}\,\bar{\tau}\right] \\ \quad = \dfrac{3}{3+\mu}\,\dfrac{K}{D\pi s^3 W}\,\dfrac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[(1-\mu)\,\dfrac{\overline{t^3}}{\bar{t}} + \dfrac{10\mu-4}{5}\,\bar{t}\right], \end{cases} \tag{74}$$

was auch geschrieben werden kann:

$$\omega_D = \frac{3}{3+\mu}\,\Omega''\mu\,[\omega]_D\,, \tag{75}$$

wenn man — mit Einführung der Werte $\bar{t} = \bar{\tau}_b/[\tau] = 1$ und $\overline{t^2} = \overline{\tau_b^2}/[\tau]^2 = 8/\pi$ [Gl. (51)] — setzt:

$$\Omega''_\mu = \frac{5(1-\mu)}{5\mu+1}\,\frac{8}{\pi} + \frac{10\mu-4}{5\mu+1}\,. \tag{76}$$ [1])

147. Insofern der Fall *D* nur für große Partikel in Betracht kommt (vgl. Abschn. 5), für welche μ sehr nahe 1 ist, ist Hauptresultat in diesem Falle die Sondergleichung [2])

$$\omega_{D\,(\mu=1)} = \frac{9}{20}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,, \tag{77}$$

oder auch

$$\omega_D = \frac{3}{5}\,\omega_A\,. \tag{78}$$

Abschnitt 7. Zusammenfassendes aus den Abschnitten 1—6 über die gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln.

148. Wir haben im 5. Abschnitt unter *A*, *B*, *C*, *D* vier verschiedene Fälle für die Wechselwirkung zwischen wandern-

1) Ω''_μ folgt auch aus der Gleichung für Ω_μ [Gl. (8)], wenn man μ durch μ'' ersetzt.

2) Es ist $\Omega_1'' = 1$, $\Omega_{0,9}'' = 1{,}14$.

dem Partikel und Mediummolekülen betrachtet und haben im 6. Abschnitt die zugehörigen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln sowohl unter vereinfachenden Bedingungen (Werte $[\omega]$) als auch mit Berücksichtigung sämtlicher ersichtlich mitwirkenden Umstände entwickelt (Werte ω). Dabei haben sich keine sehr großen Unterschiede in den Resultaten ergeben; dieselben stehen äußerstenfalls nur im Verhältnis 3:5 voneinander ab. Der am extremsten liegende Fall D betrifft aber nur sehr große Partikel und liegt schon deshalb fast außerhalb des Gültigkeitsbereichs der gaskinetischen Formeln. Im übrigen stimmen die Fälle A und C vollkommen miteinander überein und B weicht nur im Verhältnis 4:3 davon ab. Da die betrachteten Fälle alle bisher durch die Erfahrung angezeigten Möglichkeiten der genannten Wechselwirkung zwischen sich nehmen, so kann hiernach behauptet werden, daß unsere gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln für alle Fälle innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches (vgl. Abschn. 8) ausreichen, um die Wanderungsgeschwindigkeit in genügend brauchbarer Annäherung auch dann zu berechnen, wenn die Oberflächenbeschaffenheit des Partikels nicht genau bekannt ist. Ebenso wird man auch umgekehrt aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten bei bekannter Kraft mit genügender Sicherheit den Partikelradius ($R = s - r$) berechnen können.

Dabei ist zu beachten, daß die Masse des Partikels keine wesentliche Rolle spielt, daß sie also auch nicht genau bekannt zu sein braucht, sobald es nur sicher steht, daß sie nicht etwa kleiner als Mediumsmolekülmasse ist, daß also nicht z. B. freie Elektronen vorliegen. Ist letzteres erst ausgeschlossen[1]), so kann in sukzessiver Annäherung aus vorläufig (mit roh geschätzter Masse) berechnetem Partikelradius bei genügender Kenntnis der materiellen Beschaffenheit des Partikels die Masse

1) Die Unterscheidung zwischen freien Elektronen und materiellen Partikeln irgendwelcher Größe ist durch probeweise Berechnung des Partikelradius mittels angenommener Werte von μ immer leicht zu treffen, sobald nur etwa intermittierend freie Elektronen ausgeschlossen sind. Liegt der letztere Fall vor, so muß die Natur der mitwirkenden Elektrizitätsträger bekannt sein, um dann die in Teil I und II entwickelten Formeln zu benutzen, welche mit besonderer Berücksichtigung der wechselnden Zustände entwickelt sind. (Vgl. auch die Zusammenstellung, Abschn. 10.)

desselben so weit genau ermittelt werden, daß damit der richtige Wert des Radius berechenbar wird.[1])

149. Die angenäherte Unabhängigkeit der Wanderungsgeschwindigkeit von der Partikelmasse — falls diese nur nicht viel kleiner ist als die Molekülmasse des Mediums — war übrigens schon aus meiner ersten Veröffentlichung über den Gegenstand klar hervorgegangen (a. a. O. 1900; vgl. die Fälle ω_a, ω_b, ω_c dort, S. 313, 314), und dieses Resultat ist dann auch öfter hervorgehoben worden als im Gegensatz stehend zu den Resultaten anderer Autoren, die später Wanderungsgeschwindigkeitsformeln von nur so grober Annäherung in Gebrauch gesetzt haben — Langevin, J. J. Thomson[2]) —, daß nicht einmal dieser Hauptumstand der genannten Massenabhängigkeit erkennbar wurde, sondern im Gegenteil die Wanderungsgeschwindigkeit ebensosehr von der Masse als vom Radius des Partikels abhängig erschien. Beispiele der Fehlschlüsse und Widersprüche, zu welchen die Anwendung dieser — in solcher Beziehung am treffendsten als falsch zu bezeichnenden — Formeln geführt haben, habe ich bereits angegeben.[3])

1) Das Resultat wird in diesem Falle unbekannter Partikelmasse um so genauer, je größer das Partikel nach Masse und Radius ist. Bei Partikeln, die nur ebenso groß sind als die Mediumsmoleküle oder kleiner, wird die Genauigkeit um so mangelhafter, je weniger ein Zusammenhang zwischen Masse und Radius des Partikels sichersteht.

2) Es sind hier die ursprünglich von diesen Autoren (1903 bis 1906) angegebenen Formeln gemeint, die große Verbreitung gefunden haben und noch heute in Lehr- und Handbüchern eine Rolle spielen. Erst noch später haben auch diese Autoren ihre Gleichungen auf bessere Massenberücksichtigung eingerichtet (J. J. Thomson 1909, Langevin 1905; siehe die Zitate in den Noten zu Gl. [80] und [81]). Daß die dabei von Herrn Langevin gleichzeitig vorgenommene Einführung von Fernkräften nicht als Fortschritt erscheinen kann, wurde bereits oben auseinandergesetzt (Abschn. 5).

3) Vgl. Teil I, S. 395, Fußnote 2 u. S. 402, Fußnote 2, auch bereits A. Becker, Ann. d. Phys. 36, S. 218, Fußnote. Vom Gebrauch dieser Formeln kommt auch offenbar der heute noch sehr übliche, unter Umständen irreführende Ausdruck „schwere" Träger („Ionen"), wo man langsam wandernde, also *große* Träger meint und in Wirklichkeit auch nur über die Größe, nicht über die Masse direkt orientiert ist. Wirklich schwere Träger, die kleinen Radius haben, wie z. B. *Cs*- oder *RaA*-Atome, würden nach dieser Namengebung als „leicht" zu bezeichnen sein, da sie schnell wandern, eine Bezeichnung, die so zutreffend ist, wie jene Formeln.

150. Alle unsere Resultate sind — mittels ausdrücklich angegebener mechanischer Prinzipien — *aus den Grundvorstellungen* der kinetischen Gastheorie hergeleitet; sie sind deshalb — wenn nicht Fehler in der Herleitung gefunden werden — ohne weiteres als ebenso zutreffend anzusehen, als diese Grundvorstellungen und Prinzipien zutreffend sind. Ein anderer, neuerdings bevorzugter Weg der Herleitung gaskinetischer Wanderungsgeschwindigkeitsformeln beruht auf der *Anknüpfung an die bereits vorhandenen Diffusionsformeln* der kinetischen Gastheorie. Die Möglichkeit dieser Anknüpfung lag bereits bei C. Maxwells Behandlungsweise der Diffusion unmittelbar vor[1]), und es ist auch ohne weiteres leicht einzusehen, daß ein Zusammenhang bestehen muß zwischen der Geschwindigkeit der Ausbreitung einer fremden Molekülsorte in einem Gase vermöge ihres Partialdruckgefälles einerseits (Diffusion) und vermöge einer äußeren Kraft andererseits (Wanderung). Die Herstellung des Zusammenhangs ist aber, wenn man exakte Durchführung verlangt, nicht so einfach, als angenommen worden ist. Es wird bei Anwendung der Gleichung

$$\omega = \Delta N \frac{K}{P}, \tag{79}$$

auf welche man sich dabei stützt (Δ = Diffusionskoeffizient der Partikel im Medium, P = Druck des gasförmigen Mediums), übersehen, daß beim Wanderungsgeschwindigkeitsproblem beschleunigte Bewegung des Partikels längs seiner freien Wege vorliegt, während beim Diffusionsproblem die Bewegung gleichförmig ist.[2])

Unter den neueren Autoren, die diesen Weg über die Diffusion verfolgt haben, findet man Herrn Townsend[3]) hervorgehoben mit dem Anschein besonders exakter Gültigkeit seiner

1) C. Maxwell, Phil. Mag. (4) 19. S. 19. 1860; Coll. Papers 1. S. 392. — Selbstverständlich lag das Wanderungsgeschwindigkeitsproblem an sich zur damaligen Zeit noch außer Gesichtsfeld; es wird daher auch bei Maxwell nicht behandelt, sondern es werden nur die Kräfte betrachtet, die durcheinander diffundierende Gasmassen aufeinander ausüben.

2) Vgl. hierüber Herrn H. F. Mayers in diesen Annalen nachfolgende Arbeit, betreffend Herrn Langevins ebenfalls von der Diffusionstheorie ausgehende Behandlung des Wanderungsgeschwindigkeitproblems.

3) S. P. Townsend, Proc. Roy. Soc. 86. S. 197. 1912.

Resultate.[1]) Es ist hierzu — ganz abgesehen von der soeben hervorgehobenen feineren Schwierigkeit — das Folgende zu bemerken: 1. Herr Townsend leitet die Wanderungsgeschwindigkeit zuerst ohne Berücksichtigung der aufhäufenden Wirkung der Trägheit des Partikels ab und sucht diese Vernachlässigung dann durch Hinzufügung eines Zusatzgliedes zur freien Weglänge des Partikels auszugleichen. Sein Resultat ohne Berücksichtigung der Trägheit ist identisch mit der älteren Formel von Herrn Langevin (1903), ist also für $\mu = 1$ (größere Partikel) ebenso grundfalsch als diese Formel[2]); für andere Werte von μ ist sie aber ebenfalls nicht voll zutreffend, z. B. für $\mu = 0$ (freie Elektronen) im Verhältnis 1,273 : 1 zu klein, da nur die Ungleichheiten der Weglängen, nicht die der Geschwindigkeiten berücksichtigt werden. 2. Durch Berücksichtigung der Trägheit in der angegebenen Weise gelangt Herr Townsend zu einer Formel, welche zwar nicht für $\mu = 1$, jedoch für $\mu = 0$ (freie Elektronen) grundfalsche Resultate gibt (im Verhältnis 1 : 0 zu klein). Angenähert richtig sind die Resultate für $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = 1$ (molekulare und größere Partikel), jedoch die Annäherung ist nicht besser als die meiner 12 Jahre älteren Formel (a. a. O. 1900), die aber außerdem auch bei $\mu = 0$ brauchbar ist (vgl. die folgende Zusammenstellung). Ein Fortschritt gegenüber bereits Vorhandenem ist auch sonst in Herrn Townsends Arbeit nicht zu erkennen; auch sein Ergebnis, daß die Berücksichtigung der Weglängenungleichheiten einen Faktor 2 zur Wanderungsgeschwindigkeit liefere, findet sich bereits in Herrn Langevins soeben erwähnter Arbeit von 1903, ist aber keineswegs allgemein gültig, sondern darf nur auf freie Elektronen ($\mu = 0$) bezogen werden.[3])

151. Die folgende Zusammenstellung (Tab. III) gibt eine Vergleichung der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln verschiedener Autoren und zeigt, in welchem Maße die im vorliegenden kenntlich gemachten Mängel der betreffenden Ableitungen[4])

1) Vgl. E. Marx, „Handbuch der Radiologie" Bd. IV, S. 719. 1917.

2) Vgl. die Fußnote zur Gl. (81).

3) Denn es ist der von uns entwickelte Faktor Ω_μ, welcher hierüber Auskunft gibt, von μ abhängig (vgl. Abschn. 1). Für $\mu = 0$ ist $\Omega_\mu = 8/\pi = 2{\cdot}546$ (nicht 2, weil in Ω_μ auch die Berücksichtigung der Geschwindigkeitsungleichheiten einbegriffen ist; für $\mu = 1$ ist $\Omega_\mu = 1$).

4) Zu Langevin vgl. auch besonders Herr H. F. Mayers in diesen Annalen nachfolgende Arbeit.

Tabelle III.

Faktoren zur Richtigstellung der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln.

Formel von:		Faktoren			
		Allgemein: ($\mu = \frac{M_l}{M_l + M}$ beliebig)	Sonderfälle: $\mu = 0$ (Elektronen)	$\mu = 1/2$ (Moleküle)	$\mu = 1$ (große Partikel)
Lenard 1900	$\frac{\omega}{[\omega]} =$	$\frac{8\Omega_\mu}{3+\mu}$	2,546	1,30	$3/4$
J. J. Thomson 1906 (= Drude 1900)	$\frac{\omega}{\omega_{Th}} =$	$\frac{8\Omega_\mu}{3+\mu}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}$	2,546	3,9	∞
Langevin 1905 (mit Fortlassung der Fernkräfte)	$\frac{\omega}{\omega_{Lv}} =$	$\frac{2\Omega_\mu}{3+\mu}(1+\mu)$	1,69	1,3	1
Townsend 1912	$\frac{\omega}{\omega_{Td}} =$	$\frac{8\Omega_\mu}{3+\mu}\,\frac{1+\mu}{2\mu}$	∞	1,67	$3/4$

in den Endresultaten zum Vorschein kommen. Es wird in allen verglichenen Formeln der Fall vollkommen elastischen Stoßes glatt kugelförmiger Massen (Fall *A*) vorausgesetzt. Besonders berücksichtigt sind in unserer Zusammenstellung: die Formel von Herrn J. J. Thomson (ω_{Th}), weil sie die meist bekannt gewordene und benützte ist, die neuere Formel von Herrn Langevin (1905) (ω_{Lv}), weil sie — wohl wegen der weitausholenden Ableitung, an welche sie geknüpft ist — als besonders vollkommen hingestellt worden ist, die Formel von Herrn Townsend (ω_{Td}), weil die Behandlung des Problems durch diesen Autor neuerdings in einem umfassenden Handbuch in den Vordergrund gestellt wird, endlich meine Formel von 1900 ($[\omega]$), weil sie die älteste von brauchbarer Annäherung ist. Es sind dies auch gleichzeitig die am meisten voneinander verschiedenen Formeln; andere bekannt gewordene Formeln — Langevin 1903[1]), J. J. Thomson 1909[2]), Wellisch 1909[3])

1) Vgl. Fußnote zur Gl. ω_{Lv}.

2) J. J. Thomson, Cambr. Phil. Soc. 15. S. 375. 1909. Es ist dies eine Verbesserung der gewöhnlich unter dem Namen von J. J. Thomson verbreiteten Formel ω_{Th} (vgl. die Fußnote zu dieser).

3) Wellisch, Phil. Trans. 209. S. 249. 1909. Siehe über diese Formel die Fußnote zur Gl. ω_{Lv}.

Reinganum 1910 und 1912[1]) — bieten nichts wesentlich Abweichendes und ändern nichts an den am Schlusse dieses Abschnittes zu machenden allgemeinen Bemerkungen; wir betrachten sie in den Fußnoten.

Es ist:

(80) (J. J. Thomson 1906) $\omega_{Th} = \frac{1}{2}\frac{K L_i}{M_i W_i} = \frac{1}{2}\frac{K}{D\pi s^2 W}\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}}$,

übrigens nur eine Wiederholung der älteren, historisch schätzbaren Formel von Drude (1900)[2]);

(81) (Langevin 1905) $\omega_{Lv} = \frac{3}{4}\frac{K}{D\pi s^2 W}\frac{1}{\sqrt{\mu}}$[3]);

---

1) M. Reinganum, Dtsch. Phys. Ges. 12. S. 1034. 1910; Phys. Zeitschr. 12. S. 575 u. 666. 1911; Ann. d. Phys. 38. S. 649. 1912. Vgl. dazu die Fußnote zur Gl. ω_{Lv}.

2) Vgl. die Fußnote zur Einleitung des Vorliegenden. Obiges ist die gewöhnlich zitierte und benutzte „Formel von J. J. Thomson". Ein Eingehen auf ihren Ursprung habe ich nirgends vorgefunden; sie wird in der englischen und in der deutschen Literatur meist als „wohlbekannt" angegeben, was an sich schon anzeigt, daß man versäumt hat, ihre Ableitung oder das Datum ihrer ersten Veröffentlichung einzusehen (man würde sonst auch bemerkt haben, auf wie schlechten Füßen die Formel sachlich wie historisch steht). Im „Handbuch der Radiologie" (Bd. IV, S. 718) wird J. J. Thomson, „Cond. of El. thr. Gases", 1. Aufl. als Quelle zitiert (Cambr. 1903); ich habe aber nicht finden können, daß das zutreffe. Vielmehr findet sich die Formel erst in der zweiten Auflage dieses Werkes (Cambr. 1906, S. 74), und da sie dort ohne weitere Zitate erscheint, muß wohl 1906 als das Ursprungsjahr dieser „Formel von J. J. Thomson" angesehen werden, wie es oben geschehen ist. Die Formel vernachlässigt nicht nur die molekularen Ungleichheiten und anderes, sondern auch vollständig die aufhäufende Wirkung der Trägheit; letzteres ist ihr gröbster Mangel (vgl. Teil I, Fußnote 2, S. 402). Daß Herr J. J. Thomson nachträglich (Cambr. Phil. Soc. 15. S. 375. 1909) eine verbesserte Formel abgeleitet hat, wurde bereits oben erwähnt; dieselbe leistet jedoch immer noch weniger als meine Formel von 1900, und sie ist daher, da sie dabei so viel später erschien, im obigen nicht weiter berücksichtigt.

3) Die Formel folgt aus den auf S. 272. 250. 266 oder S. 281 des Originals (Ann. de Chim. et de Phys. [8] 5. 1905) angegebenen Gleichungen, *wenn man die Fernkräfte wegläßt*. Letzteres ist jedenfalls notwendig, um die Vergleichung mit den anderen Formeln treffend zu machen, außerdem aber auch deshalb, weil die Fernkräfte nicht der Wirklichkeit entsprechen (vgl. Abschn. 5, Fall *E*). Die obige Gleichung stimmt übrigens auch überein mit dem, was im „Handb. der Radiologie", Bd. IV.

(82) (Townsend 1912) $\omega_{Td} = \frac{K L_i}{M W_i} = \frac{K}{D \pi s^2 W \sqrt{\mu}}$ [1]),

was übrigens für $\mu = 1$ identisch ist mit meiner für diesen Fall geltenden Spezialformel ω_c (a. a. O. 1900, S. 314);

(Lenard 1900) $[\omega] = \frac{1}{2} \frac{K L_i}{M_i W_i} \frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{1}{2} \frac{K}{D \pi s^2 W} \frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}}$

[vgl. Gl. (1)].

Durch Quotientenbildung mit dem durch Gl. (21) oder (52) gegebenen Ausdruck für ω erhält man die in Tab. III (vv. S.) angegebenen Faktoren, die zu den Wanderungsgeschwindigkeitsangaben der verschiedenen Autoren zu setzen sind, damit sie mit unserer, alle Verfeinerungen enthaltenden Angabe (ω) zur Übereinstimmung kommen.

152. Man sieht hieraus, daß keine der bisherigen Formeln nach den Ergebnissen unserer Untersuchung als ganz richtig gelten kann, daß aber in bezug auf die erreichte Annäherung sehr große Unterschiede zwischen den verschiedenen Formeln vorhanden sind. In Sonderfällen richtige Resultate (Faktor = 1) geben meine Formel von 1900 (für einen μ-Wert

---

S. 718 (unten) 1917, als Resultat der „am vollkommensten von Langevin durchgeführten Rechnung" angegeben wird. Über die Mängel von Herrn Langevins Ableitung siehe besonders H. F. Mayer (in diesen Annalen folgend). Formeln von Reinganum (1910 und 1912, oben bereits erwähnt) bieten nur wieder dasselbe wie ω_{Lo}; nur die — doch wegzulassenden — Fernkräfte sind teilweise in mathematisch veränderter Form behandelt.

Eine ältere Formel von Herrn Langevin (Ann. de Chim. et de Phys. 28. S. 317. 1903) ergibt $2\omega_{Th}$. Sie berücksichtigt nur die Weglängenungleichheiten, nicht die Geschwindigkeitsungleichheiten (vgl. das oben Vorhergehende) und besonders auch nicht die Aufhäufung durch Trägheit; sie ist daher für $\mu = 1$ (größere Partikel) ebenso grundfalsch wie ω_{Th} (für andere Werte von μ ebenfalls nicht voll zutreffend) und daher hier nicht weiter berücksichtigt.

Identisch mit dieser älteren Formel von Herrn Langevin, also ebenfalls nur $= 2\omega_{Th}$ ist auch der von Hrn. Wellisch abgeleitete Ausdruck (a. a. O. 1909), wenn man die in ihm enthaltenen, willkürlich angenommenen Fernkräfte wegläßt (die Dielektrizitätskonstante $K = 1$ setzt).

1) S. P. Townsend, Proc. Roy. Soc. 86. S. 197. 1912. Es ist dies die mit Berücksichtigung der aufhäufenden Wirkung der Trägheit abgeleitete Formel. Herrn Townsends Resultat ohne diese Berücksichtigung ist identisch mit der älteren Formel von Herrn Langevin (1903, vgl. vorige Fußnote) $= 2\omega_{Th}$ und ist daher hier nicht weiter berücksichtigt.

zwischen $^1/_2$ und 1), die Langevinsche von 1905 (für $\mu = 1$) und die Townsendsche von 1912 (für einen μ-Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und 1). Vollkommen, auch der Größenordnung nach falsche Resultate (Faktor = ∞) gibt die Formel von J. J. Thomson für μ nahe 1 und die von Townsend für μ nahe 0. Für alle Fälle in praktisch guter Annäherung richtig ist meine Formel von 1900 und die Langevinsche von 1905, letztere bei Fortlassung der Fernkräfte.

Verfolgt man die zeitliche Entwicklung des Gegenstandes, so sieht man, daß im allgemeinen die neueren Formeln keine wesentlich bessere Annäherung bedeuten als meine alte von 1900 — teilweise ganz das Gegenteil —; als ein Fortschritt, für gewisse Fälle wenigstens, kann überhaupt nur die Formel von Langevin (1905) bezeichnet werden, aber auch nur dann, wenn man die Fernkräfte aus ihr wegläßt. Es erscheint unter diesen Umständen — mit Rücksicht auf den gegenwärtigen Stand der Literatur — nützlich, vor den geschehenen, sowie vor künftigen Anwendungen derjenigen zahlreichen hier genügend bezeichneten Wanderungsgeschwindigkeitsformeln, welche ganz unzutreffende Resultate geben können, aber doch große Verbreitung gefunden haben, schließlich noch ausdrücklich zu warnen.

Die wesentlichste bisherige Anwendung der Formeln ist die zu Schlüssen auf die Größe von Elektrizitätsträgern in Gasen und auf das Verhalten von freien Elektronen in Flammen sowie in kalten Gasen. Man findet hierauf bezügliche, mittels genügend richtiger Formeln aus einwandfreien experimentellen Daten hergeleitete Resultate in Teil II des Vorliegenden[1]) und in der Abhandlung „Über Elektronen und Metallatome in Flammen“[2]) zusammengestellt. Die im vor-

1) Ann. d. Phys. 41. S. 87—96 (Elektrizitätsträger in gewöhnlichen Gasen) und S. 60—67 (freie Elektronen in N_2, A), 1913.

2) Heidelb. Akad. 1914, Abschnitt 17. Es ist dort nur der Zahlenwert der Rekombinationskonstante als unsicher zu betrachten. Daß die dort angenommenen Werte dieser Konstante auch einen Rechenfehler enthalten (wie bereits ebendort 1917, Abschnitt 5. S. 12. Note 16 anerkannt), ist von wenig Belang, da die experimentellen Daten zur richtigen Ermittlung der Konstante bisher doch noch zu unsicher sind. Stark beeinflußt von der Unkenntnis der Rekombinationskonstante können be-

liegenden hinzugefügten Verfeinerungen ändern nichts an den dort bereits mitgeteilten Schlüssen. Die Zahlenresultate im einzelnen betreffend würden, nach Gl. (52) berechnet, die Radien der gewöhnlichen Elektrizitätsträger in nebelkernfreier Luft bei der Wanderungsgeschwindigkeit von 1 bis 2 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} 7 bis $5 \cdot 10^{-8}$ cm sein (statt 11 bis 7 in Teil II. S. 91), entsprechend 5- bis 3fachem Luftmolekülradius; monomolekulare Träger je eines Elementarquants in Luft würden die Wanderungsgeschwindigkeit 14,8 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} haben[1]); freie, dauernd reflektierte, gastheoretisch bewegte Elektronen in der Bunsenflamme 47000 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} [statt 74000 a. a. O. 1914, S. 19[2])].

Abschnitt 8. Über die Gültigkeitsbereiche der Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen und über ihren gegenseitigen Anschluß.

153. Wir untersuchen hier außer den in den vorhergehenden Abschnitten betrachteten gaskinetischen Lösungen des Wanderungsgeschwindigkeitsproblems auch die hydrodynamischen Lösungen, besonders in der Absicht, den bisher vermißten gegenseitigen Anschluß dieser Lösungen verschiedenen Ursprungs nachzuweisen.

Es bedeuten K wieder die treibende Kraft, η die Konstante der inneren Reibung des Mediums, R den Partikelradius. Die Wanderungsgeschwindigkeit ω versehen wir mit Indexen g, h, A, B, C, D, um gaskinetische, hydrodynamische, bzw. für die verschiedenen Stoßfälle A—D (vgl. Abschnitt 5) geltende Lösungen zu unterscheiden.

---

sonders die Zahlenresultate über die Größen der Kerne der Bunsenflamme sein (Tab. VI a. a. O.); alle allgemeinen Schlüsse bleiben aber davon unberührt. Vgl. hierzu auch den Artikel über Elektrizitätsleitung in Flammen von A. Becker in Grätz' Handbuch, Bd. III (z. Zt. im Druck).

1) Die in der Tab. VI, Teil II, S. 92 angegebenen kleinsten, bisher mit Sicherheit beobachteten Träger in gewöhnlichen Gasen sind demnach — wie dort bereits geschlossen und näher ausgeführt — nicht monomolekular, sondern bereits in Anlagerung begriffen.

2) Es war dort nach erster Berechnung $\Omega_\mu = 4$ gesetzt, während, wie im vorliegenden eingehend gezeigt, für freie Elektronen $\Omega_\mu = 2{,}546$ ist.

Gültigkeitsbereich der Stokes-Kirchhoffschen Gleichung.

154. Diese Gleichung[1]):

$$\omega = \frac{K}{6\pi\eta R}, \tag{83}$$

ist nach der Seite der kleinen[2]) Kugelradien R beschränkt durch ihre Herleitung aus den hydrodynamischen Grundgleichungen, welche das Medium bis zu beliebig kleinen Volumelementen als homogen behandeln, während es in Wirklichkeit molekulare Struktur hat. Letzteres hat die Folge, daß die in den Gleichungen vorkommenden, stetig verlaufenden Geschwindigkeitsgefälle nur so lange der Wirklichkeit entsprechen können, als merkliche Geschwindigkeitsänderungen längs Strecken von der Größenordnung der freien Weglängen der Mediumsmoleküle nicht vorkommen. Denn diese freien Weglängen sind Strecken, welche von den Molekülen ohne jede Geschwindig-

1) G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 9. S. 8. 1850. G. Kirchhoff, „Vorlesungen über Mechanik" (1. Aufl. 1876). Die Gleichung wird wohl mit Recht nach diesen beiden Autoren benannt, da Stokes ihr Urheber ist und Kirchhoff wohl zuerst bei uns eingehend mit ihr sich beschäftigt hat. Sie wird manchmal neuerdings auch als Einsteinsche Gleichung bezeichnet, was aber doch nicht leicht einfach begründbar erscheint.

2) Nach der Seite der *großen* Radien ist die Gültigkeit der Gleichung durch die Bedingung $R \ll \eta/\omega D$ begrenzt (Rayleigh, Phil. Mag. 26. S. 365. 1893). Bei größeren Radien, das ist nicht verschwindendem Werte von $R\omega D/\eta$, treten Wirbelbewegungen auf, und der Widerstand K wird proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit v und dem Quadrat des Radius R. Der Übergang zu diesem Fall — welcher außerhalb des Rahmens unserer gegenwärtigen Betrachtungen liegt — ist in einer Arbeit von A. Becker, „Über den Luftwiderstand" behandelt (Ann. d. Phys. 24. S. 823 u. 863. 1907), woselbst auch zugehörige Literatur angegeben ist. Von neueren Arbeiten hierüber sei genannt H. D. Arnold (Phil. Mag 22. S. 755. 1911), worin gezeigt wird, daß bei Medien, wie Wasser und Ölen, $R < 0{,}6\,\eta/v D$ für die Gültigkeit von Gl. (83) genügt.

Die Bewegung *flüssiger Massen* verschiedener Größe (Nebel- und Regentropfen) in Gasen, wobei der Übergang von wirbelfreier zu wirbelnder Bewegung des Mediums ebenfalls eine Rolle spielt, aber auch noch Besonderheiten des flüssigen Aggregatzustandes auftreten, habe ich früher experimentell und theoretisch behandelt (Ann. d. Physik 30. S. 224 bis 231. 1887 und „Über Regen", Metereol. Zeitschr. 1904. S. 249); die Resultate sind von anderen Autoren bestätigt worden (Mache 1908, Reinganum 1910).

keitsänderung durchlaufen werden, die also überhaupt nicht Sitz von stetig verlaufenden Geschwindigkeitsgefällen sein können. Da nun die Geschwindigkeitsgefälle in der Umgebung einer im reibenden Medium bewegten Kugel nach den Angaben der Hydrodynamik selbst, sowie auch nach direkter Erfahrung, auf Strecken von der Größenordnung des Kugelradius R sich verteilen, so daß auf eine Strecke von dieser Größenordnung sehr große Geschwindigkeitsunterschiede kommen, so sieht man, daß die *Gültigkeit der auf das Kugelproblem angewandten hydrodynamischen Gleichungen, also auch der Gl. (83) an die Bedingung gebunden ist, daß der Kugelradius R sehr groß sein müsse gegenüber der freien Weglänge L der Mediumsmoleküle, oder also an die Bedingung $R \gg L$* oder $L/R \ll 1$.[1])

Gültigkeitsbereich der Erweiterung von Cunningham und Mac Keehan.

155. Ist die vorstehende Bedingung nicht erfüllt, was bei sehr kleinen Kugeln eintritt, so muß die Bewegung der Mediumsmoleküle an der Kugeloberfläche, wo die größten Geschwindigkeitsgefälle vorkommen, besonders betrachtet werden. Dies ist von Herrn Cunningham durchgeführt worden[2]) mit dem Resultat des Hinzutretens eines Faktors zum Stokes-Kirchhoffschen Ausdruck, so daß

$$\omega_h = \frac{K}{6\pi\eta R}\left(1 + A\frac{L}{R}\right) \text{ wird,} \tag{84}$$

worin A ein zwischen 1 und 2 gelegener Zahlenkoeffizient ist.

Man sieht, daß man bei $L/R \ll 1$ wieder zur Stokes-Kirchhoffschen Gleichung zurückkommt, wie es dem Vorhergehenden nach sein muß. Bei sehr kleinen Kugelradien dagegen gewinnt der Zusatzfaktor steigenden Einfluß, und zwar

1) In flüssigen Medien ist $L < \lambda$ (s. 170), es reicht demnach hier die gefundene Gültigkeitsgrenze sehr weit nach der Seite der kleinen Partikelradien hin, weshalb die oben nächst zu besprechende Erweiterung [Gl. (84)] in Flüssigkeiten auch nicht wesentlich in Betracht kommt. Vgl. übrigens Abschnitt 9.

2) Cunningham, Proc. Roy. Soc. 83. S. 357. 1910. Die Rechnung verläuft dort nach ähnlichen Prinzipien wie in meiner gaskinetischen Ableitung der Wanderungsgeschwindigkeiten a. a. O. 1900; vgl. übrigens die Note 4 zur vierten Seite der Einleitung (diese Annalen 60. S. 332. 1919).

ist dies — wie die bereits in der Einleitung erwähnten Versuche der Herren Mac Keehan und Silvey an Wachs- bzw. Quecksilberkügelchen gezeigt haben — im richtigen, der Wirklichkeit entsprechenden Maße der Fall, wenn man dem Koeffizienten A den Wert 1,00 oder 1,03 erteilt.[1]) Dabei entspricht nach Herrn Cunninghams Rechnungsweise ein solcher Wert von A — genau sollte das $A = 1{,}05$ sein — der Annahme, daß die Mediumsmoleküle, welche die Kugeloberfläche getroffen haben, sie in Richtung der Oberflächennormale wieder verlassen, also dem in Abschnitt 5 eingehend erläuterten Fall D[2]), wogegen bei Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel der Moleküle (Fall A) $A = 1{,}5$ sein sollte[3]) und bei gleicher Wahrscheinlichkeit jeder Richtung für die weggehenden Mediumsmoleküle (diffuse Reflexion, Fall B) $A = 1{,}2$.

Da die genannten Versuche bis zu Kugelradien $R = 0{,}0001$ cm herab und bis zu $L/R = 200$ hinaufgehen, und da durch Druckvariation der Luft auch L ausgiebig variiert worden ist[4]), erscheint die Gültigkeit von Gl. (84) gut verbürgt bis zu Radienwerten, die jedenfalls weit unter dem Gültigkeitsbereich der Stokes-Kirchhoffschen Gleichung liegen.

Im selben Sinne fielen auch Messungen der Herren Knudsen und S. Weber aus[5]), die zwar nur relativ sehr große Kugeln ($R = 0{,}39$ cm), jedoch auch sehr verdünnte Luft benutzt haben, so daß L/R bis nahe zu 2 hinaufgeht. Es zeigte sich, rein empirisch, daß die Beobachtungen gut durch Gl. (84) dargestellt werden, wenn man

1) Der erstere Wert entspricht den Versuchen von Herrn Mac Keehan, der zweite denen von Silvey; beide stimmen so gut wie vollkommen überein, da ersterer Autor $1{,}00 \pm 0{,}03$ angibt.

2) Fall C kommt bei so großen Partikeln nicht in Betracht.

3) Vgl. Mac Keehan (a. a. O.), wo einige numerische Verbesserungen an Herrn Cunninghams Rechnung als nötig angegeben werden (vgl. die betreffende Note zur Einleitung).

4) Es gilt dies, sowie überhaupt die ausgiebige Variation und die Erreichung von $L/R = 200$ für die Versuche von Mac Keehan, die von Silvey besitzen in der Hauptsache den Wert der Kontrolle nach gänzlich verschiedener Methode und mit verändertem Material. Weitere, weniger gut verwertbare Versuche anderer Autoren findet man in Herrn F. Walters bereits in der Einleitung erwähnter Dissertation zitiert.

5) Knudsen u. S. Weber, Ann. d. Phys. 36. S. 981. 1911.

84a) $$A = 0{,}68 + 0{,}35\, e^{-1{,}85\, R/L}$$

setzt, und man sieht, daß dies mit den Resultaten der vorgenannten Beobachter übereinstimmt, indem bei sehr kleinem R auch hier $A = 1{,}03$ wird.[1])

156. Trotz dieser guten Bestätigung der Gl. (84) in sehr erweiterten Grenzen kann aber nicht erwartet werden, daß sie bis zu beliebig kleinen R herab gelte; denn es liegt hierbei eine Beschränkung vor durch die Ableitungsweise der Gleichung. Es ist nämlich bei der Ableitung angenommen, daß der Partikelradius R groß sei gegenüber der Dicke derjenigen an die Kugeloberfläche grenzenden Mediumsschicht, innerhalb welcher die an diese Oberfläche stoßenden Moleküle sich bewegen.[2]) Die Dicke dieser Schicht ist aber mindestens gleich zu setzen dem mittleren Molekülabstand λ, gemessen von Zentrum zu Zentrum; denn dieser Abstand ist das Maß für die Dicke irgendeiner einzelnen Molekülschicht, während jede geringere Dicke überhaupt keine ganze Molekülschicht umfassen würde.[3]) Ist die Diffusion im Medium stark — was bei hohem Werte von L, also in Gasen (außerdem auch bei hoher Temperatur) der Fall ist —, so wäre für die Dicke jener Schicht sogar ein hohes Vielfaches von λ zu setzen, nämlich mindestens die volle freie Weglänge L der Moleküle, da dieselben inner-

1) Die Herren Knudsen u. S. Weber vergleichen selbst ihre Resultate ganz eingehend mit den kurz vorher veröffentlichten von Mac Keehan (a. a. O. 1911, S. 993).

2) Vgl. die folgende Note.

3) Herr Cunningham gibt — ohne besondere Begründung — (a. a. O., S. 860) an, daß R in der Ableitung seiner Gleichung groß angenommen werde gegenüber dem *Moleküldurchmesser*, was aber mit dem Sinn der Ableitung nicht stimmt und nach obiger Überlegung zu kleine Radien zulassen würde, mindestens bei Gasen von nicht hohem Druck. Auch bei Knudsen u. S. Weber findet sich die Angabe, daß für Gl. (84) mit A nach Gl. (84a) Gültigkeit bis zu Kugeln von molekularer Größe herab anzunehmen sei (a. a. O., S. 992). Die Angabe ist aber dort ebenfalls nicht begründet; daß sie sich auf die rein empirische Feststellung von A ebensowenig stützen kann als — nach obigem — auf eingehende theoretische Überlegung geht daraus hervor, daß der Vergleich mit unserer, tatsächlich für Kugeln vom Molekülradius passenden Gl. (85) zeigt, daß für so kleine Radien nur mehr ziemlich rohe Gültigkeit der Gl. (84) besteht, indem sie mehr als doppelt zu große Werte der Wanderungsgeschwindigkeit ergibt.

halb dieser Strecke frei sich bewegen. Es ist also *die unzweifelhafte Gültigkeit der Gl. (84) ihrer Herleitung nach jedenfalls beschränkt anzunehmen auf* $R \gg \lambda$; in Flüssigkeiten, wo L klein ist, genügt wohl $R > \lambda$ (vgl. Abschnitt 9).

Gültigkeitsbereich der gaskinetischen Gleichung.

157. Diese zuerst von mir (a. a. O. 1900) abgeleitete Gleichung, welche mit den in Teil II und in den Abschnitten 1 bis 4 des Vorliegenden hinzugefügten Verfeinerungen geschrieben werden kann [Gl. (21)]:

$$\omega_g = \frac{8}{3+\mu}\,\Omega_\mu\,[\omega], \tag{85}$$

worin Ω_μ und $[\omega]$ je nach den Stoßfällen A, B, C, D die zum Teil verschiedenen, durch die Gl. (8), (1), (66), (62), (76), (73) gegebenen Werte annehmen, beruht auf den Prinzipien der kinetischen Gastheorie, wobei die kraftgetriebene Kugel als ein fremdes Molekül zwischen den Mediumsmolekülen betrachtet wird. Die Gleichung ist daher besonders für ganz kleine Kugeln geeignet, also gerade dort, wo die hydrodynamischen Gl. (83) und (84) versagen. Nach der Seite der kleinen Radien hin ist der Gültigkeit der Gl. (85) in der Tat keine Grenze gesetzt.[1]) Für die Frage, bis zu wie großen Radien hinauf die Gleichung noch gültig ist, kommen zwei bei ihrer Herleitung[2]) gemachte Annahmen in Betracht: Erstens die Annahme, daß die Zeit, innerhalb welcher das wandernde Partikel jeweils unter dem Einflusse eines Zusammenstoßes mit einem Mediumsmolekül sich befindet — die eigentliche Stoßzeit — verschwindend kurz sei gegenüber der Zwischenzeit von einem Zusammenstoß bis zum nächsten, während welcher ungestörte Beschleunigung durch alleinige Wirkung der Kraft K statthat. Zweitens die Annahme, daß das wandernde Partikel die Bewegung der

1) Die Anwendung der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung auf freie Elektronen ist bereits a. a. O. 1900 kurz und dann ausführlich in Teil I und II begründet und entwickelt worden.

2) Vgl. die Herleitung a. a. O. 1900, S. 312 u. 313. Der dabei befolgte sehr einfache Weg ist dort in Werten auseinandergesetzt; er schließt die Mittelwertbildung durch Integration ein, welche im vorliegenden für verwandte Fälle im Abschnitt 6 etwas ausführlicher entwickelt worden ist.

Mediumsmoleküle nur unmittelbar, nämlich beim Zusammenstoß beeinflußt, während im übrigen die Bewegung der Mediumsmoleküle vollkommen unbeeinflußt bleibt, so daß alle Moleküle, welche mit dem Partikel zum Zusammenstoß kommen, vor dem Stoße diese unbeeinflußte Bewegung haben.

158. Die erste Annahme ist offenbar mit Sicherheit erfüllt, wenn das Partikel so klein ist, daß es die Zwischenräume der Mediumsmoleküle nicht ausfüllt, wenn also $2R < \lambda_0$ wo $\lambda_0 = \lambda - 2r$ der mittlere Abstand von Molekülgrenze zu Molekülgrenze ist (im Gegensatz zu dem von Zentrum zu Zentrum gemessenen Abstand λ.[1]) Im gegenteiligen Falle, wenn $2R > \lambda_0$, wenn also fast immer mehr als ein Mediumsmolekül dicht bei der Partikeloberfläche sich befindet, ist es von vornherein nicht sicher, ob die dann dicht aufeinanderfolgenden Zusammenstöße noch die angenommenen relativ großen Zwischenzeiten freilassen, oder ob die Stoßzeiten schon ineinander übergreifen, was die Gl. (85) ungültig machen müßte. Es hängt dies offenbar von der schlecht bekannten Länge der Stoßzeiten ab. Bedenkt man jedoch, daß die kinetische Gastheorie, welche die gleiche Annahme überwiegend kräftefreier Bewegung der Moleküle, unterbrochen von verschwindend kurzen Stoßzeiten macht, auch auf den flüssigen Aggregatzustand als anwendbar sich gezeigt hat (van der Waals), obgleich hier der Moleküldurchmesser größer ist als die freie Weglänge und also um so mehr größer als der mittlere Molekülabstand λ_0, so ist klar, daß auch unsere Ableitung der Gl. (85) und also diese Gleichung selbst noch weit über die unzweifelhafte Grenze $2R \leqq \lambda_0$ hinaus und wohl ebenfalls bis in den flüssigen Aggregatzustand hinein mindestens angenähert Gültigkeit behalten kann.

159. Für die Frage, wo bei wachsendem Partikelradius schließlich das Versagen der Gl. (85) eintreten müsse, erscheint demnach nur die zweite bei der Ableitung gemachte Annahme entscheidend, welche verlangt, daß die mit dem Partikel zum Zusammenstoß kommenden Moleküle unbeeinflußt seien von der Wanderungsbewegung. Da diese Moleküle aus Abständen von der Größe der freien Weglänge L gegen die Partikelober-

1) Der Unterschied zwischen λ und λ_0 ist in gewöhnlichen Gasen unwesentlich; nur unfern der Verflüssigung und im flüssigen Zustande ist er von Belang.

fläche kommen, so wird die Bedingung offenbar nicht mehr erfüllt sein, wenn $R > L$; denn die Wanderungsbewegung des Partikels setzt unzweifelhaft seine Umgebung stets bis auf Abstände von der Größenordnung des Partikelradius R über seine Oberfläche hinaus in Mitbewegung. Letzteres ist durch die hydrodynamische Untersuchung bewiesen, welche die Geschwindigkeiten aller Volumelemente des Mediums als Funktion der Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels darstellt und welche gerade dann volle Gültigkeit behält, wenn der Partikelradius R groß ist im Vergleich zu den angenommenen Volumelementen, die ihrerseits groß sein müssen im Vergleich zu der durch die freie Weglänge L bemessenen Struktur des Mediums, wenn also $R > L$, welches aber eben der in Betracht gezogene Fall ist.[1])

Es wird also Gl. (85) nicht mehr gültig sein können, wenn $R > L$. Im anderen Falle, wenn $R \gtrless L$, gilt das Folgende:

Ist $R = L$, so befindet man sich nur wenig außerhalb des Gültigkeitsbereiches der rein hydrodynamischen Gleichung (siehe 154). Man kann daher annehmen, daß die Bewegungsverteilung in der Umgebung des wandernden Partikels noch ungefähr dieselbe sei, wie innerhalb des Gültigkeitsbereiches, daß also das Medium nicht wesentlich weiter als bis auf Abstände von der Größe R, d. i. also hier L, über die Partikeloberfläche hinaus von der Wanderungsbewegung des Partikels beeinflußt sei. Es sind also bei $R = L$ nur die unmittelbar an das Partikel gestoßenen Moleküle als wesentlich beeinflußt anzunehmen, nicht die ferner abliegenden, welche die Beeinflussung nur durch Zusammenstoß mit den eben gedachten, innerhalb L befindlichen, unmittelbar beeinflußten Molekülen erhalten, und dieses Resultat muß um so mehr gelten, wenn $R < L$. Denn mit abnehmendem R nimmt die Zahl der sekundlich an das Partikel stoßenden Moleküle, also auch die Übertragung der Be-

1) Ist $R < L$, so gilt das Resultat der hydrodynamischen Untersuchung nicht mehr; es greift dann die Bewegung des Partikels weiter als bis auf Abstände R um sich, nämlich mindestens bis auf Abstände L, welches letztere als unter allen Umständen geltend unmittelbar einzusehen ist, da die mit dem Partikel zusammengestoßenen Moleküle ihre vom Partikel beeinflußten Geschwindigkeiten unmittelbar um die Strecke L weitertragen (vgl. das oben Folgende).

einflussung an die ferner abstehenden Moleküle ab. Es erfüllen daher bei $R \gtrless L$ die weiter als L von der Partikeloberfläche abstehenden Moleküle genügend die Bedingung der Gültigkeit der Gl. (85). Was die anderen, innerhalb des Abstandes L von der Partikeloberfläche sich bewegenden Moleküle anlangt, so müssen jedenfalls diejenigen von ihnen von der Wanderungsbewegung beeinflußt sein, welche soeben von einem Zusammenstoß mit dem Partikel kommen, und es ist nur die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein solches Molekül zu nochmaligem Zusammenstoß mit dem Partikel kommt, ehe es seine Beeinflussung durch anderweitige Zusammenstöße genügend verloren hat. Man findet die Wahrscheinlichkeit für den Zusammenstoß eines von einem Punkte im Abstande L von der Partikeloberfläche in beliebiger Richtung ausgehenden Moleküls[1]) mit dem Partikel als Resultat einer einfachen geometrischen Rechnung klein genug nämlich bei $R = L$ zwischen $^1/_2$ und $^1/_{12}$[2]) und bei $R < L$ noch kleiner. Da außerdem die Beeinflussung bei jedem Zusammenstoß mit einem unbeeinflußten Molekül auf $^1/_2$ zurückgeht[3]), so ist zu sehen, daß die Zahl der wesentlich beeinflußten Moleküle, welche zum Zusammenstoß mit dem Partikel kommen, bei $R \gtrless L$ stets sehr gering sein muß, wonach also $R \gtrless L$ *als Bedingung für die Gültigkeit der Gl. (85)* anzusehen ist, derart, daß an der Grenze, bei $R = L$, noch gute Annäherung, bei abnehmendem R/L aber schnell wachsende Genauigkeit der Gleichung zu erwarten ist.[4])

Zu bemerken ist, daß diese Überlegungen (159) unmittelbar auf *gasförmige Medien* sich bezogen haben, bei welchen $L < \lambda$ ist. Sie gelten in entsprechender Durchführung aber auch für

---

1) Es entspricht dies den Reflexionsfällen A, sowie C; bei B und D wäre das Resultat nicht wesentlich anders.

2) Die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ ergibt sich bei $r = \infty$, $^1/_{12}$ bei $r = 0$; $r = R$ würde die Wahrscheinlichkeit $^4/_{15}$ geben.

3) Vgl. die Gl. (43) in Teil I.

4) Die Anwendung der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformel auf flüssige Medien ist bereits von Herrn G. Hevesy erörtert worden (Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 13. S. 291. 1916), wobei jedoch die hier erläuterte Erweiterung des Gültigkeitsbereiches übersehen wurde. Die Erweiterung genügt zur Anwendung der Gleichung auf die elektrolytischen Ionen (vgl. Abschnitt 9).

flüssige Medien. Es besteht bei demselben nur der Unterschied, daß — da hier $L < \lambda$ — als Abstand von der Partikeloberfläche, bis zu welchem die Beeinflussung der Umgebung jedenfalls merklich sein muß, nicht die freie Weglänge allein zu gelten hat, sondern offenbar dieselbe vermehrt um den Moleküldurchmesser $2r$ (Amplitude + Dicke der bewegten Molekülschicht), wofür in genügender Annäherung auch der Molekülabstand λ (von Zentrum zu Zentrum) gesetzt werden kann. Es tritt demnach λ an die Stelle von L in der Gültigkeitsbedingung, und dieselbe wird daher für *flüssige Medien* $R \gtrless \lambda$, was gegenüber $R \gtrless L$ keinen Widerspruch, aber — da $L < \lambda$ — eine nennenswerte Erweiterung des Gültigkeitsbereiches bedeutet.[1])

160. *In Zusammenfassung* haben wir über die Gültigkeitsbereiche der verschiedenen Gleichungen das Resultat, daß einerseits von beliebig kleinen Partikelradien R hinauf bis zu $R = L$, bzw. in Flüssigkeiten bis zu $R = \lambda$, die gaskinetische Gl. (85) gut anwendbar ist, während andererseits bei $R > \lambda$ die Gültigkeit der für die großen Partikel geeigneten, hydrodynamischen Gl (84) beginnt. Man sieht, daß beide Bereiche aneinandergrenzen, ja, daß sie sogar ineinander übergreifen können.

Letzteres muß stattfinden, wenn $L \gg \lambda$, also bei Gasen von nicht allzu hohem Druck. So ist beispielsweise selbst in Luft von 1 Atm. Druck rund $\lambda = 20r$ und $L = 600r = 30\lambda$, also die Bedingung des Übereinandergreifens genügend erfüllt. Man hat daher im Falle der Gase im allgemeinen für jede beliebige Partikelgröße eine Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung mit mindestens sehr angenäherter Gültigkeit zur Verfügung, nämlich Gl. (85) bei $R < L$ und Gl. (84) bei $R > \lambda$ (wirbelfreie Bewegung vorausgesetzt). In der Gegend von $\lambda < R < L$ wäre es zweifelhaft, welche der beiden Gleichungen vorzuziehen sei; doch treffen sie in dieser Gegend in Gasen in der Tat mit identischem Resultat zusammen, wie das Folgende zeigt (161).

In Flüssigkeiten berühren sich die Gültigkeitsbereiche nahezu, indem zwischen $R \leqq \lambda$, wo Gl. (85) gilt, und $R < \lambda$,

1) Auf diese, schon aus der Ableitung von 1900 sich ergebende Gültigkeitsgrenze der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung ist schon früher aufmerksam gemacht worden: Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 31. S 122. 1910; Lenard u. Ramsauer, Heidelb. Akad. A 32. S. 12. 1910; Teil I. S. 403. 404.

wo Gl. (84) gilt, keine erhebliche Lücke übrig bleibt. Man hat also auch hier für jeden Fall eine Gleichung mit mindestens angenäherter Gültigkeit zur Verfügung. Nur bei Radienwerten, die λ nur wenig überschreiten, ist einige Unsicherheit zu erwarten. Wir gehen hierauf im Abschnitt 9 bei Behandlung der flüssigen Medien besonders ein.

Vergleichung der gaskinetischen Lösung mit der hydrodynamischen.

161. Die im vorhergehenden gezeigte Berührung der Gültigkeitsbereiche der beiden, ganz verschiedenen Theorien entnommenen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen (84) und (85) gibt unmittelbaren Anlaß, dieselben miteinander zu vergleichen — was merkwürdigerweise bisher meines Wissens noch niemals in genügender Allgemeinheit ausgeführt worden ist — und die dabei zu erwartende Übereinstimmung an der gefundenen gemeinsamen Gültigkeitsgrenze nicht für zufällig zu halten.

Die Vergleichung kann unmittelbar dadurch ausgeführt werden, daß man Gl. (85) auf größte Radien, Gl. (84) auf kleinste Radien jeweils innerhalb des Gültigkeitsbereiches anwendet, und zusieht, ob im Falle der Gase, wo die Gültigkeitsbereiche ineinander greifen, übereinstimmende Ausdrücke sich ergeben. Wir führen die Vergleichung gesondert für die vier Fälle *A*, *B*, *C*, *D* durch.

162. *Fall A.* (Elastische Reflexion.) — Man hat in der gaskinetischen Gleichung, die hier die Form der Gl. (52) annimmt, $R \gg r$, daher $s = R$ und $\mu = 1$, daher $\Omega_\mu = 1$ zu setzen, wodurch gaskinetisch

$$\omega_{g\,A} = \frac{3}{4}\,\frac{K}{D\pi R^3 W} \quad (R \text{ groß}) \tag{87}$$

wird, wobei indessen noch immer $R \leqq L$ sein muß, um im Gültigkeitsbereich zu bleiben. In der hydrodynamischen Gl. (84) ist $R \ll L$ zu setzen, wodurch hydrodynamisch

$$\omega_{h\,A} = A\,\frac{KL}{6\pi\eta R^2} \quad (R \text{ klein}) \tag{88}$$

wird, mit der Voraussetzung, daß immer noch $R \gg \lambda$ sei, um im Gültigkeitsbereich zu bleiben. Alle genannten Bedingungen für R sind gleichzeitig genügend nahe erfüllbar, wobei $L \gg R \gg \lambda$ ausschlaggebend ist. So ist beispielsweise in Luft von 1 Atm.

Druck bei $R = 200 \cdot 10^{-8}$ cm rund $R = {}^1/_{10} L = 10\lambda = 140\,r$, oder in Luft von ${}^1/_{100}$ Atm. Druck bei $R = 1000 \cdot 10^{-8}$ cm rund $R = {}^1/_{100} L = 100\lambda = 700\,r$. Es muß also entsprechend angenäherte Gültigkeit sowohl von Gl. (87), als auch von Gl. (88) und also auch angenäherte Übereinstimmung beider erwartet werden. In der Tat setzt man in Gl. (88) den nach der kinetischen Gastheorie geltenden Wert:

$$\eta = 0{,}310\, D W L$$

ein[1]) und $A = 1{,}5$ nach Mac Keehan[2]), so wird:

$$\omega_{hA} = 0{,}81 \frac{K}{D \pi R^2 W} \quad (R \text{ klein}), \tag{88a}$$

und man sieht vollkommene Übereinstimmung mit Gl. (87) in bezug auf die Abhängigkeit der Wanderungsgeschwindigkeit von den maßgebenden Größen D, R und W und genügend nahe Übereinstimmung in bezug auf die Zahlenkoeffizienten. Es würde sogar auch letztere Übereinstimmung vollkommen, wenn man im Ausdruck für η den Koeffizienten 0,310 durch ${}^1/_3$ ersetzte, was gilt, wenn man η ohne Rücksicht auf die Ungleichheiten der molekularen Geschwindigkeiten und Weglängen berechnet; doch ist dies in unserem Falle unberechtigt, da in Gl. (87) diese Ungleichheiten voll berücksichtigt sind. Vielmehr kann es berechtigt erscheinen, den Koeffizienten A in Gl. (88) so abzuändern, daß vollkommene Übereinstimmung mit Gl. (87) resultiert. Es ergäbe dies $A = 1{,}4$, statt 1,5 nach Mac Keehan oder 1,63 nach Cunningham.[3]) Bei der Unsicherheit in den letztgenannten Werten von A, welche aus der Nichtübereinstimmung der Berechnungen der beiden Autoren gefolgert werden könnte[4]), erscheint es in der Tat nicht unangebracht,

---

1) Vgl. O. E. Mayer: „Kinetische Theorie der Gase", 2. Aufl., 1899, Mathematische Zusätze, S. 111.

2) Vgl. oben.

3) Vgl. oben.

4) Herr Mac Keehan, der spätere Autor, gibt — soviel ich finden konnte — (a. a. O.) nur an, daß Herrn Cunninghams Annäherungsverfahren nicht genügend gewesen sei, ohne aber den Grad der von ihm selbst erreichten Annäherung in der Auswertung der betreffenden theoretischen Ausdrücke zu präzisieren (vgl. die betreffende Note zur Einleitung).

dem Wert $A = 1{,}4$ für den Fall A der elastischen Reflexion bis auf weiteres den Vorzug zu geben.[1])

163. *Fall B.* (Diffuse Reflexion.) — Die Vergleichung geht hier ebenso vor sich und sie fällt ähnlich aus wie im Falle A. Man hat unter denselben Bedingungen für R, wie dort:

$$(89)\quad \text{gaskinetisch} \quad \omega_{gB} = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{4}\,\frac{K}{D\pi R^2 W} = 0{,}56\,\frac{K}{D\pi R^2 W} \quad (R \text{ groß}) \qquad \text{und}$$

$$(90)\quad \text{hydrodynamisch} \quad \omega_{hB} = 0{,}65\,\frac{K}{D\pi R^2 W} \quad (R \text{ klein}),$$

wobei in letzterer Gleichung $A = 1{,}2$ gesetzt ist, was nach Mac Keehan dem Falle B entspräche.[2]) Man sieht auch hier wieder die gute Übereinstimmung der beiden Ausdrücke bis auf einen kleinen Unterschied in den Zahlenkoeffizienten. Da auch hier einige Unsicherheit in bezug auf den Wert von A vorhanden zu sein scheint[3]), ist es — wie im Falle A — nicht unberechtigt, diesen Wert so einzurichten, daß der Zahlenkoefizient der hydrodynamischen Lösung dem der gaskinetischen genau gleich wird; man erhält so $A = 1{,}1$ für den Fall B.

164. *Fälle C und D.* (Senkrechtes Abgehen der Moleküle). — Findet genügend schnelle Rotation des Partikels statt (Fall C), so führt die gaskinetische Untersuchung auf die Gleichungen des Falles A zurück (vgl. 142). Die hydrodynamische Lösung ist für diese Annahme nicht entwickelt; sie würde aber auch kaum Anwendung finden können, da die verhältnismäßig großen Partikel ihres Gültigkeitsbereiches kaum die genügend schnelle Rotation (bzw. den genügend guten inneren Wärmeaustausch) erwarten lassen.

Es kommt daher hier nur der Fall D in Betracht, daß das Partikel nicht schnell rotiert, so daß zwischen Auftreffen und Wiederabfliegen jedes Moleküls keine wesentliche Ver-

1) Andererseits ist hervorzuheben, daß die Gl. (52) und Gl. (84), aus welchen wir diesen Wert von A gefolgert haben, nahe der Grenze ihrer Gültigkeitsbereiche benutzt worden sind, so daß strenge Gültigkeit nicht erwartet werden kann (vgl. auch die dritte Note zu 169).

2) Zit. in der Einleitung.

3) Es gilt hier ähnliches wie oben im Falle A.

drehung des Partikels stattfindet. Es gelten dann — unter denselben Bedingungen für R wie in A — die Lösungen:

$$(91)\quad \text{gaskinetisch}\quad \omega_{gD} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\,\frac{K}{D\pi R^3 W} = 0{,}45\,\frac{K}{D\pi R^3 W}\quad (R \text{ groß})\quad \text{und}$$

$$(92)\quad \text{hydrodynamisch}\quad \omega_{hD} = 0{,}57\,\frac{K}{D\pi R^3 W}\quad (R \text{ klein}),$$

wobei in letzterer Gleichung nach Herrn Mac Keehans Berechnung $A = 1{,}05$ gesetzt ist. Man sieht wieder die genügende Übereinstimmung. Vollkommen würde dieselbe, wenn man $A = 0{,}84$ setzte, welch letzterer Wert wieder, mit derselben Begründung (und demselben Vorbehalt) wie bei Fall A und B, als verbesserter Ersatz für die Mac Keehansche Angabe für den Fall D angesehen werden kann.

165. Die bisher vorliegenden experimentellen Untersuchungen scheinen die von uns geschlossenen Werte A gut zu bestätigen. Man hat, wie bereits in der Einleitung angegeben, hauptsächlich Fälle untersucht, wo Aufnahme der Mediumsmoleküle in eine verdichtete Oberflächenschicht des Partikels und nachheriges Abdampfen in vorzugsweise senkrechter Richtung zu erwarten ist. Dabei war zu guter Darstellung der Beobachtungen anzunehmen $A = 1{,}03$ (Knudsen und Weber an Glaskugeln für die hier in Betracht kommenden Werte von R, ebenso Silvey an Quecksilbertröpfchen) bzw. 1,00 (Mac Keehan an Wachskügelchen) und diese Werte stimmen gut mit den von uns geschlossenen Werten überein. Denn es ist zu bedenken, daß das Abgehen der Moleküle beim Abdampfen aus der Oberflächenschicht keineswegs ausschließlich in der Richtung der Oberflächennormale stattfindet, sondern nur mit Bevorzugung größerer Normalkomponenten der Geschwindigkeit, so daß es sich in Wirklichkeit nicht genau um den Fall D, sondern um einen zwischen B und D gelegenen Fall (diffuse Reflexion mit Bevorzugung der Normalrichtung) handelt, was nach unserem Resultate Werte von A zwischen 0,84 und 1,1 erwarten läßt, ganz wie es die genannten Beobachtungen ergeben. Eine exakte Verwirklichung des Falles D, d. i. ausschließlich senkrechten Abgehens der auftreffenden Moleküle, ist bei jeder Art von Oberflächen-

beschaffenheit sehr unwahrscheinlich, und es können daher die beobachteten Werte von A in Wirklichkeit nicht als Bestätigungen des von Mac Keehan für diesen Fall D berechneten Wertes $A = 1{,}05$ angesehen werden; sie bestätigen vielmehr, wie angegeben, die von uns berechneten Werte. Versuche mit Partikeln bekannter Größe, die eine exakte Verwirklichung des Falles A bedeuteten, sind bisher ebenfalls nicht bekannt geworden.

Übergang von der gaskinetischen zur hydrodynamischen Gleichung bei wachsendem Partikelradius.

166. Um zu zeigen, daß dieser Übergang stetig, ohne jeden Sprung auch im Differentialquotienten $d\omega/dR$ stattfindet, wählen wir beispielsweise atmosphärische Luft von gewöhnlichem Druck und Zimmertemperatur (20° C) als Medium und setzen den Fall A (elastische Reflexion) voraus. Es gilt dann bis zu $R \leqq L$ die gaskinetische Gleichung [Gl. (21)]:

$$\omega_{g\,A} = \frac{3}{3+\mu}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}\,\Omega_\mu\,\frac{K}{D\pi(r+R)^2 W} \tag{93}$$

und für $R \gg \lambda$ die hydrodynamische Gleichung [Gl. (84) mit A nach 162]:

$$\omega_{h\,A} = \frac{K}{6\pi\eta R}\left(1 + 1{,}4\,\frac{L}{R}\right), \tag{94}$$

wobei zu setzen ist $D = 0{,}0012$ g/cm^3, $W = 47800$ cm/sec, $\eta = 0{,}00019$ cm^{-1} g sec^{-1}, $L = 1030 \cdot 10^{-8}$ cm, $r = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. $\mu = M_t/(M_t + M)$ ist für alle $R \geqq 10 \cdot 10^{-8}$ cm 1,00[1]); für $R = r$ wird $\mu = \frac{1}{2}$; für verschwindende R ist der Fall freier Elektronen in N_2 gesetzt, wobei $\mu = 2{,}02 \cdot 10^{-5}$ wird.

1) Gerechnet nach $M_t : M = R^3 : r^3$, was annimmt, daß das Partikel aus Mediumsmolekülen aufgebaut sei. Diese Rechnungsweise reicht wegen des geringen Einflusses von μ auf ω, solange μ nahe 1 ist, vollkommen aus. Es ist übrigens zu bemerken, daß auch bei ganz beliebiger Wahl der materiellen Beschaffenheit des Partikels stets bei $R \geqq 10 \cdot 10^{-8}$ cm μ nahe 1 bleibt, möge das Partikel noch so leicht gebaut sein (z. B. hohl bei leichtest möglichem Wandmaterial). Es gelten daher die Zahlen der Tabelle bei $R \geqq 10 \cdot 10^{-8}$ cm für Luft als Medium überhaupt, unabhängig von der Partikelmasse, und nur in den ersten beiden Zeilen der Tabelle (oberhalb der horizontalen Trennungslinie) ist ω, in den angegebenen Zahlenstellen von der Partikelmasse beeinflußt.

Tabelle IV.

Gaskinetisch und hydrodynamisch berechnete Wanderungsgeschwindigkeiten in Luft (1 Atm., 20° C).

Partikelradius R			Wanderungsgeschwindigkeit	
10^{-8} cm	in Vielfachen von λ und L (rund)		$\omega_g A/K^1)$ cm sec^{-1} dyn^{-1}	$\omega_h A/K^1)$ cm sec^{-1} dyn^{-1}
0	(freies Elektron in N_2)		$6{,}7 \cdot 10^{15}$	∞
1,5	$= r$ (Luftmolekül)		$840 \cdot 10^{10}$	$1800 \cdot 10^{10}$
10	$= \frac{1}{3}\lambda = \frac{1}{100} L$	(El.-Träger in kernfreien Gas.)	$31 \cdot 10^{10}$	$39 \cdot 10^{10}$
20			$8{,}9 \cdot 10^{10}$	$9{,}9 \cdot 10^{10}$
30	$= \lambda = \frac{1}{30} L$		$4{,}2 \cdot 10^{10}$	$4{,}4 \cdot 10^{10}$
40			$2{,}4 \cdot 10^{10}$	$2{,}5 \cdot 10^{10}$
50			$1{,}6 \cdot 10^{10}$	$1{,}6 \cdot 10^{10}$
100	$= 3\lambda = \frac{1}{10} L$		$0{,}40 \cdot 10^{10}$	$0{,}42 \cdot 10^{10}$
200			$0{,}10 \cdot 10^{10}$	$0{,}11 \cdot 10^{10}$
300	$= 10\lambda = \frac{1}{3} L$	(Als Nebelkerne, bez. ultramikroskopisch sichtbar zu machen)	$450 \cdot 10^{6}$	$530 \cdot 10^{6}$
400			$250 \cdot 10^{6}$	$310 \cdot 10^{6}$
500	$= 20\lambda = \frac{1}{2} L$		$170 \cdot 10^{6}$	$210 \cdot 10^{6}$
600			$114 \cdot 10^{6}$	$160 \cdot 10^{6}$
800			$64 \cdot 10^{6}$	$96 \cdot 10^{6}$
1 000	$= 30\lambda = L$		$42 \cdot 10^{6}$	$67 \cdot 10^{6}$
2 000			$10 \cdot 10^{6}$	$25 \cdot 10^{6}$
3 000	$= 100\lambda = 3L$		$4{,}6 \cdot 10^{6}$	$14 \cdot 10^{6}$
4 000			$2{,}8 \cdot 10^{6}$	$9{,}4 \cdot 10^{6}$
5 000	$= 200\lambda = 5L$		$1{,}65 \cdot 10^{6}$	$7{,}1 \cdot 10^{6}$
6 000			$1{,}15 \cdot 10^{6}$	$5{,}7 \cdot 10^{6}$
8 000			$0{,}64 \cdot 10^{6}$	$4{,}1 \cdot 10^{6}$
10 000	$= 300\lambda = 10L$	(Mikroskopisch abbildbar)	$0{,}42 \cdot 10^{6}$	$3{,}2 \cdot 10^{6}$

Die Tabelle IV zeigt die Resultate. Man sieht, daß $\omega_g A/K$ und $\omega_h A/K$ im mittleren Teile der Tabelle zusammenfallen. Trägt man die beiden Größen als Funktionen von R graphisch auf, so bilden sie zwei Kurven, die in dieser mittleren Radiengegend zusammentreffen, und zwar *durch Berührung*, nicht durch Schnitt, so daß der Übergang von der einen zur anderen Kurve dort ohne Sprung im Differentialquotienten $d\omega/dR$ vor

1) Im Gültigkeitsbereich der betreffenden Gleichung befindliche Zahlen sind fett gedruckt. Die horizontale Linie gibt die Grenze des Einflusses der Masse an (vgl. die 1. Fußnote zu 166).

sich geht.[1]) Man sieht aus der Tabelle auch, daß die Berührung sehr flach ist, so daß ω_g und ω_λ längs einer großen Strecke — von etwa $R = 30 \cdot 10^{-8}$ cm bis $R = 500 \cdot 10^{-8}$ cm in der Tabelle — sehr nahe gemeinsamen Lauf haben. Dies muß also die Gegend sein, in welcher die Gültigkeitsbereiche der beiden Gleichungen aneinander grenzen, und man sieht aus der 2. Spalte der Tabelle, worin Radienwerte in Vielfachen von λ und L ausgedrückt sind, daß es sich in der Tat um die nach unseren Überlegungen zu erwartende Gegend $\lambda < R < L$ handelt (vgl. 160). $\omega_{g\,A}/K$ ist dabei sowohl bei größeren als bei kleineren R unterhalb $\omega_{h\,A}/K$ gelegen, was wir im einzelnen weiter unten erklären (169).

167. Will man bei gegebener Kraft K die Wanderungsgeschwindigkeit als Funktion des Partikelradius R aus der Tabelle entnehmen, so hat man — ausgehend von kleinsten Radien — zunächst der Zahlenreihe $\omega_{g\,A}/K$ zu folgen, bis beim Passieren der Gegend der Übereinstimmung der Übergang in die Zahlenreihe der $\omega_{h\,A}/K$ erfolgt, welche dann bis zu den größten Radien maßgebend bleibt. Die hiernach jeweils der Wirklichkeit entsprechenden Zahlen sind in der Tabelle fett gedruckt.

168. Der vortreffliche Aneinanderschluß der gaskinetischen und der hydrodynamischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen, welche im gewählten Beispielsfalle verdeutlicht ist, gilt aber nicht nur für diesen Fall der gewöhnlichen Luft von Zimmertemperatur, sondern für alle gasförmigen Medien, in-

1) Die graphische Darstellung ist wegen des weit verschiedene Größenordnungen umfassenden Bereiches sowohl von R als von ω in kleinem Maßstab nicht befriedigend ausführbar, weshalb auf dieselbe hier verzichtet worden ist. Eine graphische Darstellung des Laufes der Cunninghamschen Gleichung zusammen mit dem meiner Gleichung von 1900 [Gl. (1)] findet man bei F. Walter, Diss., Heidelberg, Mai 1918. Man sieht dort die beiden Kurven unter spitzem Winkel sich schneiden, und ein zweiter Schnittpunkt liegt außerhalb des dortigen Zeichnungsfeldes. Erst die in den Abschnitten 1 und 2 der vorliegenden zu Gl. (1) hinzugefügten Verfeinerungen und die etwas veränderte Annahme des Koeffizienten A in der Cunninghamschen Gleichung [vgl. 162 und Gl. (94)] haben den zweifachen Schnitt in die oben erläuterte, den ganzen Abstand der beiden Schnittpunkte umfassende flache Berührung verwandelt.

sofern in diesen stets L und also auch R so viel größer ist als r, daß der spezielle Wert dieser letzteren Größe nahezu einflußlos bleibt und insofern in ihnen für η die oben angegebene Gleichung der kinetischen Gastheorie gilt, welche zeigt, daß die speziellen Werte von D und W ebenfalls aus den Quotienten der beiden Wanderungsgeschwindigkeitsausdrücke herausfallen.

169. Im einzelnen ist zur Vergleichung des Laufes von ω_g und ω_h noch das Folgende zu bemerken (geltend für alle Stoßfälle $A - D$): *Für die gaskinetische Gleichung* ω_g ist einzusehen, daß sie *jenseits ihrer Gültigkeitsgrenze*, d. i. bei $R \gtrsim L$ — wenn wir Gase betrachten —, *zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit geben muß*. Denn sie verlegt den Geschwindigkeitsabfall an der Partikeloberfläche stets auf die Strecke L (vgl. 159), und dies ist jenseits der Gültigkeitsgrenze zu wenig, da dort dieser Geschwindigkeitsabfall unzweifelhaft (nach den dort geltenden hydrodynamischen Gleichungen) stets auf Strecken von der Größenordnung $R(> L)$ verteilt ist; wenn aber das Geschwindigkeitsgefälle auf zu keine Strecken konzentriert angenommen ist, muß der Reibungswiderstand zu groß, die Wanderungsgeschwindigkeit also zu klein gefunden werden[1]), wie es die Zahlen im unteren Teil der Tabelle auch deutlich zeigen, wo ω_h bereits in allen angegebenen Zahlenstellen als richtig zu erwarten ist.[2])

Für die hydrodynamische Geschwindigkeitsgleichung ω_h *kann beim Überschreiten der Grenze von deren Gültigkeitsbereich*, wenn also $R \gtrsim \lambda$ wird, *wieder derselbe Schluß* gezogen werden, daß sie *zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit* ergeben müsse. Denn betrachten wir wieder Gase, so ist $L > \lambda$, also an und jenseits der Gültigkeitsgrenze auch $L > R$, und es ist also die

1) Man kommt zu demselben Resultat, wenn man — statt das Geschwindigkeitsgefälle zu beachten — berücksichtigt, daß jenseits der Gültigkeitsgrenze die mit dem Partikel zum Zusammenstoß kommenden Mediumsmoleküle bereits eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Wanderung besitzen, was bei der Ableitung von ω_g nicht berücksichtigt ist (vgl. 159).

2) Auch für Flüssigkeiten gilt dieselbe Überlegung, wonach die gaskinetische Gleichung außerhalb ihres Gültigkeitsbereiches zu kleine Wanderungsgeschwindigkeit erwarten läßt, nur daß hier λ an Stelle von L tritt.

für das Geschwindigkeitsgefälle in der hydrodynamischen Lösung angenommene Strecke von der Ordnung R hier wieder zu klein, da dies Gefälle (nach stets treffender Vorstellung der kinetischen Theorie) jedenfalls mindestens bis zum Abstande L von der Partikeloberfläche sich erstrecken muß; man wird also wieder zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit erhalten.[1])

Überschreitet man die Gültigkeitsgrenze von ω_h genügend weit, so muß schließlich allerdings stets die entgegengesetzte Abweichung eintreten — es muß *bei sehr kleinen Partikelradien* ω_h *stets zu groß* ausfallen —, wovon der Grund die dann in zunehmendem Maße zu grobe Struktur des Mediums ist, was wieder für Gase und Flüssigkeiten gemeinsam gilt.[2]) Wenig außer-

1) Es lassen demnach in der Umgebung der — ungefähr gemeinsamen — Gültigkeitsgrenze der gaskinetischen und der hydrodynamischen Gleichung *beide zu kleine* Werte der Wanderungsgeschwindigkeit erwarten, und da die Gültigkeitsgrenzen beider Gleichungen einen verwaschenen Übergang durch angenäherte Gültigkeit zu Ungültigkeit bedeuten, so könnte es sein, daß für diese Wertgegend von R (etwa bei 50 bis $300 \cdot 10^{-8}$ cm im Beispiel unserer Tabelle) trotz naher Übereinstimmung der beiden Lösungen doch nicht der richtige Wert der Wanderungsgeschwindigkeit durch dieselben gegeben würde, sondern ein zu kleiner Wert. Es ist dies jedoch nach Maßgabe der Erfüllung der für die Gültigkeit bestehenden Ungleichheitsbedingungen bei nicht sehr dichten Gasen nur in geringem Maße zu erwarten. So würde die Abweichung für den am ungünstigsten liegenden Radienwert bei Luft von 1 Atm. schätzungsweise doch nur 10 v. H. und bei Luft von $^1/_{100}$ Atm. nur 1 v. H. betragen können.

Auch für flüssige Medien könnte wie oben gefolgert werden, daß ω_h dicht außerhalb der Gültigkeitsgrenze zu klein sei, obgleich $L < \lambda$ ist; denn die Bewegung mit der Amplitude L geht doch in der Dicke λ einer ganzen Molekülschicht um das Partikel vor sich, und es ist also die für das Geschwindigkeitsgefälle in der hydrodynamischen Lösung angenommene Strecke von der Ordnung R wieder zu klein, sobald $R < \lambda$ wird. Der Vorgang der inneren Reibung ist jedoch bei Flüssigkeiten komplizierter als bei Gasen, was die Überlegung bei diesen Medien erschwert (vgl. 176, 177).

2) Die hydrodynamische Gleichung nimmt das Geschwindigkeitsgefälle als stetig an. In Wirklichkeit sind aber die Geschwindigkeitsunterschiede auf die Zwischenräume der Moleküle beschränkt. Die Gleichung rechnet also mit kleineren Geschwindigkeitsgefällen als der Wirklichkeit entspricht, und sie muß daher zu wenig Reibung, d. i. zu große Geschwindigkeit ergeben, sobald die Diskontinuitäten des Mediums überhaupt in Betracht kommen.

halb der Gültigkeitsgrenze können die beiden entgegengesetzten Abweichungen von ω_h einander aufheben, und dies darf wohl als Ursache der in Tabelle 4 (3. und 4. Zeile) ersichtlichen, bis zu sehr kleinen, schon außerhalb der Gültigkeitsgrenze von ω_h liegenden Radienwerten hin fortgesetzten ziemlich guten Übereinstimmung von ω_g und ω_h, ohne Auftreten zu kleiner Werte von ω_h, angesehen werden.[1]) Das schließliche Eintreten zu großer Werte von ω_h bei kleinsten Radien ist in der Tabelle gut ersichtlich (1. und 2. Zeile); es kann dort unzweifelhaft nur ω_g Gültigkeit haben.

Abschnitt 9. Flüssige Medien; elektrolytische Ionen.

Wir wenden auch auf Flüssigkeiten sowohl die hydrodynamische als die gaskinetische Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung an[2]), jede in ihrem Gültigkeitsbereich. Es handelt

1) Ein Fall, in welchem die erwartete Abweichung $\omega_h < \omega_g$ bei kleinen Radien tatsächlich auftritt, ist der der Wanderung von H_2-Molekülen in Luft von 1 Atm. Druck und 20° C. Man berechnet hier $\omega_h / K = 40{,}3 \cdot 10^{12}$, $\omega_g / K = 42{,}2 \cdot 10^{12}$ cm/sec dyn., wobei natürlich nur der letztere, gaskinetische Wert innerhalb der Gültigkeitsgrenze der betreffenden Gleichung liegt.

2) Die Anwendbarkeit der gaskinetischen Betrachtungsweise auf Flüssigkeiten nehme ich als genügend gesichert an. Grundlage hiervon ist das wohl nicht zu bezweifelnde Verschwinden der mittleren resultierenden Molekularkraft im Inneren der Flüssigkeit, so daß nur die Stoßwirkungen der Moleküle als bestimmend für deren Bewegungen übrig bleiben. Ein Unterschied gegenüber den Gasen besteht (außer in den quantitativen Verhältnissen) nur darin, daß die Kräftefreiheit für die Flüssigkeitsmoleküle nur im Mittel (genommen mit Größe und Richtung der augenblicklichen Kräfte) über eine Anzahl Weglängen (und bei konstanten mittleren Abständen der Moleküle) gilt, während sie bei Gasen (mit großer Annäherung) dauernd besteht. Dieser Unterschied kann wohl die exakte, nicht aber eine gut angenäherte Gültigkeit der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung für Flüssigkeiten zweifelhaft machen. Im Erfolg ist die gute Anwendbarkeit gaskinetischer Resultate auf Flüssigkeiten auch bereits mehrfach bestätigt. So durch die Brauchbarkeit von van der Waals' Gleichung weit über die kritische Dichte hinaus, durch die gute Berechenbarkeit der Diffusion in Flüssigkeiten bei Annahme einer auch sonst widerspruchsfreien Größe der freien Weglängen der Flüssigkeitsmoleküle (vgl. Riecke, Zeitschr. f. phys. Ch. 6. S. 564, 1890), wozu weitergehend auch die neueren Erfolge in der quantitativen Beherrschung der Wimmelbewegung (Brownschen Bewegung) und der räumlichen Verteilung kleinster suspendierter Teilchen

sich dabei hier vor allem um die Untersuchung der Besonderheiten, welche beim flüssigen Aggregatzustand auftreten, sodann um die Behandlung des wichtigen Sonderfalles der Ionenwanderung.

170. *Freiraumfaktor* Ψ. — In Flüssigkeiten ist zu der für Gase genügend genau geltenden gewöhnlichen Gleichung für die mittlere freie Weglänge L_t des Partikels[1]) noch ein Faktor Ψ hinzuzufügen, welcher die Raumerfüllung der Moleküle berücksichtigt. Man hat dann

$$L_t = \frac{W_t \Psi}{N \pi s^2 \sqrt{W_t^2 + W^2}}. \tag{95}$$

Dabei ist in der Bezeichnungsweise der van der Waalsschen Gleichung,

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{96}$$

$$\Psi = \frac{v - b}{v} \tag{97}$$

zu setzen. Denn der Sinn der gewöhnlichen Ableitungsweise der freien Weglänge, wobei dieselbe ohne den Faktor Ψ erscheint, ist der, daß man die Länge des Zylinders vom Querschnitte $s^2\pi$ sucht, dessen Volumen $1/N$ ist, wozu dann noch die Hinzufügung des Faktors $W_t/\sqrt{W_t^2 + W^2}$ kommt, welcher die Bewegung der Mediumsmoleküle berücksichtigt. Hierbei sind die Mediumsmoleküle sowohl als das Partikel als volumlose flache Gebilde angenommen, deren Flächen stets senkrecht zur Partikelbahn gerichtet sind. Letzteres ist treffend, da die für das Stattfinden eines Zusammenstoßes maßgebenden Querschnitte der für einen richtigen Weglängenmittelwert kugelförmig zu denkenden Mediumsmoleküle sowohl als des Partikels in der Tat stets senkrecht zur Bahnrichtung stehen; nur ist noch zu beachten, daß ein durchschnittlicher Zusammenstoß nicht erst dann stattfindet, wenn das Partikel mit seinem gedachten, sowohl seine eigene Breite als die der Mediumsmoleküle berück-

in Flüssigkeiten zu nennen sind (Einstein, Perrin) und endlich durch die einfache Berechenbarkeit des osmotischen Druckes (vgl. P. Lenard, „Probl. kompl. Mol.", Teil I, 1914). Eine spezielle Probe auf die Kräftefreiheit der Flüssigkeitsmoleküle bringen wir unter 177.

1) Vgl. Teil I, S. 401.

sichtigenden Querschnitt $s^2\pi$ seit dem letzten Zusammenstoß das Volum $1/N$ beschrieben hat, in welchem durchschnittlich ein Mediumsmolekül sich findet, sondern schon dann, wenn dasjenige Volum beschrieben ist, welches als von für das Partikel undurchdringlichem Molekularvolum freier Raum zu je einem Mediumsmolekül gehört. Dieses letztere tatsächlich in Rechnung zu setzende Volum verhält sich aber zum angenommenen, $1/N$, wie $(v-b)$ zu v und in demselben Verhältnis Ψ muß daher die ohne Rücksicht auf die Raumerfüllung berechnete Weglänge zur wirklichen stehen, was zu beweisen war.[1])

Man kann auch, der Bedeutung der Größe b nach, setzen

$$\Psi = 1 - z\beta, \tag{97a}$$

wobei β das bei den Zusammenstößen undurchdringliche Eigenvolum der Mediumsmoleküle als Bruchteil des Gesamtvolums des Mediums und z eine Zahl ist, die beim kritischen Zustand oder bei verdünnterem Zustande 4 beträgt, bei größerer Dichte des Mediums aber kleiner wird, ohne jedoch bis 1 zu gehen.[2]) Die Gl. (97a) ist geeignet, eine Abschätzung der Größe Ψ zu liefern. Es ist z. B. im kritischen Zustand für alle Stoffe nahe $\beta = \frac{1}{10}$, also $\Psi = 0{,}6$. In anderen Zuständen ist demnach:

$$\beta = \frac{D}{10\,d_k} \tag{97b}$$

und also:

$$\Psi = 1 - \frac{z}{10}\,\frac{D}{d_k}, \tag{97c}$$

wenn D die Dichte im betreffenden Zustand, d_k die kritische Dichte ist. Wegen der unsicheren Kenntnis von z ist aber

---

1) Es scheint über den wahren Wert des Faktors Ψ nicht vollkommene Klarheit in der Literatur zu herrschen, wenn es sich, wie im vorliegenden, um die Weglänge eines fremden Moleküls in einer Flüssigkeit handelt, weshalb hier ausführlich der Gedankengang dargelegt worden ist, der für das Vorliegende zur Annahme der Gl. (97) für Ψ geführt hat. Vgl. das oben Folgende und die zugehörige zweitfolgende Fußnote.

2) Vgl. van der Waals „Kontinuität", Bd. I, S. 54 u. f. (Leipzig 1899). Eine Zusammenstellung verschiedener, für gewisse Fälle geltender, z betreffender Annahmen vgl. bei R. Lorenz, Zeitschr. f. anorg. Ch. 94. S. 262. 1916.

diese Berechnungsweise von Ψ bei Dichten, welche die kritische wesentlich überschreiten, im allgemeinen unbefriedigend.[1] Von vornherein unzweifelhaft ist nur, daß Ψ bei wachsender Dichte der Null sich nähern muß, so daß für alle tropfbaren Flüssigkeiten $0{,}6 > \Psi > 0$ ist.

Für Wasser ($d_k = 0{,}33$) ist bei gewöhnlichen Temperaturen und Drucken $\beta = 0{,}30$ [Gl. (97b)] Setzt man $z = 3$, so wird nach Gl. 97a $\Psi = 0{,}1$; mit $z = 2$ würde $\Psi = 0{,}4$. Die Wirklichkeit muß nach dem über z Bemerkten wohl zwischen beiden Werten liegen. Eine bessere Berechnung von β, mittels Gl. (97), aus der Kompressibilität, geben wir unter 172.[2]

171. *Die mittlere freie Weglänge L der Moleküle des flüssigen Mediums* selbst wird nach Gl. 95 ($W_1 = W$, $s = 2r$)

$$L = \frac{\Psi}{4\sqrt{2}\,N\pi r^2},$$

was nach der Bedeutung von β und nach (Gl. 97b) auch geschrieben werden kann:

$$(98) \qquad L = \frac{\Psi r}{4\sqrt{2}\,N\pi r^3} = \frac{\Psi r}{3\sqrt{2}\,\beta} = \frac{10\,\Psi r\, d_k}{3\sqrt{2}\,D}.$$

1) Auch zur richtigen Herleitung des Zusammenhanges zwischen Ψ und den Raumerfüllungen der Mediumsmoleküle und des Partikels erscheinen Gedankengänge, welche, wie Gl. (97a) und (c), die Zwischenschaltung der Größe $\varkappa$ erfordern, nicht günstig. Folgt man z. B. dem bei O. E. Meyer („Kinetische Gastheorie", Breslau 1899, S. 76 uff. der mathem. Zusätze) benutzten Gedankengange und führt ihn für den Fall des von den Mediumsmolekülen verschiedenen Partikels durch, so erhält man $\Psi = 1 - \varkappa\beta(s/2r)^3$, wonach diese Größe nicht Konstante des Mediums allein, sondern auch vom Partikelradius abhängig wäre. Man sieht aber, daß nach dieser Gleichung bei einiger Größe des Partikels ($s > 2r$) sofort negative, also unsinnige Werte von Ψ erfolgen würden, wenn man nicht $\varkappa$ ebenfalls Funktion des Partikelradius sein läßt, was unmittelbar anzeigt, daß die Gleichungen, welche Ψ mittels eines gewissen $\varkappa$-fachen Molekularvolums ausdrücken, für unseren Fall des von den Mediumsmolekülen verschiedenen Partikels praktisch unbrauchbar sind. Hiermit stimmt auch überein, daß nach van der Waals Bemerkungen (a. a. O.) $\varkappa$ von der schwer in Rechnung zu bringenden relativen Häufigkeit der zentralen und der schiefen Zusammenstöße abhängig erscheint. Wir haben daher im obigen von Anfang an die von $\varkappa$ unabhängige Gl. (97) in den Vordergrund gestellt.

2) Eine bei van der Waals (a. a. O. S. 65) angegebene Gleichung liefert keine engere Grenze; sie zeigt für Wasser nur $\varkappa > 1{,}44$, somit $\Psi < 0{,}57$ an.

Im kritischen Zustand ist demnach für alle Stoffe $L = \sqrt{2}r$ und für Wasser im gewöhnlichen Zustand, sowie für alle Körper in korrespondierenden Zuständen ergibt sich mit den vorhergenannten Daten $0{,}3r > L > 0{,}08r$. Die freie Weglänge, welche im Gaszustand groß ist gegenüber dem Molekülradius, wird also bei Flüssigkeiten, deren Dichte die kritische wesentlich übertrifft, klein gegenüber diesem Radius, und da bei solchen Flüssigkeiten λ nicht weit von $2r$ verschieden ist, so ist gleichzeitig mit $L < r$ auch $L < \lambda$. Es sind dies die in den vorhergehenden Abschnittten bereits mehrfach benutzten Ungleichheiten.

172. *Ψ aus der Kompressibilität.* — Der direkteste Weg zur Kenntnis des Freiraumfaktors Ψ führt nach Gl. (96) und (97) über die Kompressibilität. Denn diese ist in erster Linie bedingt durch die zwischen den Molekülen verfügbaren freien Zwischenräume; sie muß also über $(v-b)/v$ Auskunft geben. Man hat nach van der Waals Gleichung (96) bei konstanter Temperatur:

$$(p + P)(v - b) = \text{Konst.}, \tag{99}$$

wobei wir hier für den inneren Druck oder „Normaldruck" das Zeichen P gesetzt haben, um die für wesentlich überkritische Dichten zweifelhafte Annahme $P = a/v^2$ für die genaue Berechnung vermeidbar zu machen. Die Kompressibilität ist in ihrer gewöhnlichen Meßweise:

$$\gamma = -\frac{dv}{dp} \cdot \frac{1}{v};$$

um diese in Gl. (99) einzuführen, ist dieselbe zu differenzieren, wobei

$$(v-b)\left(1-\gamma v \frac{dP}{dv}\right) = Pv\gamma$$

wird[1]), woraus mit Gl. (97)

$$\Psi = \frac{P\gamma}{1-\gamma v \frac{dP}{dv}}. \tag{99a}$$

Es müssen also, um Ψ zu berechnen, außer γ auch P und dP/dv bekannt sein. Für letztere Größe kann man zunächst in Annäherung $-2P/v$ setzen, was $P = a/v^2$ entspricht.

1) p verschwindet als Summand neben P.

Am schlechtesten bekannt ist der Normaldruck P. Ich habe denselben für Wasser von gewöhnlicher Temperatur mittels des angenähert konstanten Wertes 0,4 des Verhältnisses zwischen Wirkungssphärenmaß und Molekülradius (für alle Flüssigkeiten bei gewöhnlicher Temperatur) früher zu $P = 80 \cdot 10^6$ dyn/cm^2 = 8000 Atm. berechnet[1]), und wir werden diesen Wert im folgenden benutzen, wobei er Kontrolle erfährt und auf keine Widersprüche stößt. Die aus der soeben angegebenen Berechnung folgende Unsicherheit von P entspricht der der Allgemeingültigkeit bzw. Konstanz des angegebenen Verhältnisses 0,4, wonach jedenfalls etwa 6000 Atm. $< P <$ 10000 Atm. zu denken ist. Man berechnet hiermit und mit dem weiter unten angegebenen Werte von γ nach Gl. (99a) $\Psi = 0{,}22$, was gut in die vorher (170) für Wasser angegebenen Grenzen paßt.

Um die Annahme $P = a/v^2$ zu prüfen, bzw. auszuschalten, kann die bekannte Abhängigkeit der Kompressibilität vom Druck benutzt werden. Um diese einzuführen, ist Gl. (99a) nochmals zu differenzieren; man erhält so, wieder nach Weglassung von p neben P:

$$v\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{2\gamma - \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)P - \gamma^3 v^3 \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\Psi}{2\gamma + \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)\Psi}. \tag{100}$$

Hierin darf in $\partial^2 P/\partial v^2$ unzweifelhaft genügend genau $P = a/v^2$ gesetzt werden, da das betreffende Glied hiermit nur $^1/_{30}$ des Gesamtwertes des Zählers erhält, also innerhalb der hier erreichbaren Genauigkeit überhaupt kaum von Einfluß ist. Dadurch wird:

$$v\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{2\gamma - \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p} + 6\Psi\gamma^2\right)P}{2\gamma + \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)\Psi}. \tag{100a}$$

---

1) Vgl. „Probleme komplexer Moleküle" (Heidelberg, bei Winter, 1914), Teil II. S. 5—7. (In der für Benzol geltenden Zeile der dortigen Tab. I sind übrigens die dortigen Angaben zu ersetzen durch: C_6H_6, $r = 2{,}84$, $\lambda/r = 0{,}53$, was jedoch nichts dort oder hier Geschlossenes ändert). Die Schwierigkeit bei Wasser liegt in der Polymerisation seiner Moleküle, weshalb sowohl die van der Waalssche Gleichung als auch andere bekannte Wege zur Berechnung von P bei dieser Flüssigkeit versagen.

Die zur Zahlenberechnung benutzbaren Messungsresultate von **Amagat** sind[1]:

Kompressibilität des Wassers von 20° C. { zw. 0 und 25 Atm. $\gamma = 0{,}0000491$/Atm. „ 25 „ 50 „ $\gamma = 0{,}0000476$/Atm.,

wonach $\partial\gamma/\partial p = -0{,}000000060$/Atm.[2] zu zetzen ist bei einem mittleren Wert von $\gamma = 0{,}0000484$/Atm.[2]) Man erhält hiermit, $P = 8000$ Atm. und $\Psi = 0{,}2$ gesetzt:

$$v\frac{\partial P}{\partial v} = -25000 \text{ Atm.},$$

während die van der Waalssche Annahme ($P = a/v^2$)

$$v\frac{\partial P}{\partial v} = -2P = -16000 \text{ Atm.}$$

ergäbe. Der Unterschied ist also nicht groß.[3])

Berechnet man mit dem ersteren, nach der Erfahrung verbesserten Wert von $v\partial P/\partial v$ Ψ von neuem nach Gl. (99a), so findet man $\Psi = 0{,}18$, und die Fortsetzung des Verfahrens, indem man mit dem neuen Ψ wieder $v\partial P/\partial v$ nach Gl. (100a) verbessert und so fort in sukzessiver Annäherung, ergibt schließlich:

$$v\partial P/\partial v = -28000 \text{ Atm. und } \Psi = 0{,}17.$$

Dieser Wert enthält allerdings noch die Unsicherheit, welche dem angenommenen Wert $P = 8000$ Atm. anhaftet; es könnte demnach, dem oben über diese Unsicherheit Angegebenen entsprechend, etwa

$$0{,}13 < \Psi < 0{,}21$$

---

1) Entnommen Landolt und Börnsteins Tabellen (1912. S. 62).

2) Unsere Resultate werden sich demnach auf einen äußeren Druck von 25 Atm. beziehen, was aber gegen den gewöhnlichen Druck von 1 Atm. bei der geringen Kompressibilität des Wassers keinen wesentlichen Unterschied bedeuten kann.

3) Dem Sinne nach ist der Unterschied verständlich. Der Zuwachs des inneren Druckes bei Volumverminderung muß bei der großen gegenseitigen Nähe, in welcher die Moleküle in flüssigem Wasser sich befinden, in der Tat größer erwartet werden als nach der für größere Molekülabstände passenden van der Waalsschen Annahme. Denn die Molekularkräfte wachsen mit abnehmendem Abstand der Moleküle gegen die Berührung hin wohl unzweifelhaft nach viel höherer Abstandspotenz als in größeren Abständen; außerdem spielt vielleicht die Polymerisation der Wassermoleküle eine Rolle (vgl. die zweitfolgende Note).

sein, geltend für Wasser von 20° C. bei gewöhnlichen Drucken [und nahezu wohl auch für andere Flüssigkeiten in korrespondierenden Zuständen[1]]. Wir finden die untere Grenze im weiteren bestätigt, indem dort aus ganz anderen Gründen $\Psi > 0{,}1$ erwartet wird, und da für Wasser Ψ — und damit auch die obere Grenze — mittels Gl. (99a) nur zu hoch zu erwarten ist[2]), so kann die Einschließung von Ψ in den angegebenen Grenzen als einigermaßen gut gesichert angesehen werden. Sie bestätigt sich außerdem bei Anwendung von Ψ im weiter Folgenden (180).

Benutzt man den mittleren Wert $\Psi = 0{,}17$, so ergibt sich für Wasser von 20° C. aus Gl. (97a) $z = 2{,}8$ und aus Gl. (98) das Verhältnis von Weglänge und Molekülradius $L/r = 0{,}13$. Die freie Weglänge selbst wäre demnach $L = 0{,}32 \cdot 10^{-8}$ cm (geltend für H_4O_2 Moleküle, $r = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm).

173. *Der gaskinetische Wanderungsgeschwindigkeitsausdruck* nimmt mit dem Freiraumfaktor Ψ zur freien Weglänge, da letzterer im Zähler des Ausdruckes vorkommt [vgl. Gl. (21)], für Flüssigkeiten die Form an:

$$(101)\quad \begin{aligned} \omega_g &= \frac{3}{3+\mu}\,\Omega_\mu \frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}\,\Psi \\ &= \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W}\,\Psi, \end{aligned}$$

wobei Fall *A* (elastische Reflexion) vorausgesetzt ist [für Ω_μ vgl. Gl. (8)].[3])

1) Strenge genommen muß Ψ auch von der Form der Moleküle abhängen, wonach genaue Gleichheit bei korrespondierenden Zuständen nicht erwartet werden kann.

2) Es spielt bei der Kompressibilität des Wassers wohl unzweifelhaft die Polymerisation der Wassermoleküle eine Rolle, was schon dadurch angezeigt ist, daß die Kompressibilität dieser Flüssigkeit mit steigender Temperatur (bis 50° C.) nicht steigt wie bei anderen Flüssigkeiten, sondern sinkt. Komprimiert man Wasser bei konstanter Temperatur, wie oben berechnet, so ist daher anzunehmen, daß ein Teil der Moleküle in die weniger Raum beanspruchende Modifikation übergeht (H_4O_2 in $2H_2O$). Dies würde aber die Folge haben, daß die Kompressibilität größer ausfällt, als es nur den Zwischenräumen bei unveränderten Molekülen entspräche. Die Zwischenräume und also auch Ψ müßten demnach oben aus der Kompressibilität zu groß berechnet sein.

3) Fall *C* ergibt dasselbe; die für die Fälle *B* und *D* hinzutretenden Faktoren sind aus Abschnitt 6 ersichtlich. Es ist zu bemerken, daß die

Das Gültigkeitsbereich haben wir bereits zu $R \leqq \lambda$ angegeben (159). Die Gleichung könnte demnach z. B. für freie Elektronen in flüssigen Edelgasen in Betracht kommen (vgl. Tab. V, oberste Zeile[1]), aber auch der Fall der gewöhnlichen nicht sehr großen elektrolytischen Ionen liegt noch innerhalb ihres Bereiches, wie das Folgende zeigen wird (178 u. ff.).

Jenseits der Gültigkeitsgrenze läßt die Gleichung zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit erwarten (169) und ebenso also zu kleine Werte der Partikelradien, wenn man diese aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten berechnet. Man findet dies am Beispiel des Wassers bestätigt (Tab. V). Die Bestätigung bliebe aus, wenn nicht $\Psi > 0{,}10$ wäre, und da diese Bedingung für Ψ mit der oben (172) auf ganz anderem Wege gefundenen, $\Psi > 0{,}13$, gut übereinstimmt, sehen wir bei Wasser als Medium unsere Annahme über die Gültigkeit der Gl. (101) mit $\Psi = 0{,}17$ und über die Grenze der Gültigkeit als bestätigt an.

174. *Der hydrodynamische Wanderungsgeschwindigkeitsausdruck* ω_h [Gl. (84)] nimmt bei Flüssigkeiten innerhalb seines Gültigkeitsbereiches, $R > \lambda$ (156), die einfache ursprüngliche (Stokes-Kirchhoffsche) Form an [Gl. (83)], da in diesen Medien bei $R > \lambda$ $R \gg L$ ist (vgl. 171). Das Gültigkeitsbereich umfaßt alle beliebig großen wirbelfrei bewegten Partikel bis herab zu vielleicht 6fachem Mediumsmoleküldurchmesser ($R = 3\lambda$). Die Ionen in wässerigen Elektrolyten fallen, wie das Folgende zeigt (178 u. ff.), schon eben deutlich außerhalb des Gültigkeitsbereiches. Einzelheiten bei Überschreitung der Gültigkeitsgrenze betrachten wir unter 175 und 176.

175. *Einen Vergleich der gaskinetisch und der hydrodynamisch berechneten Wanderungsgeschwindigkeiten* gibt Tab. V [Spalten 4 und 5, nach Gl. (101) bzw. (84)] *für Wasser als Medium.*

Fälle *A* und *C* für flüssige Medien am meisten in Betracht kommen (vgl. Abschnitt 5), da das Gültigkeitsbereich der gaskinetischen Gleichung hier auf kleinste Partikel eingeschränkt ist (vgl. Abschnitt 8 und das oben Folgende; in Gasen erstreckt sich das Gültigkeitsbereich der Gleichung auf viel größere Partikel, was beispielsweise ein Vergleich von Tab. IV mit V unmittelbar ersichtlich macht).

1) Echte Reflexion der Elektronen an den Atomen vorausgesetzt.

Tabelle V.

Gaskinetisch und hydrodynamisch berechnete Wanderungsgeschwindigkeiten in Wasser (20° C.)

Partikelradius R			Massenverhältnis	Wanderungsgeschwindigkeit cm sec^{-1} dyn^{-1}			
						ω/K	
10^{-5} cm	in Vielfachen von r und λ (rund)		μ	ω_g/K *)	ω_h/K *)	linear interpol.	graph. interpol.
	(freie Elektronen in flüssigem Stickstoff oder Argon)						
0			0,00002	5,8 $\cdot 10^{13}$	∞		
0,5			0,35 [1])	34 $\cdot 10^{8}$	20 $\cdot 10^{8}$		
1			0,50 [2])	14 „	7,7 „		
2	$= r$		0,60 [3])	7,2 „	3,2 „		
3			0,80 [4])	3,8 „	2,0 „		
4			0,90 [5])	2,4 „	1,5 „		
5	$= \lambda (= 2r)$		0,95	1,7 „	1,2 „	1,7 $\cdot 10^{8}$	1,7 $\cdot 10^{8}$
6			1 [6])	*1,2* „	0,95 „	*1,6* „	1,3 „
8			1	*0,81* „	0,70 „	*1,3* „	0,87 „
10	$= 2\lambda$		1	*0,57* „	0,55 „	*1,0* „	0,64 „
12			1	0,42 „	*0,45* „	*0,8* „	0,50 „
15	$= 3\lambda$		1	0,29 „	0,36 „	*0,66* „	0,37 „
20			1	0,17 „	0,27 „		
30			1	0,083 „	0,18 „		
50	$= 10\lambda$		1	0,032 „	0,11 „		
100			1	8,4 $\cdot 10^{3}$	53 $\cdot 10^{3}$		
500	$= 100\lambda$		1	0,85 „	10,6 „		
1000			1	0,087 „	5,3 „		
5000	$= 1000\lambda$		1	0,0035 „	1,06 „		
10000			1	0,0009 „	0,53 „		

Verschiedene elektrolytische Ionen; Größere komplexe Molekülen; Ultramikroskopische Partikel; Mikroskop. Partikel

*) Im Gültigkeitsbereich der betreffenden Gleichung befindliche Zahlen sind fett gedruckt.

Die für die Partikelmassen (Spalte 3, zur Berechnung von ω_g) gemachten Annahmen sind aus den Fußnoten zur Tabelle ersichtlich. Man sieht ein, daß die Masse überhaupt nur bei Radien unter etwa $6 \cdot 10^{-8}$ cm eine merkliche Rolle spielen

1) Entspricht etwa einem H-Ion mit $1 H_2O$.
2) „ „ „ „ „ $2 H_2O$.
3) „ „ „ OH-Ion „ $2 H_2O$.
4) „ „ „ K-Ion „ $6 H_2O$.
5) „ „ „ Na-Ion „ $17 H_2O$.
6) Entspricht den größten, aus sehr vielen Atomen zusammengesetzten Ionen. Bei allen noch größeren Partikeln gilt ebenfalls das Massenverhältnis $\mu = 1$ in vollkommen genügender Annäherung, auch wenn sie aus leichtest möglichem Stoff bestehen. Selbst Wasserstoffgasbläschen würden (infolge des hohen kapillaren Druckes) keine Ausnahme machen. Vgl. das Entsprechende in der Note zu 166.

kann, da für alle größeren Partikel μ immer sehr nahe 1 fällt, gleichgültig aus welchen Stoffen sie bestehen mögen, und auch bei Radien zwischen 3 und $6 \cdot 10^{-8}$ cm würde die Masse nur dann maßgebend werden (μ genügend klein ausfallen), wenn die Partikel aus den leichtesten Atomen (etwa H oder He) aufgebaut wären (vgl. 96 und 148). Es gelten daher die in der Tabelle angegebenen Wanderungsgeschwindigkeiten unabhängig vom Stoffe der Partikel, mit Ausnahme nur bei Radien unter 3 oder $6 \cdot 10^{-8}$ cm, wo die angegebenen Werte von ω_g nur als individuelle Beispielsfälle (den in der Tabelle angegebenen μ-Werten entsprechend) anzusehen sind.[1])

Die jeweils innerhalb Gültigkeitsbereich der betreffenden Gleichung liegenden Werte sind fett gedruckt. Man sieht den guten Aneinanderschluß von ω_g und ω_h beim Übergang von einem zum anderen Gültigkeitsbereich (Radiengegend 6 bis $12 \cdot 10^{-8}$ cm, vgl. dazu 176). Bei den außer Gültigkeitsbereich liegenden großen Radienwerten fällt ω_g zu klein aus, wie es erwartet wurde (173). Ebenso zeigt ω_h das (nach 169) zu erwartende Verhalten; die Werte werden dicht außerhalb des Gültigkeitsbereiches zu klein, bei allerkleinsten Radien (erste Zeile der Tabelle) aber zu groß.

176. *Über die Gegend des Überganges von ω_g zu ω_h und über die Flüssigkeitsreibung.* — In der Gegend von etwa $\lambda < R < 3\lambda$ sind beide Werte, ω_g und ω_h, nach ihren Gültigkeitsgrenzen als ungenau oder gar unzutreffend zu betrachten, und vielleicht erstreckt sich diese Gegend der Unsicherheit bei manchen Flüssigkeiten auch noch etwas weiter über $R = \lambda$ hinaus nach der Seite der kleinen Radien hin.[2]) Es sollten in dieser Gegend nach den unter 169 für Gase durchgeführten Überlegungen, welche auch bei flüssigen Medien Geltung behalten[3]), beide Werte, ω_g und ω_h, zu klein sein, und Tab. V zeigt, daß dies bei Wasser als Medium auch wirklich zutrifft, wenn man die

1) Die Horizontallinie in der Tabelle sondert diese Werte ab.

2) Ein Zeichen dafür kann darin gesehen werden, daß die Gleichheit $\omega_g = \omega_h$, welche bei Wasser innerhalb des erwarteten Bereiches der Unsicherheit eintritt, nämlich nahe bei $R = 2\lambda$ (vgl. Tab. V, ähnlich auch bei C_6H_6, CCl_4), bei anderen Flüssigkeiten (z. B. CS_2, $C_4H_{10}O$) auf Radienwerte $R < \lambda$ fällt.

3) Vgl. die betr. Fußnote unter 169.

ohne nennenswerte Unsicherheit ausführbare graphische Überbrückung der besagten Radiengegend (letzte Spalte Tab. V) als zutreffend ansieht. Es ist jedoch nicht sicher, ob dasselbe für alle Flüssigkeiten gelten müsse, denn es findet bei flüssigen Medien bei Durchschreitung dieser Radiengegend nicht nur die bei den erwähnten Überlegungen in Betracht gezogene, für gasförmige Medien allein maßgebende Größenänderung des Geschwindigkeitsgefälles statt, sondern auch eine *Änderung des Mechanismus des Widerstandes*. Während nämlich bei Gasen dieser Mechanismus durch die Betrachtung der Molekülzusammenstöße in allen Fällen erschöpft ist, gleichgültig, ob das Partikel so klein ist, daß es die Mediumsmoleküle einzeln trifft (ω_g), oder ob ganze Schichten zusammenstoßender Moleküle mitwirken, wie es die Einführung der Reibungskonstante η voraussetzt, so muß bei Flüssigkeiten im letzteren Falle außerdem noch ein andersartiges Zusammenwirken der Moleküle mit in Betracht kommen. Denn versucht man die Reibungskonstante einer Flüssigkeit nach der für Gase geltenden Gleichung zu berechnen, so findet man sie sehr viel zu klein.[1]) Da das hiermit erkannte, besondere, der Flüssigkeitsreibung eigentümliche Zusammenwirken der Moleküle noch nicht genügend aufgeklärt ist[2]), so ist in der besagten Radiengegend

---

1) Überträgt man die durch die kinetische Gastheorie gegebene Gleichung für die innere Reibung, $\eta = \frac{1}{3} DWL$, dem Sinne ihrer Ableitung folgend, auf Flüssigkeiten, so tritt an Stelle der freien Weglänge L der Molekülzentrenabstand λ auf (gemäß einer am Schlusse von 159 durchgeführten Überlegung), wodurch $\eta = \frac{1}{3} DW\lambda$ wird. Die hiernach berechnete innere Reibung von Äther, CS_2, C_6H_6, Wasser ist nur der 5. bis 15. Teil der experimentell festgestellten. Es ist mir allerdings bekannt, daß von Herrn Jäger eine andere Gleichung für die Flüssigkeitsreibung, aus gaskinetischer Auffassung hergeleitet, angegeben worden ist, die scheinbar gut mit der Erfahrung stimmt (Wien. Ber. 102. S. 253. 1893); ich vermag jedoch die Richtigkeit der Herleitung nicht zu erkennen, worauf im einzelnen einzugehen hier zu weit führen würde. Es sei nur bemerkt, daß ich den *inneren Druck* P in Flüssigkeiten nicht als rein (molekular-)kinetisch ansehe, sondern als *zum Teil statisch*, was vielleicht bei einer anderen Gelegenheit näher ausgeführt und verwertet werden kann. Übrigens zeigt schon die der Gasreibung entgegengesetzte Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeitsreibung an, daß die rein gaskinetische Erklärung nicht genügen kann (vgl. auch 177 und 180).

2) Vgl. übrigens 177.

bei flüssigen Medien gar keine andere Vorhersage möglich als die, daß dort die wirkliche Wanderungsgeschwindigkeit einen (auch im Differentialquotienten) stetigen Übergang von ω_g zu ω_h bilden müsse. Es wird demnach in dieser Gegend stets der zu tiefst liegende der beiden Werte eine *untere Grenze* für den wirklichen Wert der Wanderungsgeschwindigkeit bilden, während die lineare Interpolation von λ bis 3λ eine *obere Grenze* ergeben muß, da sowohl ω_g als ω_h als Funktion von R nach oben konkav verlaufen. Die so erhaltenen Grenzwerte sind für Wasser in Tab. V angegeben (kursiv gedruckt). Man sieht, daß die zwischen beiden Grenzwerten sich bewegende graphische Interpolation (letzte Spalte der Tabelle) bei diesem Medium im ganzen erwarteten Bereich der Unsicherheit den Werten ω_g und ω_h sehr nahe bleibt, während sie gleichzeitig die Bedingung eines auch im Differentialquotienten stetigen Überganges von ω_g zu ω_h so gut wie willkürfrei erfüllt, wonach sie Vertrauen erweckt, so daß die Tab. V bis auf weiteres zur Entnahme von Radienwerten aller Größen — besonders auch in der Gegend des Überganges von ω_g zu ω_h — aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten aufs beste geeignet erscheint.[1])

177. *Kein Einfluß elektrischer Felder auf die innere Reibung der Flüssigkeiten; dieselbe nicht innere Klebrigkeit, vielleicht aber innere Rauhigkeit.* — Wir fanden im vorhergehenden Anlaß anzunehmen, daß der Mechanismus der inneren Reibung bei Flüssigkeiten zum Teil ein anderer sei als bei Gasen. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß in Flüssigkeiten durch Wirkung der Molekularkräfte, die elektromagnetischer Natur sind, zeitweilige Ketten aus den Molekülen entstehen könnten, und daß dies die besondere, große innere Reibung der Flüssigkeiten ergäbe. Solche Kettenbildung würde dann aber auch an kleinsten wandernden Partikeln stattfinden können, z. B. im Wasser an

1) Es sind für die Wanderungsgeschwindigkeit die fettgedruckten Zahlen zu benutzen. Bei Radienwerten kleiner als etwa 3 oder $6 \cdot 10^{-8}$ cm (s. die Horizontallinie in der Tabelle) ist Rücksicht auf μ zu nehmen (vgl. 175). Als ein Beispiel der Anwendung der Tabelle in der anders nicht zugänglichen Gegend des Überganges ist die Ermittlung der Radien der langsamsten elektrolytischen Ionen zu nennen (letzte Zeile der Tab. VI, vgl. 188).

den Wassermoleküle enthaltenden elektrolytischen Ionen, und sie müßte die gaskinetische Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung, welche das Partikel innerhalb der freien Weglängen ganz kräftefrei annimmt, ungültig machen. Ich habe daher Versuche angestellt, um über das Statthaben solcher Kettenbildung, bzw. überhaupt über das Mitwirken der Molekularkräfte bei der inneren Reibung der Flüssigkeiten Aufschluß zu erhalten. Da die Erscheinungen der Wasserfallelektrizität angezeigt haben, daß die Molekularkräfte in Flüssigkeiten mindestens zu einem Teil rein elektrostatischer Natur sind[1]), so würde in den eben gedachten Molekülketten eine elektrische Orientierung der Moleküle anzunehmen sein, und es müßten danach diese Ketten durch elektrische Felder beeinflußbar sein, derart, daß sie beim Vorhandensein eines solchen Feldes die Erstreckung in Kraftrichtung des Feldes bevorzugen, was als eine Verringerung der inneren Reibung gegen Bewegung in Kraftrichtung bemerkbar werden müßte. Versuche, die eine Beeinflussung der inneren Reibung von Flüssigkeiten durch elektrische Felder aufsuchen sollten, sind bereits wiederholt angestellt worden. Es wurden jedoch nur gut isolierende Flüssigkeiten benutzt, niemals Wasser oder wässerige Elektrolyten, welche wegen der auf die Ionen bezüglichen Fragen ein besonderes Interesse besitzen; auch waren die Resultate der bisher veröffentlichten Versuche teilweise einander widersprechend.[2]) Ich habe daher die folgenden Versuche ausgeführt.

Ein kapillares Glasrohr (Länge 12,5 cm, innerer Durchmesser 0,56 mm) mündete beiderseits in weitere Gefäße, in welche Platinelektroden eingeschmolzen waren, und es konnte Wasser unter gut wieder herstellbaren Druckdifferenzen durch das Rohr strömen. Es wurden die Durchflußzeiten ohne und mit Anlegung elektrischer Spannung an die Platinelektroden

---

1) Es folgt dies aus dem Bestehen elektrischer Doppelschichten dicht innerhalb der Oberflächen von Flüssigkeiten. Vgl. hierüber „Probleme komplexer Moleküle“ (Heidelberg, bei Winter, 1914), Teil II, Kap. VI, und Teil III, Kap. VII.

2) A. Pochettino teilt positive Resultate mit (Atti d. R. Accad. d. Linc. 12. II. S. 363. 1903); W. König hat dagegen in bereits älteren, dabei aber ganz einwandfrei erscheinenden Versuchen nur negative Resultate erhalten (Ann. d. Phys. 25. S. 618. 1885).

gemessen, wobei also im letzteren Fall die Kraftlinien des elektrischen Feldes im Kapillarrohr den dort vorhandenen inneren Reibungsflächen parallel gerichtet waren, was die Reibung verringern, die Durchflußzeiten also verkürzen sollte, falls Kettenbildung stattfände. Das Resultat war rein negativ. Die rund 200 Sekunden betragenden Durchflußzeiten waren bis auf die wenige Zehntelsekunden betragende Versuchsunsicherheit die gleichen ohne und mit Feld, wenn im letzteren Falle das Mittel für beiderlei Richtung des Feldes genommen wurde. Der geringe Unterschied zwischen beiden Feldrichtungen entsprach der bekannten Wirkung der elektrischen Fortführung (Wasser positiv gegen Glas geladen). Die angelegte Spannung wurde (mittels Hochspannungsdynamomaschine) bis zu 3000 Volt gesteigert, wobei das elektrische Feld im Wasser bis zu 240 Volt/cm betrug; die Durchflußzeit, also auch die Reibungskonstante zeigte sich nicht um $^1/_4$ v. H. ihres Wertes geändert. Ersetzung des Wassers durch einen guten Elektrolyten (verdünnte Schwefelsäure, spez. Gew. 1,195), ergab ebenfalls nur negative Resultate. Es floß dabei ein Strom von 4 Weber/cm^2 durch das Kapillarrohr.

Es waren demnach keine Zeichen von Kettenbildung der Moleküle und also von unmittelbarer Mitwirkung der Molekularkräfte bei der inneren Reibung von Wasser oder wässerigen Elektrolyten bemerkbar; als *innere Klebrigkeit* kann hier die Reibung also nicht aufgefaßt werden.[1]) Ein Unbrauchbarwerden der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung

1) Nicht ausgeschlossen ist es, daß bei Flüssigkeiten von sehr großer innerer Reibung ein Aneinanderhaften benachbarter Moleküle doch mitwirkt. Jedenfalls muß das bei Flüssigkeiten so sein, die einen Übergang zu den zähen (duktilen) festen Körpern bilden; denn bei letzteren ist das Festgehaltensein jedes Moleküls durch eine resultierende Kraft von seiten der Nachbarmoleküle nicht zu bezweifeln. Die bei solchen festen Körpern (z. B. Metallen) beobachtete langsame Diffusion zeigt aber an, daß die resultierende Molekularkraft, die wegen der Wärmebewegung fortwährendem zeitlichen Wechsel unterworfen sein muß, bei diesen Körpern zeitweilig Null wird, wodurch das betreffende Molekül auf Augenblicke frei und also der Diffusion zugänglich wird. Der Übergang zur vollkommenen Flüssigkeit bestünde dann im Anwachsen der kräftefreien Zeiten bis zu schließlich dauerndem Nullwert der resultierenden Molekularkraft im ganzen Inneren der Flüssigkeit.

innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches ist daher bei diesen Flüssigkeiten nicht angezeigt.

Eine andere, als möglich übrigbleibende Auffassung der Flüssigkeitsreibung wäre die als *innere Rauhigkeit*, nämlich als gleitende Reibung benachbarter Molekülschichten aneinander, wobei diese Schichten wegen der Langsamkeit der Diffusion wie die molekular-rauhen Oberflächenschichten sich reibender fester Körper wirken, so daß gegen die die Schichten aufeinanderpressende Kraft, d. i. in der Flüssigkeit gegen deren hohen inneren Druck gearbeitet wird.[1]) Der Reibungskoeffizient — aufgefaßt wie bei der gleitenden Reibung fester Körper — müßte dabei proportional der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten angenommen werden, um den beobachteten Gesetzmäßigkeiten der inneren Reibung zu genügen. Solche innere gleitende Reibung wäre ein Vorgang, der nur bei Reibungsflächen von vielmolekularer Größe eine Rolle spielen kann, nicht bei der Wanderungsbewegung einzelner Partikel, deren Größe die der Flüssigkeitsmoleküle nicht beträchtlich überschreitet, so daß ihnen diese Moleküle einzeln ausweichen können. Es kommen danach im letzteren Falle der kleinen Partikel auch bei dieser Annahme der inneren Rauhigkeit doch nur die in unserer gaskinetischen Gleichung berücksichtigten Stoßwirkungen in Betracht, wie wir es angenommen haben, so daß auch in dieser Richtung kein Bedenken gegen die Brauchbarkeit dieser Gleichung innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches sich zeigt.

Elektrolytische Ionen.

178. *Gaskinetische Berechnung erforderlich.* — Die Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen in wässerigen Elektrolyten sind seit den Messungen von Kohlrausch auch in absolutem Maße wohlbekannt, und man hat aus denselben auch bereits wiederholt Durchmesser der Ionen berechnet. Es ist dies aber bisher ausschließlich mittels der hydrodynamischen Gleichung geschehen [Gl. (83)]. Die so berechneten Durchmesser sind

1) Diese Auffassung läßt die Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeitsreibung unmittelbar verständlich erscheinen; denn der innere Druck P nimmt mit steigender Temperatur ab. Auch stimmt das Ansteigen der inneren Reibung mit wachsender Molekulargröße in homologen Reihen mit der Auffassung überein.

auffallend klein, und dies hat Anlaß gegeben, die Hydratation der Ionen stark zu bezweifeln, da die Anlagerung selbst nur einer einzigen Schicht von H_2O-Molekülen um das eigentliche Ion viel größere Durchmesser erwarten ließe.[1]) Dennoch erschien und erscheint die Hydratation der Ionen gut gesichert, erstens durch die Arbeiten von Kohlrausch über die Temperaturkoeffizienten der Wanderungsgeschwindigkeiten[2]), zweitens durch die Tatsache, des Nichtabdampfens der Ionen, welche unverständlich bleibt, wenn man die Ionen nicht als komplexe Moleküle betrachtet[3]), und drittens außerdem durch besondere Untersuchungen über die Wassermitführung der Ionen[4]), eine Erscheinung, die als unmittelbares Zeichen der Hydratation aufgefaßt werden kann. Es müssen also die wie angegeben gefundenen, sehr kleinen Ionenradien entweder einer Berichtigung bedürfen, oder sie müssen mit dem Wassergehalt vereinbar gefunden werden.

Ich habe, um hierzu Aufklärung zu erhalten, die im folgenden zu erörternde neue Berechnung der Radien der Ionen und zugleich eine Berechnung der Wassermolekülzahlen derselben durchgeführt unter Anwendung der Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte.

Zunächst zeigte sich eben aus der erwähnten geringen Größe der hydrodynamisch berechneten Ionenradien, daß dieselben bereits außerhalb der durch unsere Überlegungen angezeigten Gültigkeitsgrenze der hydrodynamischen Gleichung fallen, so daß gar nicht diese, sondern vielmehr die gaskinetische Gleichung zu benutzen ist, deren Gültigkeitsbereich in der Tat, wie die Endresultate zeigen, gerade für die kleineren, gewöhnlichen elektrolytischen Ionen gut paßt. Ferner gibt die gaskinetische Gleichung auch zugleich ein Mittel, über die

1) Vgl. hierüber besonders die eingehenden Berechnungen und Überlegungen von R. Lorenz, Zeitschr. f. phys. Ch. 73. S. 252. 1910; R. Lorenz u. J. Posen, Zeitschr. f. anorg. Ch. 94. S. 265. 1916; R. Lorenz, ebenda 105. S. 175. 1919.

2) F. Kohlrausch, Berl. Akad. 1902, S. 572. Es ist dies auch diejenige Untersuchung, in welcher zum ersten Male ein eingehend begründeter Nachweis der Hydratation der Ionen erbracht wird.

3) Siehe „Probleme komplexer Moleküle", Teil I (Heidelberg, bei Winter, 1914).

4) Washburn, Starks Jahrbuch 6. S. 69. 1909.

Masse und damit über den Wassergehalt der Ionen Aufschluß zu erhalten, wenn man weitere geeignete Anhaltspunkte zu Hilfe nimmt. Als einen solchen Anhaltspunkt habe ich die von Herrn Waschburn in seiner erwähnten Arbeit für einige Ionen ermittelten Relativzahlen der mit ihnen verbundenen Wassermoleküle benutzt[1]), deren Kenntnis eine Einschränkung der Möglichkeiten für die noch unbekannten Absolutzahlen ergibt. Außerdem habe ich einen leicht zu begründenden *Hilfssatz* zugezogen, der besagt, daß bei nicht zu kleiner Zahl der in einem Ion enthaltenen Wassermoleküle das vom Ion eingenommene Volum kleiner sein muß als dasjenige Volum, welches die gleiche Zahl von Wassermolekülen bei gleicher Temperatur im reinen Wasser einnimmt, aber größer als das den Wassermolekülen selbst, ohne alle Zwischenräume eigene Volum. Die Begründung dieses Hilfssatzes ergibt sich aus der Überlegung, daß die in den Ionen enthaltenen Wassermoleküle durch Kräfte mit dem Ionenkern verbunden sein und daher geringere gegenseitige Abstände aufweisen müssen, als frei ohne solche bindende Kräfte bewegliche Wassermoleküle[2]), daß aber doch das Eigenvolum der Wassermoleküle im Ion erhalten bleiben muß, da zwar Kräfte zwischen dem Kern und den Wassermolekülen bestehen, welche etwa eine Ineinanderlagerung dieser beiden bewirken könnten, nicht aber Kräfte zwischen den vom Kern gebundenen Wassermolekülen untereinander. Die Beschränkung des Satzes auf Ionen mit nicht zu geringer Wassermolekülzahl ist erforderlich, weil er den Beitrag des Kerns zum Gesamtvolum des Ions, der je nach der Natur des Kerns individuell sein muß[3]), vernachlässigt, was jedenfalls um so genauer erlaubt ist, je mehr Wassermoleküle das Ion umfaßt.

1) Waschburn, a. a. O., Tab. XX, S. 103.

2) Das etwaige Bedenken, daß starr miteinander verbundene Wassermoleküle, wie im Eis, auch einen größeren Raum einnehmen können als flüssig verbundene, ist nicht von Belang; denn die Zulassung einer Abstandsvergrößerung der Wassermoleküle der Ionen von so geringem Betrage, wie sie im Eise vorkommt, statt der angenommenen Abstandsverringerung, dem flüssigen Wasser gegenüber, würde unsere Resultate über die Ionen gar nicht wesentlich ändern.

3) Dieser Volumbeitrag des Kernes kann, unseren Endresultaten nach, positiv oder aber auch negativ sein; letzteres entspricht einer Ineinanderlagerung.

179. Ich habe die Rechnung zunächst für die fünf von Herrn Waschburn untersuchten Ionen Cl, H, K, Na, Li durchgeführt. Der Verlauf der Rechnung ist der, daß man zunächst willkürliche, aber nach Herrn Waschburns Messungen zusammengehörige Wassermolekülzahlen n für die fünf Ionen annimmt (z. B.: 0; 0,28; 1,3; 2,0; 4,7 oder 9; 2; 10,5; 16,6; 25,3 oder 20; 5; 21,7; 34,2; 50,5[1]) und mit diesen die zugehörigen μ und damit nach Gl. (101) die fünf Ionenradien R berechnet. Die graphische Auftragung dieser Radien als Funktion der n ergibt für jede zusammengehörige Wertgruppe der n eine Kurve (vgl. Fig. 3), und es sind nach dem Hilfssatz (178) alle Wertgruppen von n als der Wirklichkeit nicht entsprechend ausgeschlossen, welche Kurven ergeben, die in ihrem über $n = 10$[2]) hinausgehenden Verlauf nicht zwischen die beiden Kurven A und B fallen, deren eine (A) dem Volum von n H_2O-Molekülen im flüssigen Wasser und deren andere (B) dem zwischenraumlosen Eigenvolum der n H_2O-Moleküle entspricht.[3])

In dieser Weise ergibt sich sofort das Resultat, daß Wassermolekülzahlen sowohl unterhalb, als auch oberhalb eng zusammenliegender Grenzen ausgeschlossen sind.[4]) Die Enge

---

1) Diese Beispiele umfassen sowohl die Mindest- als auch die Höchstwerte der Wassermolekülzahlen, welche nach Herrn Waschburns Messungen möglich wären.

2) Diese Wassermolekülzahl dürfte bei den aus nur wenigen Atomen — meist nur einem einzigen — bestehenden Ionenkernen, die wir jetzt und im folgenden betrachten, ausreichend sein, um das Eigenvolum des Atoms so weit zurücktreten zu lassen, daß der Hilfssatz anwendbar wird.

3) Die Gleichung von A ist demnach:

$$R = \sqrt[3]{3n \cdot 18 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24}/4\pi} = 1{,}94 \cdot 10^{-8} \sqrt[3]{n}$$

($18 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g das absol. Gew. von H_2O) und die Ordinaten von B sind das $\sqrt[3]{1-\Psi}$fache hiervon ($\Psi = 0{,}17$, siehe 172; die in Ψ vorhandene Unsicherheit hat hier keinen wesentlichen Einfluß).

4) Bereits Herr Waschburn konnte aus seinen Versuchen (a. a. O.) Grenzen für die möglichen Wassermolekülzahlen der von ihm untersuchten fünf Ionen herleiten; dieselben sind jedoch sehr weit; so bleiben z. B. für das Cl-Ion alle n von 0—20 möglich (vgl. die oben bereits angegebenen Zahlenbeispiele und die zugehörige Fußnote). Unsere Werte für die Wassermolekülzahlen liegen übrigens in der von Herrn Waschburn nach gewissen Überlegungen (a. a. O., S. 104) für wahrscheinlichst gehaltenen Gegend. Das spezielle Resultat, *daß das gänzliche Fehlen*

der Grenzen, welche aus dem dichten Zusammenliegen der Kurven A und B ersichtlich ist, erlaubt es, auf ein oder zwei Zahlenstellen abgerundete Wassermolekülzahlen n anzugeben; diese sind zusammen mit den Radienwerten R in Tab. VI eingetragen (Spalte 4 und 5).[1]) Es ist dabei $\Psi = 0{,}17$ zugrunde gelegt; die Ionenbeweglichkeiten l für 18° C. (Spalte 2) sind den Beobachtungen von Kohlrausch entnommen[2]), und es ist, ebenfalls nach Kohlrausch, $\omega/K = 0{,}0635 \cdot 10^8 \, l$ gesetzt (3. Spalte).[3])

180. *Bestätigung der Annahmen über den Molekularmechanismus der Flüssigkeiten.* — Sehr bemerkenswert ist es, daß — wie es Kurve C in Fig. 3 zeigt — jede in der soeben angegebenen Berechnungsweise sich ergebende Kurve, deren über

---

von Wassergehalt ($n = 0$) *ausgeschlossen ist*, ergibt sich nach Gl. (101) auch ohne Zuhilfenahme von Herrn Waschburns Messungen und ohne unseren Hilfssatz. Nimmt man nämlich probeweise für alle Ionen $n = 0$ an, so ergibt Gl. (101) Ionenradien, welche zum Teil in starkem Widerspruch mit den bekannten Radien der den Ionkern bildenden Atome stehen. Man erhält z. B. für den Radius des wasserfreien H-Ions $2{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm, für den des Na-Ions $4{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm, während der Radius des vollständigen (zweiatomigen und eines Valenzelektrons nicht beraubten) H_2-Moleküls nur $1{,}0 \cdot 10^{-8}$ cm, der des Na-Atoms in festem Metall (wo ihm meist, wie als Ion, ein Elektron fehlt) nur $2{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm und selbst der des großen Cs-Atoms nur $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm ist. Dabei ist mit dem kleinsten noch als möglich gefundenen Werte von $\Psi = 0{,}1$ und mit H_2O_2-Molekülen in flüssigem Wasser gerechnet. H_2O-Moleküle ergeben die beiden Radien zu 2,1 bzw. $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm, also mit demselben Widerspruche, und größere Werte von Ψ würden die Radien und damit die Widersprüche nur noch vergrößern. Man kommt also allein nur durch Anwendung der für den Fall passenden Wanderungsgeschwindigkeitsformel Gl. (101) zum Resultat, daß die gewöhnlichen elektrolytischen Ionen *wesentlich mehr Masse* haben *als der Wasserfreiheit entspräche*; sie würden ohne Wasserzulagerung wesentlich schneller wandern müssen, als sie es wirklich tun. Nur zur Ermittlung der Größe der Massenzulagerung, welche wir als Wassermolekülzahl deuten, bedurfte es der Hinzunahme jener oben benutzten weiteren Kenntnisse.

1) Diese, auf die hier zunächst betrachteten fünf Ionen bezüglichen Zahlen sind in der Tab. VI fett gedruckt. Die noch verbleibende Unsicherheit der Ermittelungsweise beträgt überall einige Einheiten der zweiten Zahlenstelle; vgl. die oben folgenden Zahlenbeispiele.

2) Nach der Zusammenstellung in Landolt u. Börnsteins Tabellen (1912), S. 1124.

3) Sonstige Zahlendaten siehe in der betreffenden Note zu 181.

$n = 10$ gelegene Punkte[1]) die nach unserem Hilfssatz verlangte Höhenlage haben, so daß sie zwischen die Kurven A und B fallen, gleichzeitig dort auch solche Neigung zur Abszissenachse aufweist, daß sie ohne sprungweise Neigungsänderung in

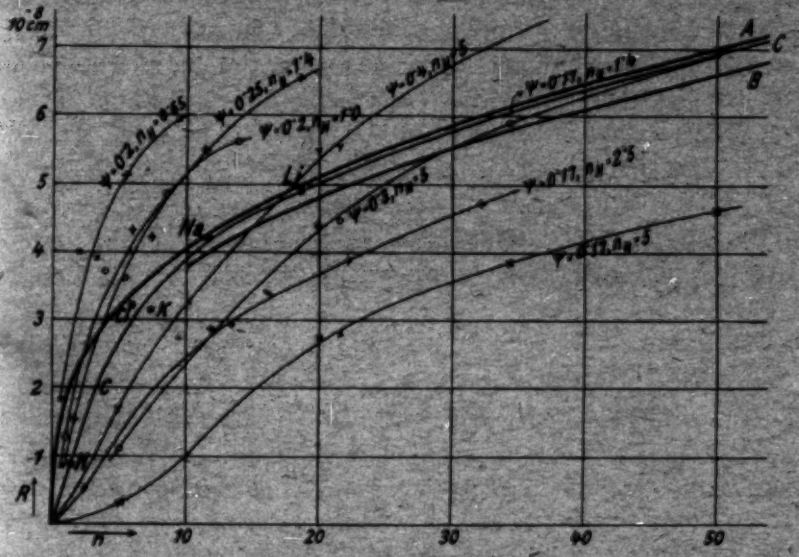


Fig. 3.

dem Zwischenraum von A und B nach größeren Werten von n hin extrapoliert werden kann, wie es sein muß, wenn diese Kurve einen mit unserem Hilfssatz verträglichen Zusammenhang zwischen R und n darstellen soll.[2]) Da dieses Resultat

1) Die in der Figur überall eingetragenen Punkte entsprechen bei jeder Kurve der Reihe nach vom Nullpunkt aus den Ionen H, Cl, K, Na, Li, wie für Kurve C auch besonders angegeben. Für eine der Kurven ($\Psi = 0{,}4$, $n_H = 5$) liegt Li außer Zeichenfeld. Die Punkte für Cl und K liegen stets nahe beisammen; die Kurven sind jedesmal mitten zwischen ihnen durchgezogen.

2) Kurve C zeigt die Extrapolation über $n = 18{,}5$ (Wert für Li) hinaus bis zu $n = 54$. Man vergleiche damit die anderen, dünner gezeichneten Kurven, welche zeigen, daß abweichende Werte von Ψ, sowie der n (von letzteren ist in der Figur bei jeder Kurve der Wert n_H für das Wasserstoffion angegeben, die anderen sind aus den Lagen der Punkte ersichtlich) mit unserem Hilfssatz ganz unverträglich wären. Es sind im ganzen 46 Kurven berechnet worden; die Figur stellt nur 8 davon dar, um nicht zu verwirren.

in unseren Annahmen nicht enthalten ist, kann es als gute Bestätigung eben dieser Annahmen angesehen werden, die zwar an sich keineswegs unbegründet, aber doch zum Teil neu und also der Bestätigung bedürftig sind. Es seien als hiermit bestätigt besonders hervorgehoben: Die Anwendbarkeit der gaskinetischen Gl. (101) auf flüssige Medien und der aus der Kompressibilität in der angegebenen Weise berechnete Wert:

$$\Psi = (v - b)/v = 0{,}17$$

für Wasser von Zimmertemperatur, aus welchem auch die unter 172 angegebene freie Weglänge der Wassermoleküle folgt, schließlich hierdurch auch der Wert des inneren Druckes für flüssiges Wasser, $P = 8000$ Atm. Wählte man zur Berechnung von R andere Werte von Ψ innerhalb oder auch außerhalb des unter 172 angegebenen, durch die unsichere Kenntnis von P bedingten Spielraumes, so gelangt man entweder zu Wertgruppen von n und R, welche dem in Tab. VI verzeichneten und also der Kurve C nahe liegen, oder aber man erhält Kurven, deren Lauf nicht den oben hervorgehobenen Bedingungen entspricht und also die benutzte Wahl von Ψ ausschließt. Zu ersterem Fall sei hervorgehoben, daß man mit $\Psi = 0{,}20$ die folgenden Werte für die fünf Ionen H, Cl, K, Na, Li erhält: $n = 1{,}8$; 8; 9,5; 15; 23; $R = 1{,}0$; 3,5; 3,5; 4,6; $5{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm, welche von den in Tab. VI angegebenen für $\Psi = 0{,}17$ geltenden nicht sehr verschieden sind und eine Kurve liefern, die im Maßstabe der Fig. 3 von C sich schlecht unterscheiden würde.[1]) Zum anderen Fall sei auf die in Fig. 3 eingetragenen Kurvenbeispiele verwiesen, welche eine charakteristische Auswahl unter den untersuchten Fällen bieten. Da diese Fälle von $\Psi = 0{,}05$ bis $\Psi = 0{,}4$ reichen, so sieht man, daß das vorher (172) auf ganz anderer Grundlage erhaltene Resultat $0{,}13 < \Psi < 0{,}21$ sich hier bestätigt, insofern Werte von Ψ, die wesentlich unter 0,1 oder wesentlich über 0,2 liegen, durch den Lauf der resultierenden Kurven ausgeschlossen erscheinen.[2])

1) Die Abweichungen der oben angegebenen n und R von den in der Tab. VI verzeichneten zeigen gleichzeitig auch die Genauigkeitsgrenze unseres Ermittlungsverfahrens; es erscheinen beide Wertegruppen fast gleich gut möglich.

2) $\Psi = 0{,}05$ und 0,1 geben außerordentlich kleine, bei nicht sehr kleinen n sogar negative Radienwerte für H.

Tabelle VI. Ionen in wässerigen Elektrolyten.

Ion	Bewegl. l_{18}	$\frac{\omega}{K}$ cm/sec. dyn.	H_2O-Mol.zahl n	Radius R 10^{-8} cm	Andere Radienwerte zum Vergleich. 10^{-8} cm
H	315	$20{,}0 \cdot 10^8$	1,4	0,9	H_2-Mol. 1,0[2])
OH	174	11,0	(2,5)	1,4	H_2O 1,7[2]), H_4O_2 2,4[3]), O_2 1,4[2])
Li	33,4	2,12	19	5,0	Li-Atom 1,4 Li_2O 2,3
Na	43,5	2,76	12	4,2	Na- „ 1,8 Na_2O 2,9 } [4])
K	64,6	4,10	7	3,1	K- „ 2,2 K_2O 2,6
Rb	67,5	4,28	(6)	2,9	Rb- „ 2,4 } im fest. Metall[4])
Cs	68	4,33	(6)	2,8	Cs- „ 2,5
Sr	51	3,2	10	3,7	Sr- „ 2,0
Cu	46	2,9	11	3,9	Cu- „ 1,2
Fl	46,6	2,96	11	3,9	
Cl	65,5	4,15	6	3,2	$CHCl_3$-Mol. 2,2[2])
Br	67,0	4,25	6	3,0	
J	66,5	4,23	6	2,9	
NO_3	61,7	3,91	7	3,2	N_2-Mol. 1,5[2])
CO_3	(70)	(4,4)	(6)	(2,9)	CO_2-Mol. 1,6[2])
Langsamste Ionen[1])	20	1,3	etwa 35	6,0	

Will man die Tragweite der erhaltenen Bestätigung möglichst gering bewerten, so könnte man sagen, daß nur Ψ/W als numerischer, auf die Eigenschaften des Wassers bezüglicher Gesamtfaktor in Gl. (101) bestätigt ist, während vielleicht Ψ und W selbst andere Werte als die angenommenen haben könnten; doch ist für diese Einschränkung bisher kein Anlaß ersichtlich geworden, sondern man darf annehmen, daß auch der gaskinetisch eingesetzte Wert der mittleren Molekulargeschwindigkeit W bestätigt ist (siehe darüber die weiter folgende Note). Letzteres bedeutet auch eine Bestätigung der bereits oben geäußerten *Auffassung vom inneren Druck P als zum Teil statisch* (vgl. die betreffende Note zu 176), da die dynamische Druckformel $P = \frac{1}{3} D W^2$ wesentlich übergaskinetische Werte für W ergäbe. Daß nicht gleichzeitig P rein dynamisch und W gastheoretisch sein kann, geht übrigens auch unmittelbar aus der Nichtgültigkeit des Avogadroschen Satzes für Flüssigkeiten hervor.

1) Unter den über 300 Ionen, welche von G. Bredig (Zeitschr. phys. Ch. 13. S. 191. 1894) und R. Lorenz (a. a. O.) behandelt werden, finden sich nur sehr wenige, deren Beweglichkeit unter 20 geht (stets bezogen auf eine Valenz). Zu den langsamsten Ionen gehören P_2O_7 ($l = 19{,}8$), eine Anzahl organischer, sehr vielatomiger Ionen (50—88 Atome, = 22 bis 18) und Al ($l = 15$). Letzteres etwas unsicher beobachtete Ion ergibt (nach Tab. V) $R = 7{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm, wozu (nach Kurve *C*, Fig. 3) $n = 60$ gehört. Bei vielatomigen Ionen würden die nach unserer Kurve *C*, Fig. 3 ermittelten Wassermolekülzahlen als obere Grenzen zu betrachten sein (entsprechend dem Sinne des Hilfssatzes, 178). — 2) Aus der inneren Reibung des Gases. — 3) Vgl. „Probl. kompl. Mol." II. S. 6. — 4) Vgl. Heidelb. Akad. 1914. A 17. S. 41.

181. Einer besonderrn Erörterung bedarf noch die für die bisher behandelte Berechnung getroffene Wahl der *Größe des Mediumsmoleküls*; es wurde H_4O_2 als mittleres Molekül des flüssigen Wassers von 20° C. angenommen. Diese Annahme starker Polymerisation der Moleküle des Wassers bei Zimmertemperatur ist durch seine thermischen Eigenschaften [hohe Verdampfungswärme, Dichtemaximum[1])], sowie auch durch besondere Nachweise [Oberflächenenergie[2])], zeitliche Änderung der Oberflächenspannung[3]) gut begründet. Jedoch ist der genaue Bruchteil der in geringer Menge jedenfalls vorhandenen, nicht polymerisierten Moleküle (H_2O) nicht bekannt, und wenn diese Moleküle unsere Rechnungsresultate, die in der Tat durch μ, W und r in Gl. (101) von der Molekulargröße des Mediums abhängen[4]), wesentlich beeinflussen würden, so wären für jetzt alle Schlüsse vereitelt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Man überzeugt sich durch Durchführung der Rechnung unter der Annahme von H_2O-Molekülen, daß man sehr nahe dieselben Kurven und Zahlenresultate erhält wie unter der Annahme von

---

1) Die Lage des Dichtemaximums beim Erstarrungspunkte und die bei der Erstarrung eintretende besondere Volumzunahme lassen annehmen, daß die dem Eise zuzuschreibenden Moleküle H_4O_2 im Wasser von Zimmertemperatur nur in geringer Zahl vorhanden sind.

2) Untersuchungen von Eötvös.

3) Messungen von Herrn Hiss, welche annehmen lassen, daß ein sehr überwiegender Teil der Wassermoleküle polymerisiert, ein geringerer Teil aber nicht polymerisiert ist. Vgl. „Probl. kompl. Mol." 1914, Teil II. S. 21. 22.

4) *Zahlenwerte für Wassermoleküle.* Es ist für H_4O_2:

$$\mu = [18(n+2) + A]/36$$

(A = Gewicht des Ionenkerns mit $H = 1$), $W = 41500$ cm/sec (18° C. gaskinetisch berechnet (vgl. die betreffende Note zu 180), $r = 2{,}40 \cdot 10^{-8}$ cm (vgl. „Probl. kompl. Mol." II, Note S. 6. Der hier angenommene Wert berücksichtigt bereits nach Maßgabe von Ψ die Zwischenräume der Moleküle und ist ohne diese gerechnet; der wie a. a. O. mit Zwischenraum gerechnete Wert wäre, genauer als dort, $2{,}44 \cdot 10^{-8}$ cm). Für H_2O ist $\mu = [18(n+1) + A]/18$, $W = 57500$ cm/sec (18° C., gaskinetisch), $r = 1{,}74 \cdot 10^{-8}$ cm (vgl. „Probl. kompl. Mol." III, Note S. 49. Der Wert gilt für Dampf von 100°; für Zimmertemp. würde er ein wenig größer zu setzen sein, dagegen unter dem hohen Druck des flüssigen Wassers wieder etwas kleiner. Beide Korrektionen sind nicht genau ausführbar, heben sich zum Teil aber gegenseitig auf; es ist daher der angegebene Wert unverändert benutzt worden).

H_4O_2-Molekülen.[1]) Es würden daher die in Tab. VI angegebenen, für H_4O_2 berechneten Zahlen auch dann nicht über ihre Genauigkeitsgrenze hinaus verändert werden, wenn man einen sehr starken Bruchteil nicht polymerisierter Moleküle im Wasser von 20° annehmen wollte.

182. An die in Tab. VI zusammengestellten Resultate, zunächst für die fünf in der erläuterten Weise berechneten Ionen H, Cl, K, Na, Li [in der Tabelle fett gedruckt[2])], knüpfen sich folgende Bemerkungen und Schlüsse (a—f):

a) Die Radienwerte liegen sämtlich noch innerhalb des Gültigkeitsbereiches der gaskinetischen, aber außerhalb des der hydrodynamischen Gleichung, da der Molekülabstand $\lambda (= 2r + L)$ für Wasser (H_4O_2) rund $5 \cdot 10^{-8}$ cm ist; es war also berechtigt, erstere Gleichung zugrunde zu legen, wie es geschehen ist.

183. b) *Ineinanderlagerung.* — Der Radius des H-Ions ist auffallend klein; er ist nur ungefähr so groß wie der des H_2-Moleküls, obgleich sogar mindestens ein *ganzes* H_2O-*Molekül* in diesem kleinsten Ion enthalten anzunehmen ist ($n = 1{,}4$, vgl. Spalte 4 der Tabelle), und obgleich dieses H_2O-Molekül schon für sich allein einen wesentlich größeren Radius hat als das Ion (vgl. letzte Spalte der Tabelle).

Unser Resultat zeigt damit hier eine *Ineinander*lagerung von Ionenkern und H_2O-Molekül unter beträchtlicher *Zusammenziehung des Ganzen* an. Auch für das K-Ion finden wir einen wesentlich kleineren Radius als unvermindertem Eigenvolum des Wassergehaltes entspräche, was unmittelbar aus der tiefen Lage des betreffenden Punktes in der Kurve *C*, Fig. 3, ersichtlich ist.[3]) Man muß daher auch hier annehmen, daß Ionenkern und Wassermoleküle nicht aneinander, sondern vielmehr — mindestens teilweise — *ineinander* gelagert sind. Nur bei den wasserreicheren Ionen fanden wir das Volum ungefähr propor-

---

1) Die Unterschiede der in voriger Note angegebenen Daten heben sich im Endresultat zum Teil gegenseitig auf. Es ergibt sich für die Ionen H, Cl, K, Na, Li mit $\Psi = 0{,}17$ $n = 1, 4, 5, 8, 14$; $R = 0{,}8, 2{,}8, 2{,}8, 3{,}6, 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm, und mit $\Psi = 0{,}20$ $n = 1{,}3, 6, 7, 11, 17$; $R = 0{,}9, 3{,}1, 3{,}1, 4{,}0, 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm.

2) Über die anderen Ionen siehe 189.

3) Cl liegt wesentlich höher, zeigt also keine so deutlichen Zeichen der Einlagerung als K.

tional dem Wassergehalt (vgl. die Diskussion über den Verlauf der Kurven in 180, welche den Hilfssatz zu 178 bestätigte), so daß die Raumbeanspruchung der im Ion enthaltenen Wassermoleküle ungefähr unvermindert zur Geltung kommt. Diese Raumerfüllung ist es, welche z. B. das Li-Ion trotz der Kleinheit des Li-Atoms zu einem der größten und langsamst wandernden Ionen macht. In diesem Falle ist die Raumbeanspruchung der Wassermoleküle im Ion so groß, daß von der vielleicht auch hier vorhandenen Einlagerung nichts merklich wird, sondern vielmehr hier die Anlagerung in den Vordergrund tritt. Ein regelmäßiges, durch die Kurve C in Fig. 3 dargestelltes Anwachsen der Ionenradien mit steigendem Wassergehalt besteht bei allen 5 Ionen, nur ist die Volumbeanspruchung der Wassermoleküle im Ion um so geringer — die Einlagerung also um so merklicher gegenüber der Anlagerung —, je kleiner ihre Anzahl ist.[1]) Es können also stets nur wenige H_2O-Moleküle mit dem Ion eingelagert sein; der Rest ist ohne wesentliche Volumverminderung angelagert anzunehmen.

Ineinanderlagerungen von Atomen oder Molekülen, wie wir sie in dieser Weise bei den Ionen fanden, so daß das Ganze kaum mehr, unter Umständen sogar weniger Raum einnimmt als jede einzelne der ineinander gelagerten Komponenten, findet man auch sonst; sie sind nur bisher wohl zu wenig beachtet worden. Man vgl. z. B. die in Tabelle VI (letzte Spalte) angegebenen Oxydmolekülradien (3 atomig) mit den Radien der betreffenden Metallatome, — erstere auffallend wenig größer als letztere. In allgemeingültiger Weise ersieht man übrigens aus Herrn Kossels Molekülmodellen die seit der Erkenntnis vom losen Bau der Atome[2]) offene Möglichkeit solcher Ineinanderlagerung in Beispielen verwirklicht, welche auch alle sonstige Kenntnis der Atom- und Moleküleigenschaften berücksichtigen.[3])

1) Auf diesen regelmäßigen Verlauf gründet sich unsere Berechnung von R und n bei den übrigen in Tab. IV aufgeführten Ionen (vgl. 188).

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 736 usf. 1903.

3) Vgl. W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229. 1916. Ineinanderlagerungen von weit höherem Betrage, wie sie die hydrodynamisch berechneten, sehr kleinen Ionenradien erforderten, um den aus guten Gründen

184. c) Die bei der Ineinanderlegung von Ionenkern und Wassermolekülen eintretende Volumverminderung kann geradezu als *Ursache der elektrolytischen Dissoziation* im Wasser angesehen werden. Denn es muß beim Auflösen des Elektrolyten im Wasser diejenige Umlagerung den Vorzug haben, welche die größte Volumverminderung ergibt, indem das Ganze unter dem hohen inneren (Normal-) Drucke des Wassers steht. Man darf annehmen, daß die Ineinanderlagerung der Wassermoleküle und Ionenkerne schon beginnt, ehe die Ionen getrennt sind, und die Ineinanderlagerung kann geradezu als Ursache der Trennung der Ionen aus dem Molekülverbande angesehen werden, wenn man die naheliegende Annahme zuläßt, daß die Einlagerung den Zusammenhalt des positiven Ions mit seinem Valenzelektron vernichtet oder vermindert.

Es würde bei dieser Auffassung die „*dissozierende Kraft*" des Wassers nicht in seiner hohen Dielektrizitätskonstante[1]), sondern in seinem hohen inneren Drucke, zusammen mit der Fähigkeit leichter Ineinanderlagerung der Wassermoleküle mit fremden Atomen oder Atomgruppen liegen.[2])

---

anzunehmenden Wassergehalt der Ionen unterzubringen, würden allerdings auch den heutigen Vorstellungen vom Molekülbau große Schwierigkeiten machen.

Hervorzuheben ist, daß durchaus nicht alle Atome Ineinanderlagerung beim Molekülbau zeigen; vgl. dazu die in Teil II (Ann. d. Phys. 41. S. 97. 1913) betrachteten Moleküle, welche ihren mittleren gaskinetischen Querschnitten nach wie lineare *Aneinander*reihungen der Atome sich verhielten.

1) Diese Annahme ist auch nicht ausnahmslos bestätigt, indem andere Flüssigkeiten mit ebenfalls hoher Dielektrizitätskonstante doch nicht die dissoziierende Kraft des Wassers besitzen. Über die Möglichkeit eines (wohl vorhandenen) Zusammenhangs in allgemeinen Zügen s. die folg. Note.

2) Der innere Druck des Wassers beträgt 8000 Atm., was wir im vorliegenden bestätigt fanden; bei Äther, Benzol, Schwefelkohlenstoff, Tetrachlorkohlenstoff beispielsweise beträgt er nur 1600 bis 3100 Atm. (Vgl. „Probleme komplexer Moleküle", 1914. Teil II. Tab. I. S. 6.) Es ist übrigens zu bemerken, daß der hohe innere Druck und das Einlagerungsvermögen, sowie aber auch hohe Dielektrizitätskonstante als Wirkungen einer und derselben gemeinsamen Ursache aufgefaßt werden können, nämlich hoher Molekularkräfte, was in allgemeinen Zügen aus deren elektrischer Natur unmittelbar hervorgeht, ohne daß freilich ein einfacher quantitativer Zusammenhang zwischen diesen drei Wirkungen bisher gefunden wäre. (Vgl. dazu „Probl. kompl. Mol.", Teil II. S. 43.)

Man versteht in dieser Auffassung auch, warum Salz*dämpfe* durch Gegenwart von Wasserdampf nicht leitend werden[1]), eine Tatsache, die übrigens jedenfalls zeigt, daß die „dissoziierende Kraft" nicht dem Wassermolekül an sich, sondern dem flüssigen Aggregatzustand des Wassers zugehört, welchem auch der hohe innere Druck eigen ist.

185. d) Was die *Temperaturabhängigkeit der Ionenbeweglichkeiten* anlangt, so ist dieselbe nach unserem Resultate, daß die gaskinetische Gleichung (nicht die hydrodynamische) maßgebend sei, nicht mit dem Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung des Wassers in Verbindung zu setzen, wie es bisher stets geschehen ist, sondern mit dem des Freiraumfaktors Ψ, außerdem mit der Änderung der Molekulargeschwindigkeit W. Es fällt dann das bis jetzt immer noch paradox dastehende Resultat weg, daß — da der Temperaturkoeffizient der Wanderungsgeschwindigkeiten der meisten Ionen deutlich *kleiner* ist, als der der inneren Reibung des Wassers — die Wasserzulagerung der Ionen mit steigender Temperatur ein wenig *steigen* müsse. Vielmehr ist jetzt das unmittelbar wahrscheinliche, weil aller Erfahrung bei thermischer Dissoziation entsprechende *Sinken der Zulagerung mit steigender Temperatur* zu erwarten, da Ψ/W keinesfalls so stark mit der Temperatur steigt, als die beobachteten Ionenbeweglichkeiten, so daß ein Teil des Steigens der letzteren durch Verminderung von R und μ, das ist durch Abnahme der Wasserzulagerung erklärt werden muß.[2])

1) Vgl. G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 35. S. 417. 1911. Die bei genügend hoher Temperatur eintretende Leitfähigkeit von Salzdämpfen (vgl. desselben Verfassers Untersuchung ebendort 41. S. 670. 1913 u. 56. S. 341. 1918) ist wohl überhaupt nicht Folge elektrolytischer Dissoziation, sondern thermischer Trägerbildung (durch Nähewirkung); die Träger wären danach Salzmoleküle (mit Anlagerungen), nicht elektrolytische Ionen.

2) Es ist [mit Gl. (97)]

$$\frac{\partial(\Psi/W)}{\partial T}\Big/\frac{\Psi}{W} = \frac{\partial\Psi}{\partial T}\Big/\Psi - \frac{\partial W}{\partial T}\Big/W = \alpha\frac{1-\Psi}{\Psi} - \frac{1}{2T},$$

worin allerdings α, der thermische Volumausdehnungskoeffizient des Mediums, bei Wasser wegen der mit der Temperatur veränderlichen Polymerisation nicht unmittelbar einsetzbar ist. Denkt man aber, um diese Nebenwirkung zu eliminieren, den Ausdehnungskoeffizienten mit einem aufs 5fache vergrößerten Werte eingesetzt, d. i. etwa gleich dem

Das ungefähre Zusammenfallen des Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung des Wassers mit dem der Ionenbeweglichkeiten, auf welches in bisherigen Untersuchungen oft die Aufmerksamkeit besonders gerichtet war, wäre demnach sozusagen für rein zufällig zu halten.[1]) Unsere Auffassung, daß die Zunahme der Ionenbeweglichkeit mit steigender Temperatur nicht der Abnahme der (bei der Kleinheit der Ionen gar nicht maßgeblichen) inneren Reibungskonstante des Mediums, sondern größtenteils der Verkleinerung der Ionen durch thermisches Abdissoziieren der zugelagerten Wassermoleküle zuzuschreiben ist[2]), wird bestätigt, wenn man die Temperaturkoeffizienten der Beweglichkeit mit den von uns gefundenen Wassermolekülzahlen vergleicht. Man findet, daß der Temperaturkoeffizient mit der Wassermolekülzahl n regelmäßig steigt[3]), was aufs deutlichste unserer Auffassung entspricht und aus derselben unmittelbar voraussehbar gewesen wäre, indem um so stärkere Verkleinerung der Ionen bei steigender Temperatur möglich sein und also bei gleich fester Bindung der Wassermoleküle auch eintreten muß, je größer

---

der meisten nicht polymerisierenden Flüssigkeiten, oder selbst mit 20fach vergrößertem Werte, was sicherlich zu hoch gegriffen ist, so bleibt doch $\frac{\partial(\Psi/W)}{\partial T} \Big/ \frac{\Psi}{W}$ noch unterhalb $\frac{\partial \omega}{\partial T} \Big/ \omega$, und die Differenz beider kommt auf Rechnung einer Temperaturabnahme von r und μ.

1) Ein indirekter Zusammenhang beider wird natürlich bestehen.

2) Wenn die Auffassung, daß die Temperaturzunahme der Ionenbeweglichkeiten einer Verkleinerung der Ionen zuzuschreiben sei, schon bisher gelegentlich zum Ausdruck kam, so mußte sie doch unberechtigt erscheinen, insofern gleichzeitig ganz allgemein die damit in Widerspruch stehende Behauptung von der Maßgeblichkeit der inneren Reibungskonstante für die Beweglichkeit vertreten war. Es mußte befremdlich erscheinen, daß man den Widerspruch zwischen beiden Annahmen unberücksichtigt gelassen und beide gleichzeitig festgehalten fand, obgleich doch offenbar mindestens eine davon falsch sein mußte. Nach unseren hier mitgeteilten Resultaten ist es die zweite.

3) Der Zusammenhang zwischen dem Temperaturkoeffizienten der Beweglichkeit und *dieser selbst* ist bekanntlich bereits von F. Kohlrausch festgestellt und damals zu einem erstmaligen, gutbegründeten Schluß auf Wassergehalt der Ionen verwertet worden (Berliner Akademie 1902. S. 572). Wir fassen hier, weitergehend, nicht die Beweglichkeit als solche, sondern die aus ihr ermittelte Wassermolekülzahl als bestimmend für den Temperaturkoeffizienten auf, wodurch der Zusammenhang unmittelbar anschaulich wird.

die Anzahl dieser Moleküle in ihnen ist. Die Tabelle VII, in welcher alle diejenigen in Tab. VI enthaltenen Ionen verwertet sind, deren Wassermolekülzahl mit größerer Sicherheit feststellbar war, und für welche Werte der Temperaturkoeffizienten der Beweglichkeit vorliegen, zeigt klar diesen Parallelismus zwischen Temperaturkoeffizient und Wassermolekülzahl. Abweichungen davon, welche übrigens nur bei den unsicher berechenbaren Ionen[1]) merklich werden, wären als Folge von Sondereinflüssen des Ionenkerns auf die Bindungsfestigkeit der Wassermoleküle erklärlich.[2])

Tabelle VII.

Ion	Wassermolekülzahl n (aus Tab. VI)	Temperaturkoeffizient der Beweglichkeit (nach Kohlrausch)
H	1,4	0,0154
OH	2,5	0,0180
NO_3	7	0,0205
J	6	0,0213
Br	6	0,0215
Cl	6	0,0216
K	7	0,0217
Fl	11	0,0238
Na	12	0,0244
Li	19	0,0265

186. e) *Die Wassermolekülzahlen n sind* wohl bei allen Ionen *als Mittelwerte zu betrachten*, genommen über viele Ionen in gleichzeitigem Zustande oder auch bei einem und demselben Ion über lange Zeit. Jedenfalls sind natürlich Bruchteile von Wassermolekülzahlen, wie z. B. 1,4 bei H, in solcher Weise aufzufassen, dahin also, daß die Wassermolekülzahl z. B. beim H-Ion zwischen 1 und 2 schwankt. Bei Ionen mit großen und mittleren Wassermolekülzahlen dürften die Schwankungen sogar in sehr weiten Grenzen stattfinden. Man kommt zu letzterer Auffassung, wenn man die unmittelbar sichtbare

1) Eingeklammerte Wassermolekülzahlen in Tab. VI.

2) Die größte Abweichung kommt beim CO_3-Ion vor. Man könnte annehmen, daß der hohe Temperaturkoeffizient, das ist der leichte Verlust der Wassermoleküle bei relativ kleiner Anzahl derselben mit der geringen Dissoziationsfähigkeit dieses Ions zusammenhängt, was im Sinne unserer Auffassung von der Ursache der Dissoziation wäre (184).

Wanderung gefärbter Ionen betrachtet. Ich habe z. B. beim Einwandern der violetten MnO_4-Ionen in einen benachbarten Elektrolyten (KNO_3) stets ein Vorauseilen eines geringen Teils der Ionen gegenüber dem langsameren Hauptteil beobachtet. Daß bei Stromumkehr der vorausgeeilte Teil nicht ebensoschnell wieder zurückwandert, kommt offenbar von der Veränderlichkeit der Anlagerung bei jedem einzelnen Ion. Man vergleiche übrigens auch die *unbeschwerten Ionen* (K, Na z. B.), deren Vorhandensein in geschmolzenen Elektrolyten ich früher aus dem farbigen Glühen der Salzschmelzen geschlossen hatte.[1]) Es ist anzunehmen, daß — wie diese Emissionsfarben — auch die Absorptionsfarben, wie bei MnO_4, dem Ion im unbeschwerten Zustand zugehören, der nur sehr selten vorhanden zu sein braucht, um doch gut bemerkbare Färbung hervorzubringen. Die soeben beschriebene Beobachtung von Wanderungsgeschwindigkeiten sehr verschiedener Größe an den gefärbten Ionen zeigt dann an, daß auch der unbeschwerte (gefärbte) Zustand, in Abwechslung mit dem mehr oder weniger beschwerten Zustand zeitweilig bei jedem Ion vorkommt.[2]) Es würde daraus die *Abdampfung eines sehr geringen Bruchteils der Ionen* aus Lösungen, Schmelzen und glühenden festen Körpern auch in Fällen verständlich sein, wo diese Ionen durchschnittlich nicht unbeschwert sind.[3])

187. f) *Die Betrachtung der Ionen als komplexer Moleküle* habe ich früher durchgeführt.[4]) Es wurden damals die Verhältnisse der Oberflächenkonzentration der Ionen in Elektrolyten und der Abdampfung bzw. Nichtabdampfung der Ionen untersucht, wobei für die quantitative Durchführung die Annahme diente, daß die Ionen (dort allgemeiner „Lösungsmoleküle") neben dem Kern eine überwiegende Anzahl gebundener Moleküle des Lösungsmittels (z. B. H_2O) enthalten und daß sie —

1) Ann. d. Phys. 17. S. 199—206. 1905.

2) Die wie beschrieben vorauswandernden Ionen wären solche, deren durchschnittliche Wassermolekülzahl während der Beobachtungszeit stark unter dem Mittel geblieben ist.

3) Vgl. das Folgende und auch schon „Probleme komplexer Moleküle" Teil I. S. 13, 14. 1914.

4) „Probleme komplexer Moleküle" Teil I, II, III (Heidelberg, bei Winter, 1914).

damit zusammenhängend — im Volum wesentlich größer seien als die Lösungsmittelmoleküle. Der erste Teil dieser Annahme trifft wohl genügend zu, wenn die Wassermolekülzahl n des Ions etwa 10 übersteigt, und die Radienwerte in Tab. VI zeigen, daß dann auch der zweite Teil erfüllt ist, sowie daß viele Ionen hierher gehören, wie Na, Li, Sr, Cu, Fl und wohl die größte Zahl der langsameren kompliziert gebauten Ionen. Die kleineren Ionen fügen sich jedoch der genannten Annahme nicht.[1]) Für sie ist das Verhältnis v/V vom Volum des Lösungsmittelmoleküls zu dem des Ions nicht nur nicht wesentlich kleiner als 1, sondern sogar zum Teil, bei den kleinsten Ionen, wie H und OH, sogar größer als 1. Es werden dann die a. a. O. unter der genannten Annahme entwickelten Gleichungen ungültig.[2]) Qualitativ bleiben jedoch alle dort erhaltenen Resultate gültig; denn es kommt, wie die dortigen Überlegungen

1) Dies war 1914 noch nicht bekannt; es standen damals nur die unsicheren und in der Tat nicht zutreffenden hydrodynamisch berechneten und außerdem nach verschiedenen Anzeichen geschätzte Radienwerte zur Verfügung (vgl. „Probleme komplexer Moleküle" Teil II, Noten 20, 21).

2) Dies ist bereits a. a. O. (Teil II, S. 13) bei Diskussion des Gültigkeitsbereiches der Gleichungen hervorgehoben worden. Der Punkt, an welchem die Annahme $v/V \ll 1$ die wesentliche Rolle spielt, liegt in der Ableitung von Gl. (5) dort. Ist die Ungleichheit nicht erfüllt, so kann die Dicke S der dort (Teil I, S. 15) betrachteten, die Verdampfung abschirmenden Schicht nicht mehr „nahe gleich dem Radius des Lösungsmoleküls" gesetzt werden, wie es dort geschehen ist. Denn Lösungsmoleküle, die nur ebenso groß oder gar kleiner sind als die Lösungsmittelmoleküle, werden nicht von letzteren überdeckt, wenn der Abstand ihres Mittelpunktes von der Flüssigkeitsoberfläche nur ihrem eigenen Radius gleich ist, sondern es muß dieser Abstand größer sein als der Radius der Lösungsmittelmoleküle. Die letztere, für kleine Lösungsmoleküle (Ionen) geltende Annahme könnte unter Beibehaltung der a. a. O. befolgten Gedankengänge zur Entwickelung veränderter, für diesen Fall passender Gleichungen benutzt werden. Der allgemeine, für Lösungsmoleküle (Ionen) beliebiger Größe passende Fall würde wohl zu unübersichtlichen, komplizierten Gleichungen führen. Die einschränkende Bedingung $v/V \ll 1$ bezieht sich aber, entsprechend dem soeben Angegebenen, nur auf die Gültigkeit derjenigen Gleichungen a. a. O., in welche die Gl. (5) dort eingeführt ist [Gleichungen (11) bis (14), (17) bis (21) dort], was übrigens aus den Ableitungen der Gleichungen dort unmittelbar hervorgeht. Es ist dies übrigens in der umfangreichsten bisher gemachten Anwendung der Gleichungen (L. Andrén, Ann. d. Phys. 52. S. 55. 1917) bereits vollkommen berücksichtigt zu finden.

zeigen, in der Hauptsache nur darauf an, daß das Volum des Ions (Lösungsmoleküls) kompakter mit Materie ausgefüllt ist als das gleiche Volum im Lösungsmittel[1]), daß nämlich das Lösungsmolekül (Ion) neben seinem Kern dieselben Atome enthalte, welche auch die Lösungsmittelmoleküle aufbauen, jedoch (mit Hilfe der Kräfte des Kerns) in kleineren Räumen konzentriert, als es im Lösungsmittel der Fall ist, so daß zwischen Lösungsmolekül (Ion) und den umgebenden Lösungsmittelmolekülen größere Kräfte vorhanden sind als zwischen gleichen Raumteilen von Lösungsmittelmolekülen untereinander.[2]) Das trifft aber auch bei den kleinsten Ionen zu, wie die Kurve C (Fig. 3) unmittelbar dadurch zeigt, daß sie gerade bei den kleinsten Ionen am meisten unterhalb der Kurve A bleibt.

Es bleibt daher auch für die kleinen Ionen alles bestehen, was in den „Problemen komplexer Moleküle" zur Erklärung der Nichtabdampfung elektrischer Ladung, der Dampfdruckerniedrigung, des osmotischen Druckes[3]), der Eigentümlichkeiten der Wasserfallelektrizität an Elektrolyten und der übrigen Oberflächenerscheinungen von Lösungen gesagt ist. Die quantitativen Verhältnisse, betreffend den Sitz elektrischer Ladung an Flüssigkeitsoberflächen werden nur für die kleinsten Ionen gegenüber den dortigen Gleichungen etwas verändert[4]); die Gesetze der Dampfkondensation bleiben überhaupt unberührt, insofern die Kondensationskerne in Gasen stets komplexe Moleküle von größerer Abmessung sind als die einfachen Dampfmoleküle.

---

1) Vgl. „Probleme komplexer Moleküle", Teil II, S. 14.

2) Vgl. die Erläuterung über die für die Oberflächenkonzentration maßgebende Kraftdifferenz „Probleme komplexer Moleküle", Teil II, S. 10.

3) Die den osmotischen Druck betreffenden Überlegungen sind überhaupt unabhängig von der Größe der Lösungsmoleküle; letztere spielt nur bei der Auswahl der vorausgesetzten semipermeablen Wand eine Rolle.

4) Bis herab zur Größe des K- oder Cl-, Br-, J-Ions in Wasser ($R = 3 \cdot 10^{-8}$ cm, $v/V = 0{,}5$) dürften die dortigen Gleichungen immer noch ungefähr gelten. Man berechnet danach für diese Ionen und das elektrische Feld 40000 Volt/cm den in der äußersten Molekülschicht sitzenden Bruchteil der Oberflächenladung zu $\beta = 0{,}00015$ und die Tiefe der maximalen Ladung $X = 90 \cdot 10^{-8}$ cm. Für die größten Ionen ($R = 5 \cdot 10^{-8}$ und $v/V = 0{,}064$), wo genauere Gültigkeit zu erwarten ist, ergibt sich $\beta = 0{,}000038$, $X = 120 \cdot 10^{-8}$ cm, was mit den a. a. O. Teil III, S. 32 angegebenen, damals nur mit geschätzten Ionenradien berechneten Zahlen in der Größenordnung übereinstimmt.

188. Außer den im vorhergehenden hauptsächlich betrachteten unter 179 berechneten 5 Ionen sind in Tab. VI auch noch eine Reihe *anderer Ionen* enthalten, für welche Relativzahlen der Wassermoleküle nicht zur Verfügung stehen. Es wurde hier zur Berechnung der R und n außer Gl. (101) der durch die Kurve C, Fig. 3, gegebene Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen benutzt. Man berechnet zuerst mit $\mu = 1$ (was $n = \infty$ entspricht) R nach Gl. (101)[1]), entnimmt dann mit diesem R aus der genannten Kurve den zugehörigen Wert von n und berechnet mit letzterem einen verbesserten Wert von μ und damit aus Gl. (101) einen solchen von R, welches Verfahren so lange fortgesetzt wird, bis R und n sowohl dieser Gleichung als der Kurve genügen. Hierbei stützt sich R hauptsächlich auf die Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung (101), in welcher n keinen wesentlichen Einfluß hat, n aber hauptsächlich auf die Kurve, und insofern letztere nur den Beobachtungen an den vorgenannten 5 Ionen entnommen ist, also die individuellen Eigenschaften der übrigen Ionen nicht enthält, können auch in den n für die letzteren Ionen diese Eigenschaften nicht in vollem Maße berücksichtigt sein. Dies kommt jedoch ernstlich wohl nur für die kleinen n in Betracht[2]), wo das Eigenvolum des Ionenkerns eine wesentliche Rolle spielen kann, und zwar um so mehr, je größer dieses Eigenvolum im Verhältnis zum Volum der n Wassermoleküle ist. Es sind daher die Werte n für Fälle der letzteren Art als weniger sicher in Tab. VI durch Einklammerung gekennzeichnet.[3])

---

1) Man kann auch Tab. V benutzen. Ergibt sich $R > 5 \cdot 10^{-8}$ cm, so ist überhaupt nur die Tab. V [mit Gl. (101)] maßgebend (vgl. 176) und der aus der Tabelle entnommene Wert von R ist definitiv. Letzterer Fall tritt nur bei den allergrößten Ionen ein (letzte Zeile der Tab. VI); alle anderen Ionen liegen innerhalb des Gültigkeitsbereiches von Gl. (101).

2) Großen Einfluß haben die individuellen Eigenschaften überhaupt nur auf n; R scheint bei gegebenem n ziemlich einheitlich zu sein, geurteilt nach der wenig verschiedenen Lage der Punkte für 2 Ionen so verschiedenen Charakters wie Cl und K bei der Kurve C, Fig. 3.

3) OH wegen sehr kleinen n, Rb und Cs wegen besonders großem Eigenvolum des Kerns (vgl. letzte und vorletzte Spalte der Tab. VI). Die Werte für CO_3 sind sämtlich eingeklammert, weil hier auch der Ausgangswert für l_{18} (Spalte 2) nicht sehr sicher steht.

189. Vergleicht man sämtliche in Tab. VI angegebene Ionenradienwerte R mit den bisher für richtig gehaltenen, aus der hydrodynamischen Gleichung [Gl. (83)] berechneten Werten[1]), so sieht man, daß erstere durchweg größer sind als letztere, was übrigens ganz den allgemeinen Überlegungen, betreffend die Anwendung letzterer Gleichung auf sehr kleine Partikel entspricht (169). Der Unterschied beider Radienwerte ist um so größer, je kleiner R selbst ist; beim H-Ion verhalten sich die beiden Radien wie 1 : 3, bei Li wie 1 : 2; bei den größten Ionen nähert sich das Verhältnis noch etwas mehr der Gleichheit.[2])

190. Will man nach aller heutiger im vorliegenden vervollständigter Kenntnis die Berechtigung beurteilen, die Ionenradien nach der hydrodynamischen bzw. nach unserer gaskinetischen Gleichung zu berechnen, so ist zusammenfassend folgendes zu sagen:

Nach den bei der Herleitung der beiden Gleichungen gemachten Annahmen, welche wir unter 154—160 untersucht

---

1) Sehr inhaltreiche Zusammenstellungen solcher Werte, beziehlich zugehöriger Raumerfüllungszahlen nach hydrodynamischer Berechnung findet man in den unter 178 zitierten Arbeiten von R. Lorenz.

2) Da hiernach das Verhältnis zwischen den bisher angenommenen und den hier berichtigten Ionenradien für alle Ionengrößen bekannt ist und da es um so weniger von der Natur des Ions abhängt, je größer dessen Masse ist (vgl. 175), so würden die bisher schon aufgestellten empirischen Zusammenhänge zwischen Raumerfüllung und Atomzahl sowie sonstigen Eigenschaften der Ionen ohne Schwierigkeit auf die berichtigten Radien umrechenbar sein. Man sehe in bezug auf diese Zusammenhänge besonders die eingehenden Untersuchungen von R. Lorenz (Zitate in der Note zu 178; außerdem: Ztschr. f. anorg. Ch. **96**. S. 217 u. 231. 1916 u. **106**. S. 46. 1919). An einigen Stellen derselben wird übrigens die Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichung — mindestens für die kleinsten Ionen und nach unseren Resultaten mit Recht — bereits bezweifelt. Bei den langsameren Ionen ($\omega/K < 1{,}7 \cdot 10^{12}$, $\sqrt{}_{18} < 26$), deren Raumerfüllung eindeutige (von der Masse unabhängige, durch Tab. V gegebene) Funktion der Beweglichkeit ist, können die zahlreichen halbquantitativen, von G. Bredig zusammengestellten Beziehungen zwischen den Eigenschaften des Ionenkerns und der Beweglichkeit des Ions (Z. phys. Ch. **13**. S. 191. 1894) unmittelbar als Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften und der *Raumerfüllung* (mittelbar dann auch der Wassermolekülzahl) der Ionen betrachtet werden.

haben, kann die hydrodynamische Gleichung für Ionen — wenn sie nicht zu den größten gehören — als falsch, die gaskinetische allerdings vielleicht als ziemlich ungenau bezeichnet werden. Das erste kann auch so aufgefaßt werden (177), daß der in der hydrodynamischen Gleichung durch die Konstante η bemessene Reibungsvorgang nur die Aneinandervorbeischiebung mehrmolekularer Flüssigkeitsschichten bestimmt, nicht aber die Bewegung von einzelnen Partikeln, welche (wie die Ionen) kleiner oder nicht viel größer sind als die Mediumsmoleküle selber. Das zweite gilt insofern, als es nicht sicher steht, inwieweit die in der gaskinetischen Gleichung angenommene Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle, gleich Gasmolekülen, doch vielleicht einer merklichen Beeinflussung durch die Molekularkräfte unterliegt, obgleich wir kein Zeichen einer solchen Beeinflussung gefunden haben (177) und obgleich die gasmolekulare Behandlung auch in anderen Fällen bei Flüssigkeiten bewährt ist (Note zur Einleitung von Abschn. 9). Auch den Endresultaten nach rechtfertigt sich die Anwendung unserer gaskinetischen Gleichung gegenüber der der hydrodynamischen, indem sie Ionenradien ergibt, welche der nach mehrfacher Erfahrung (178) unzweifelhaft vorhandenen Wasseranlagerung der Ionen genügenden Raum lassen (183), während letztere Gleichung sie auch nach heutiger Kenntnis vom losen Bau der Atome nahezu ausschließt, und indem sie die Temperaturkoeffizienten der Ionenbeweglichkeit aufs beste verständlich zeigt, während die Anwendung der letzteren Gleichung Widersprüche ergibt (185).

Nach allem muß es somit als das Richtigste erscheinen, die bisher allein bevorzugte hydrodynamische Gleichung für die Ionen und für ähnliche Fälle kleiner Partikel in Flüssigkeiten zu verlassen und dafür die gaskinetische anzuwenden. Die dabei zu sammelnde Erfahrung kann dann zeigen, inwieweit diese für Gase wohl unzweifelhaft zutreffende Gleichung etwa für flüssige Medien noch einer Verbesserung bedarf.

Abschnitt 10. Zusammenstellung einiger Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen aus den Teilen I—III.

a) *Gaskinetische Gleichungen.*

Gültigkeitsbereich für Gase $R \leqq L$ (vgl. 159). Für Flüssigkeiten siehe besonders Teil III, Abschn. 9.

1. Einfache Annäherungsformel von 1900 [Teil III, Gl. (1)]; μ beliebig:

$$[\omega] = K\frac{L_i}{W_i}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{2M_i}\right) = \frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}.$$

Größe der Abweichungen von der verfeinerten Formel ω_A vgl. 151, Tab. III.

2. Mit verfeinerter Rücksicht auf die Molekularbewegung und deren Ungleichheiten (vgl. 85—95) gelten folgende Formeln; μ beliebig:

Für Stoßfall A (elastische Reflexion bei glatten Kugelflächen, vgl. 121) oder auch Stoßfall *C* (Festhaltung der Moleküle und Wiederabgeben mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Richtung, vgl. 125) gilt

$$\omega_A = \omega_C = \frac{3}{3+\mu}[\omega]\,\Omega_\mu = \frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{3(1+\mu)}{2\sqrt{\mu}\,(3+\mu)}\,\Omega_\mu$$

$$= \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}}+\sqrt{\mu}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W}\quad\text{[Teil III, Gl. (21)]}.$$

Über die Koeffizienten vgl. 96, Tab. I.

Für Stoßfall B (diffuse Reflexion, vgl. 122) gilt

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}}+\frac{4\mu-1}{4\sqrt{\mu}}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W}\quad\text{[Teil III, Gl. (64)]}.$$

Für Stoßfall D (Festhaltung der Moleküle und Wiederabgabe vom Auftreffpunkt in nahe senkrechter Richtung, ohne Rotation des Partikels, vgl. 127) gilt:

$$\omega_D = \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}}+\frac{10\mu-4}{10\sqrt{\mu}}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W}\quad\text{[Teil III, Gl. (74)]}.$$

Zur Anwendung der Gleichungen vgl. 148, 149. Kritik der erreichten Annäherung vgl. 97—106. Verhältnis zu den Gleichungen anderer Autoren siehe 150—152.

3. Fälle wechselnder Zustände des wandernden Partikels sind in Teil I eingehend untersucht. Es gelten z. B. für abwechselnd freie und absorbierte Elektronen in Gasen die Gl. (23) bis (27) und (38) bis (40a), Teil I.[1]) Diese letzteren Gleichungen

1) Die bereits in der 1. Fußnote zu Teil III erwähnten, in Teil I und II stehen gebliebenen Versehen sind die folgenden:

Teil I: in Gl. (17a) (S. 415) letztes Glied statt $2\mu^3\,\frac{1-\mu^{\xi-1}}{1-\mu^2}$ zu setzen $\mu\,\frac{1-\mu^{\xi-1}}{1-\mu}$.

sind noch ohne die soeben unter 2 genannten Verfeinerungen entwickelt; sie entsprechen im Grad der Annäherung der unter 1 genannten Formel von 1900.[1]) Will man die Verfeinerungen in die Gleichungen einführen, so ist von der allgemeingültigen Gl. (38a) oder (39) auszugehen[2]) und zu den im Zähler vorkommenden Wanderungsgeschwindigkeiten der Faktor $3\Omega_\mu/(3+\mu)$ (je mit dem betreffenden Wert von μ) hinzuzufügen.

b) *Die hydrodynamische Gleichung* von Stokes-Kirchhoff mit dem Zusatz von Cunningham ist

---

S. 420, Z. 5 u. 6 v. o.: der Faktor $\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1}\right]$ gehört zu *beiden* ersten Gliedern der rechten Seite.

Ebendort, Z. 7 v. o.: statt $\frac{19}{8}$ zu setzen $\frac{23}{8}$.

„ Gl. (23) „ $\frac{19}{4}$ „ „ $\frac{23}{4}$.

In Gl. (24), S. 421 statt Faktor 4 zu setzen 6 und statt $\frac{13}{2}$ zu setzen $\frac{17}{2}$.

S. 422, Z. 6 v. o.: statt $\frac{1}{2}$ zu setzen $\frac{7}{18}$ und statt $\frac{19}{30}$ zu setzen $\frac{8}{15}$.

In Gl. (39), S. 431, letztes Glied im Zähler wie in Gl. (17a) zu ändern.

In Gl. (40) u. (40a), S. 432 statt $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{19}{12}$ zu setzen $\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{23}{12}$.

Teil II: S. 57, Gl. (51), im Ausdruck für A statt $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{19}{2}$ zu setzen $\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{23}{12}$.

1) Für bisherige Anwendungen war dies kein Mangel. Vielmehr fehlte es an den experimentellen Daten. Dies gilt besonders für die auf die Bunsenflamme bezüglichen Anwendungsbeispiele in Teil I und II, welchen noch die Moerausche Messung der Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen zugrunde gelegt war, die sich nachher als ganz unbrauchbar erwiesen hat (vgl. die betr. Fußnote zu 96).

2) Auch wenn man die in den Gl. (23) bis (27) und (40), (40a) gemachte Voraussetzung $M_1 = M$ (d. h. Fehlen von Anlagerung der Träger) fallen lassen will, muß auf Gl. (38) oder (39) zurückgegriffen werden.

$$\omega_k = \frac{K}{6\pi\eta R}\left(1 + A\frac{L}{R}\right) \text{ [Teil III, Gl. (84)]}.$$

Gültigkeitsbereich $\lambda < R \ll \eta/\omega D$ (vgl. 154, 156, 174).

Werte von A für die verschiedenen (unter a2 schon aufgezählten) Stoßfälle nach unseren Ermittelungen:

Für Fall A (elast. Refl., vgl. 121) $A = 1{,}4$ (nach Cunningham 1,63, nach MacKeehan 1,5, vgl. 162).

Für Fall B (diffuse Refl., vgl. 122) $A = 1{,}1$ (nach MacKeehan 1,2, vgl. 163 u. 165).

Für Fall D (Festhaltung und senkrechtes Abgehen, vgl. 127) $A = 0{,}84$ (nach MacKeehan 1,05, vgl. 164 u. 165).

Über Fall C vgl. 164.

Vergleichung hydrodynamisch und gaskinetisch berechneter Wanderungsgeschwindigkeiten s. unter 166—169, 175, 176 und in Tab. IV, V, Teil III.

c) *Bezeichnungen.* — Es bedeuten in den vorstehenden Gleichungen und überhaupt in den Teilen I—III:

ω Wanderungsgeschwindigkeit (Einklammerung, Indexe bedeuten Spezialisierungen),
M Mediumsmolekülmasse,
M_t Partikelmasse, $\mu = \dfrac{M_t}{M_t + M}$,
r Mediumsmolekülradius,
R Partikelradius, $s = r + R$,
W mittlere ungeordnete Geschwindigkeit der Mediumsmoleküle,
W_t „ „ „ des Partikels,
L „ freie Weglänge der Mediumsmoleküle,
L_t „ „ „ des Partikels,
λ mittlerer Molekülabstand (zentral) im Medium,
D Dichte des Mediums,
η Reibungskonstante des Mediums,
Ω_μ Verteilungsfaktor (vgl. 70, 87),
K auf das Partikel wirkende Kraft.

Sonstige allgemein durchgeführte Bezeichnungen s. in Teil I, S. 400 u. f.

Heidelberg, 3. Dezember 1919.

(Eingegangen 6. Dezember 1919.)

2. *Die magnetischen Eigenschaften von Nickel-Kupfer-Legierungen*[1]; *von R. Gans und A. Fonseca.*

(Nach Messungen von A. Fonseca.)

Aus den Untersuchungen von Perrier und Kamerlingh Onnes[2]) über den Magnetismus von Gemischen flüssigen Sauerstoffs und Stickstoffs ergab sich ein deutlicher Einfluß der Beimengung magnetisch fast neutralen Stickstoffs auf die spezifische Suszeptibilität des paramagnetischen Sauerstoffs; mit anderen Worten, der Magnetismus des Sauerstoffs hängt von dem gegenseitigen Abstande seiner Moleküle ab.

Es war nun von Interesse, festzustellen, ob das gleiche Phänomen auch bei Legierungen zu beobachten war, welche feste Lösungen eines magnetischen Metalls mit einem unmagnetischen bilden, und gegebenenfalls den Magnetismus der Legierung in seiner Abhängigkeit von der Konzentration und von der Temperatur zu studieren und die Resultate mit der Gansschen Theorie[3]) des Paramagnetismus zu vergleichen.

Wir wählten Ni-Cu-Legierungen, erstens weil diese nach der von Guertler und Tammann[4]) beobachteten Schmelzkurve eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen bilden sollten, und zweitens weil Tammann[5]) auf Grund seiner zahlreichen qualitativen Bestimmungen der Magnetisierbarkeit von Legierungen, in denen eine Komponente ein ferromagnetisches Metall ist, glaubte, den Satz aufstellen zu können, daß immer,

1) Vgl. Contribución al estudio de las ciencias. Universidad Nacional de La Plata 2. 1918, S. 178.

2) A. Perrier u. H. Kamerlingh Onnes, Leiden Comm. Nr. 139.

3) R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.

4) W. Guertler u. G. Tammann, Zeitschr. f. anorg. Chemie 52. S. 25. 1907.

5) G. Tammann, Zeitschr. f. phys. Chemie 65. S. 78. 1909.

wenn das Lösungsmittel ein unmagnetisches Metall sei, die Legierungen nicht ferromagnetisch seien, selbst wenn die andere Komponente es wäre.

Da, wie wir sehen werden, keine dieser beiden Behauptungen zutrifft, konnten wir bei Ni-Cu-Legierungen das Problem, welches wir uns gestellt hatten, nicht lösen, benutzten aber die Gelegenheit, aus ihrem magnetischen Verhalten ihre Konstitution zu erschließen.

Herstellung der Legierungen.

Zum Schmelzen der Metalle stellten wir uns einen elektrischen Ofen her, wie ihn Ruer[1]) beschreibt, und zwar mit den Verbesserungen, die Bloch[2]) an ihm angebracht hat.

Der Strom wird hierbei direkt durch einen ausgehöhlten Kohlezylinder (Bogenlampenkohle von 30 mm Durchmesser) hindurchgeschickt, in dessen Innern sich ein Schiffchen aus Magnesia befand, das die Metalle enthielt. Damit diese sich bei der hohen Temperatur nicht oxydierten und die Kohle nicht litt, ließen wir durch den Hohlzylinder einen Strom von Stickstoff gehen, welcher mittels einer Lösung von Pyrogallussäure von dem in ihm enthaltenen Sauerstoff befreit war.

Der Ofen wurde mittels Wechselstrom geheizt, den eine Dynamomaschine von 6 K.W. lieferte. Da das Strommaximum dieser Maschine aber nur 150 Ampere betrug, bauten wir uns einen statischen Autotransformator vom Umformungsverhältnis 2:1 und schalteten zur Feinregulierung des Stroms eine Spule mit herausziehbarem Eisenkern als variable Impedanz ein.

Als Metalle wurden reinstes Nickel von Merck und elektrolytisches Kupfer benutzt. Letzteres enthielt gemäß einer qualitativen Analyse Spuren von Eisen, diente jedoch unseren Zwecken, da es trotzdem noch diamagnetisch war.

Bestimmung der Konzentration.

Der Gewichtsunterschied zwischen der Legierung und den Substanzmengen, die zu ihrer Herstellung verwendet wurden, war fast immer zu vernachlässigen und betrug nur in einigen wenigen ungünstigen Fällen 0,02 des Sollwertes.

1) R. Ruer, Metallographie, Hamburg u. Leipzig 1907. S. 279.

2) O. Bloch, Über die magnetischen Eigenschaften der Ni-Co-Legierungen. Inaugural-Dissertation, Zürich 1911.

Deshalb verzichteten wir im allgemeinen auf eine Analyse und machten von derselben nur Gebrauch, wenn eine Gewichtsdifferenz vorlag oder bei den Konzentrationen, bei denen die magnetischen Eigenschaften Besonderheiten aufwiesen, und zwar benutzten wir dann zur Analyse eine elektrolytische Methode.[1])

Die Curiesche Temperatur.

Die in Celsiusgraden gemessene Temperatur Θ, oberhalb welcher ein ferromagnetischer Körper paramagnetisch wird, genügt bekanntlich der Beziehung

$$\chi = \frac{C}{t - \Theta}, \tag{1}$$

in der χ die spezifische Suszeptibilität bei der Temperatur t ($t > \Theta$), C die sogenannte Curiesche Konstante bedeutet.

Diese kritische Temperatur Θ, die für jede reine ferromagnetische Substanz charakteristisch ist, variiert mit der Menge zugesetzter fremder Substanzen, falls diese den ferromagnetischen Kristall verändern, sei es, daß sie mit ihm eine chemische Verbindung eingehen, sei es, daß sie sich in ihm lösen. Dann nimmt die Veränderung natürlich mit der Konzentration des zugesetzten Stoffes zu, bis Sättigung eintritt; und da andererseits die magnetische Komponente, wenn sie in einem anderen unmagnetischen Kristall gelöst ist, auch einen Transformationspunkt besitzt, der mit der Konzentration variiert, so ergibt sich, daß die Reihe von Legierungen aus einem ferromagnetischen und einem unmagnetischen Metall, die verschiedenen Mischungsverhältnissen entsprechen, Transformationspunkte besitzen, die kontinuierlich variieren von der reinen Komponente bis zur Sättigung mit dem anderen Metall. In dem Gebiete zwischen beiden Sättigungspunkten besteht die Legierung jedoch aus immer denselben beiden gesättigten Mischkristallen in verschiedenen Proportionen; deshalb müssen dort beide Transformationstemperaturen bestehen, welche jedem der beiden entsprechen. Wir haben also eine Kurve vom Typus der Fig. 1 zu erwarten.

---

1) Vgl. z. B. B. Neumann, Theorie und Praxis der elektrolyt. Analyse der Metalle, S. 165, Halle 1897.

Dieser Typus ist ganz verschieden von denen, die man in anderen Fällen erhalten würde. Bei vollständiger Mischbarkeit z. B. würde die Kurve stetig sein. Im Falle einer mit ihren beiden Komponenten mischbaren chemischen Verbindung würde man einen Knick der Kurve bei der Konzentration zu erwarten haben, welche dem Mengenverhältnis der Verbindung entspricht.

Fig. 1.

Wir besitzen also in der Beobachtung der Transformationspunkte eine Methode, die uns nicht nur erlaubt, die gegenseitige Mischbarkeit der Komponenten zu bestimmen, sondern auch eine teilweise Mischbarkeit und eine chemische Verbindung zu unterscheiden.

Um Θ zu ermitteln, kann man nach dem Vorgehen von Weiss etwa $1/\chi$ oder eine Größe, die $1/\chi$ proportional ist, für verschiedene Temperaturen t oberhalb der kritischen Temperatur bestimmen. Die graphische Darstellung in der t, $1/\chi$-Ebene muß dann nach Gleichung (1) eine Gerade ergeben, welche die Abszissenachse im Punkte $t = \Theta$ schneidet.

Es wurden deshalb die Ablenkungen gemessen, die bei verschiedenen Temperaturen ein Stäbchen der zu untersuchenden Substanz im Magnetfelde erfährt.

Fig. 2.

Zu dem Zwecke hängten wir zentrisch zwischen den zylindrischen Polschuhen eines du Boisschen Halbringelektromagneten von Hartmann & Braun das horizontale Stäbchen b unter 45° gegen die Kraftlinienrichtung mittels einer Suspension auf, wie sie Fig. 2 zeigt. In derselben bedeutet s eine Bronzedrahtspirale, die oben an einen Messingdraht v angelötet war. Letzterer konnte in einer Hülse bei C in seiner Höhe verändert, um seine Achse gedreht und mittels einer Druckschraube festgeklemmt werden. Der Kupferdraht Cu

trägt einen Planspiegel e zur Ablesung mit Fernrohr und Skala und endigt unten in einem zylindrischen Bleigewicht, das aus Merckschem reinen Material hergestellt war, weil es unmagnetisch sein mußte. Das Probestäbchen b aus der Legierung wurde mittels zweier in der Figur sichtbaren Haken aus elektrolytischem Kupfer befestigt und konnte leicht gegen ein anderes ausgewechselt werden.

Die Temperaturbäder.

Die Temperaturbäder variierten je nach der Legierung, um die es sich handelte, denn wir mußten bei Temperaturen von $-150°$ bis $+150°$ arbeiten.

Bei den Bestimmungen oberhalb $0°$ benutzten wir einfach ein Becherglas in Asbesthülle mit Wasser unterhalb $100°$ und mit Petroleum für höhere Temperaturen. Geheizt wurde mit einem Bunsenbrenner, durch Rühren gleichmäßige Temperatur erzielt und bei geeigneter Temperatur schnell abgelesen. Diese einfache Anordnung war vollkommen genau genug.

Bei Temperaturen unterhalb $0°$ waren die Schwierigkeiten um so größer, je tiefer jene waren. Mit einer Mischung von Alkohol oder Äther mit fester Kohlensäure erhielten wir als tiefste Temperatur $-80°$, und bei Benutzung eines Dewarschen Gefäßes steigt die Temperatur genügend langsam entsprechend der Verdampfung der Kohlensäure. Energisches Rühren vor jeder Ablesung verhinderte, daß die Gasentwicklung zu Störungen Anlaß gab.

Noch tiefere Temperaturen erzeugten wir mit flüssiger Luft und einer Versuchsanordnung, die aus Fig. 3 ersichtlich ist.

Die Flüssigkeit des Temperaturbades wurde zuerst mit Eis und Kochsalz, dann mit einem Gemisch aus fester Kohlensäure und Äther vorgekühlt und in das Dewarsche Gefäß A eingegossen, welches sich zwischen den Polen PP des Elektromagneten befand. Um ihre Temperatur noch weiter zu erniedrigen, ließ man flüssige Luft aus dem Dewarschen Gefäß D mittels des Druckballons b in die ringförmige Schachtel Cu aus Kupferblech treten, an welche die Kupferrohre C_1 und C_2 angelötet waren, die zum Ein- und Austritt der flüssigen Luft dienten. Der Aluminiumrührer r, welcher, um Erschütterungen der Aufhängung zu vermeiden, sich nur zwischen der Kupfer-

schachtel *Cu* und dem an die Kupferrohre gelöteten Ring *a* bewegen konnte, ließ eine hinreichend homogene Temperatur erzeugen, die mit dem Pentanthermometer *T* gemessen wurde, dessen unterer Teil sich in der Höhe der Legierung befand.

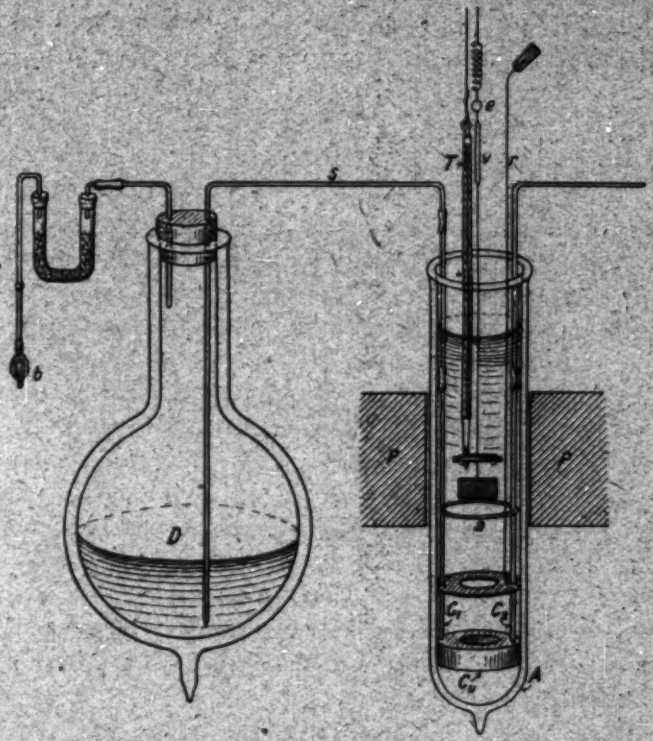


Fig. 8.

Zwischen dem Draht, der den Spiegel *e* trug, und dem Kupferdraht der Aufhängung mußten wir noch ein Glasröhrchen *v* einschalten, weil sonst wegen der großen Wärmeleitfähigkeit des Kupfers der Spiegel sich so weit abkühlte, daß er beschlug.

Die größte Schwierigkeit, die sich beim Arbeiten bei tiefen Temperaturen einstellte, war, eine Flüssigkeit zu finden, die einen genügend tiefen Gefrierpunkt besaß[1]), damit die Aufhängung sich frei in ihr bewegen konnte. Zuerst probierten

1) Pentan wäre geeignet gewesen, war aber nicht aufzutreiben.

wir Petroläther der Firma Poulenc, der aber schon bei ungefähr $-120°$ schwerflüssig wurde. Dann destillierten wir diese Substanz über CaO mit einem Le Bel-Henningerschen Apparat und verwendeten nur den Bestandteil, der unter 30° überdestilliert. Damit konnten wir bis $-150°$ hinuntergehen, ohne daß die Viskosität störend wurde.

Schließlich machten wir die Aufhängung empfindlicher, indem wir die Bronzespirale durch einen geraden Silberdraht ersetzten, und erreichten dadurch, daß wir 150° oberhalb des Transformationspunktes arbeiten konnten und noch genügend große Ausschläge erhielten.

Gewöhnlich beobachteten wir bei steigenden Temperaturen, indem wir die Badflüssigkeit zunächst bis zu dem tiefsten gewünschten Punkte abkühlten und sie allmählich sich erwärmen ließen. Dadurch wurden die Ablesungen am Pentanthermometer auch genauer, welches bei abnehmenden Temperaturen leicht zu niedrige Werte anzeigt, weil ein Teil der Flüssigkeit an den Wänden der Kapillaren haften bleibt.

Es ergaben sich die Zahlenwerte der folgenden Tabelle, in die wir auch die Beobachtungen von Guertler und Tammann, sowie die von Hill[1]) aufgenommen haben.

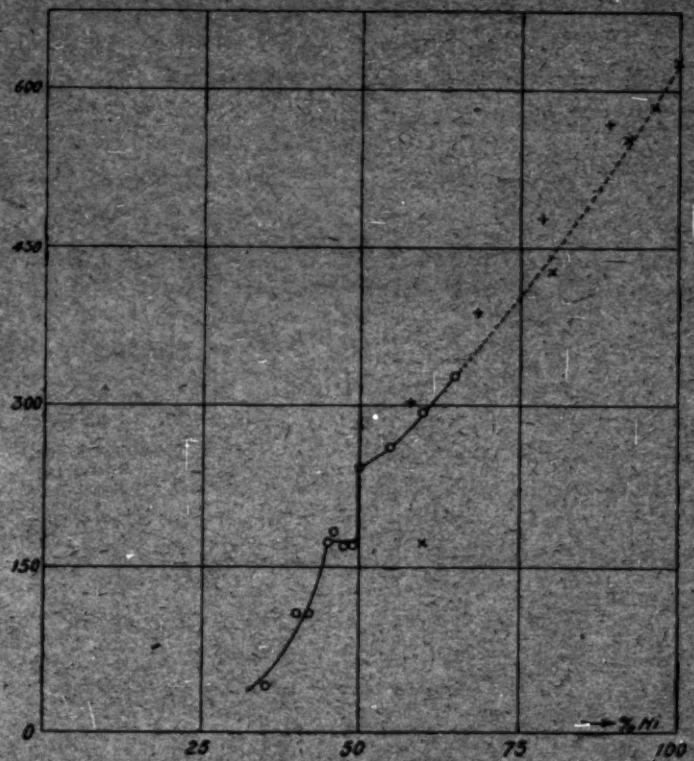
Transformationspunkte.

Prozente Ni	Θ	Beobachter	Prozente Ni	Θ	Beobachter
35	$-230°$	Fonseca	50	$-100°$	Hill
40	-165	„	80	155	„
42	-165	„	92	280	„
45	-100	„	96	310	„
46	-90	„	100	355	„
47,5	-105	„	57,9	30?	G. und T.
49	-105	„	68,2	115	„
50	-30	„	78,6	205	„
55	-12	„	89,1	295	„
60	20	„			
65	55	„			

Letztere vervollständigen unsere Beobachtungen für größere Konzentrationen und bilden mit denselben eine glatte Kurve. Die einzige größere Abweichung ist die Beobachtung an der

1) B. Hill, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 4. S. 194. 1902.

60%igen Legierung, für die Hill — 100° findet im Widerspruch mit unseren Resultaten und denen Guertler und Tammanns. Diesen Wert scheint Hill auch nur oberflächlich bestimmt zu haben, da er ihn einfach in seiner Tabelle angibt,



Transformationspunkte.
○ Beobachtungen von Fonseca.
× „ „ B. Hill.
\+ „ „ Guertler u. Tammann.

Fig. 4.

während er bei den anderen Legierungen die ganze Temperaturkurve der Suszeptibilität mitteilt. Daß die Werte von Guertler und Tammann sämtlich etwas höher liegen als die Hillschen, ist bei der Meßmethode jener Forscher, die geringere Genauigkeit beansprucht, leicht verständlich.

Die Fig. 4 stellt Θ in seiner Abhängigkeit von der Konzentration dar, jedoch sind die Temperaturen in absolutem Maße angegeben.

Theoretisch sollte man zwischen 45 und 50 Proz. eigentlich eine kompliziertere Abhängigkeit des Wertes $1/\chi$ von t als die Linearität erwarten, aus der dann zwei Transformationspunkte abgeleitet werden könnten, entsprechend der chematischen Fig. 1, doch ließ sich dieses Resultat nicht beobachten.

Die Suszeptibilität bei Zimmertemperatur.

Ferner haben wir die spezifische Suszeptibilität χ der Legierungen bei ein und derselben Temperatur $t = 15^0$ bestimmt.

Wir bedienten uns der Weissschen Meßmethode[1]), bei der man χ durch die Stromstärken i und J mißt, die durch zwei koaxiale Spulen fließen und die Anziehung kompensieren, welche durch ein inhomogenes Feld auf die fragliche Substanz ausgeübt wird. Ist deren Masse M, so gilt die Formel

$$\chi = B\frac{iJ}{M}, \tag{2}$$

wo B eine Konstante ist, die mittels eines Stoffes bekannter Suszeptibilität ermittelt werden kann. Als solcher diente uns eine $MnCl_2$-Lösung, deren Salz aus reinstem Merckschen Fabrikat durch Umkristallisieren gewonnen worden war. So folgte die nachstehende Tabelle.

Die Suszeptibilität.

Prozent Ni	$\chi \cdot 10^6$	Prozent Ni	$\chi \cdot 10^6$
20,3	0,038	46,0	0,344
29,6	0,073	46,0	0,336
34,8	0,112	46,3	0,358
38,8	0,155	46,6	0,489
40,4	0,189	48,4	0,468
42,5	0,213	49,7	1,037
44,5	0,338	54,9	1,530
		60,2	4,565

Die Resultate der ersten beiden Proben (von 20,3 Proz. und 29,6 Proz.) sind ziemlich unsicher wegen des geringen Ausschlags, der bei ihrer Messung kompensiert werden mußte.

1) P. Weiss u. G. Foëx, Arch. d. sc. phys. et nat. **31**. S. 4, 19, 89, 117. 1911.

Die Suszeptibilitäten wurden gemessen, nachdem die Legierungen 6 Stunden lang auf ungefähr 800° erwärmt worden waren. Bekanntlich gleichen sich Inhomogenitäten der Konzentration auch in festen Lösungen durch Diffusion aus, und zwar um so schneller, je näher die Temperatur dem Schmelzpunkte liegt.

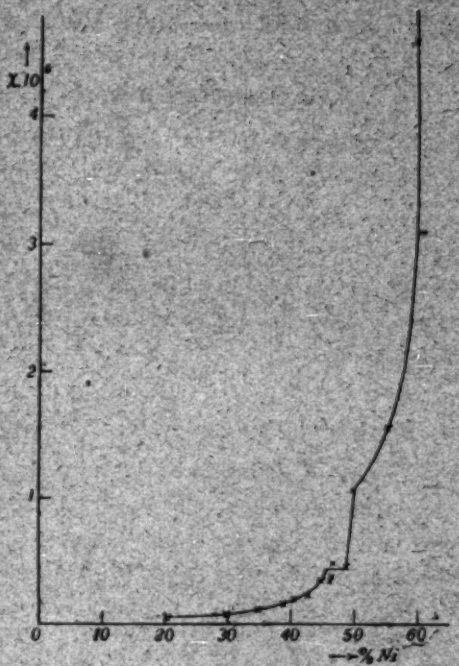


Fig. 5.

Die Resultate sind in der Fig. 5 graphisch dargestellt. Wie wir aus ihr erkennen, wächst die Suszeptibilität zuerst langsam mit dem Nickelgehalt bis 45 Proz., um von 50 Proz. an schnell anzusteigen. Über 60 Proz. ließen sich keine Messungen ausführen, da bei der Temperatur von 15° das Material dann ferromagnetisch ist. Besonders charakteristisch ist das Verhalten zwischen 45 und 50 Proz., d. h. in derselben Gegend, in der auch der Umwandlungspunkt die in Fig. 4 ersichtliche Eigenart zeigte. Theoretisch hätte man zwischen 45 und 50 Proz. eine lineare Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Konzentration zu erwarten, doch tritt das praktisch manchmal nicht ein.[1])

Schlussfolgerungen.

Aus den vorstehenden Beobachtungen können wir folgende Schlüsse ziehen.

1. Entgegen der Tammannschen Regel[2]) können ferromagnetische in unmagnetischen Kristallen gelöste Kristalle ferromagnetische Legierungen bilden.

1) Vgl. K. Honda, Ann. d. Phys. 32. S. 1003. 1910.
2) G. Tammann, Ztschr. f. phys. Chem. 65. S. 73. 1909.

2. Kupfer-Nickel-Legierungen gehören nach Roozeboom zum Typus IV von Mischungen, die eine beschränkte gegenseitige Mischbarkeit zeigen. Dieselbe ist unterbrochen durch einen Konzentrationsbereich, der bei unserem Beispiel sich ungefähr von 45 bis 50 Proz. Nickel erstreckt, und in dem kupfergesättigte Nickelkristalle und nickelgesättigte Kupferkristalle in variablen Proportionen vorhanden sind.

Dies Verhalten ist auch schwach angedeutet in der Unstetigkeit der von Feussner und Lindeck[1]) beobachteten Kurven der elektrischen Leitfähigkeit sowie ihres Temperaturkoeffizienten [siehe auch die Figur bei Haken[2])], die jene Autoren auf die Existenz einer chemischen Verbindung der Formel CuNi schließen ließen.

3. Das Resultat der thermischen und mikrographischen Analyse von Guertler und Tammann ließ diese auf die lückenlose Folge von Mischkristallen schließen; dieser Irrtum erklärt sich aus der kleinen Ausdehnung des Sättigungsbereichs, der verständlicherweise jenen Forschern leicht entgangen sein kann.

4. Unser Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem Verhalten von Co-Cu-Legierungen mit dem alleinigen Unterschiede, daß die Lücke in der Reihe der Mischkristalle bei diesen wesentlich ausgedehnter ist. Insofern verhält sich Ni also ganz analog wie Co; die beiden Metalle sind also auch in dieser Beziehung einander sehr ähnlich.

La Plata, Instituto de Física, 20. November 1917.

1) K. Feussner u. St. Lindeck, Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 2. S. 501. 1895.

2) W. Haken, Ann. d. Phys. 32. S. 291. 1910. Tafel XI.

(Eingegangen 4. Oktober 1919.)

3. *Über thermoelektrische Ströme in Quecksilber; von H. Haga und F. Zernike.*

(Übersetzt aus den Versl. en Meded. Amsterdam, 29. März 1919.)

In einer in diesen Annalen erschienenen Abhandlung „Ein für Thermoelektrizität und metallische Wärmeleitung fundamentaler Effekt“ versucht C. Benedicks zu beweisen, daß an jeder Stelle in einem homogenen Leiter, wo beiderseits das Temperaturgefälle ungleich ist, eine Thermokraft auftritt. Benedicks weist auf die Möglichkeit hin, daß die unter diesen Umständen in *festen* Metallen auftretenden Thermokräfte Molekular- oder Strukturänderungen zuzuschreiben sind und betrachtet deshalb den Beweis der Existenz dieser Kraft nur dann endgültig erbracht, wenn es gelingt, sie auch in einem *flüssigen* Leiter nachzuweisen. Es gelang ihm aber nicht, bei der schon von Magnus[2]) angewandten Anordnung — einem an ein empfindliches Galvanometer angeschlossenen, aus Quecksilber bestehenden Leiterkreis — selbst beim Heranziehen des „Drosselprinzips“ sichere Resultate zu erhalten. Benedicks schreibt dieses der Wärmeleitung des Glases zu, wodurch die Größe des Temperaturgefälles herabgesetzt werde.

Es schien uns nicht unmöglich, mit Quecksilber den Versuch in solcher Weise anzustellen, daß allen von Benedicks aufgestellten Bedingungen[3]) vollständig genügt wurde und somit eine Entscheidung zu erlangen über die Existenz des neuen Effektes. Wir benutzten dazu als Leiterkreis ein empfindliches Galvanometer und zwei ungleich temperierte sich berührende Quecksilberstrahlen. Dadurch vermeidet man ganz den von Benedicks gefürchteten Einfluß des Glases, die Berührungsstelle kann äußerst klein gemacht werden, während das Tem-

1) C. Benedicks, Ann. d. Phys. 55. S. 1—80, 108—150. 1918.
2) G. Magnus, Pogg. Ann. 83. S. 497. 1851.
3) A. a. O. S. 118.

peraturgefälle sehr groß ist und bleibt, weil immer neue Quecksilbermengen miteinander in Berührung kommen.

Die Versuchsanordnung war folgende:

An der Glaskugel A — Durchmesser $\pm$ 7,5 cm — war eine Röhre B angeschmolzen, deren ausgezogenes Ende eine sehr enge Öffnung hat. Die Kapillarröhre C ist mittels eines 50 cm langen Kautschukschlauches an der Röhre E verbunden. F und G sind ebenfalls durch einen 50 cm langen Schlauch verbunden; bei P ist ein Platindraht eingeschmolzen. Die Hälfte der Kugel A und der übrige Glasapparat war mit im Vakuum destilliertem Quecksilber gefüllt. Mittels eines über den oberen Teil von A geschobenen Druckschlauchs wurde A mit einem mit Luft von 2 bis 3 Atmosphären gefüllten Kupfergefäß verbunden. Diese Anordnung bezweckte, erstens zu verhüten, daß die Wärme sich durch Leitung von der erhitzten Röhre B bis zum Platindraht P fortpflanzen könnte und zweitens, um eine bequeme Füllung von A mit Qecksilber zu ermöglichen.

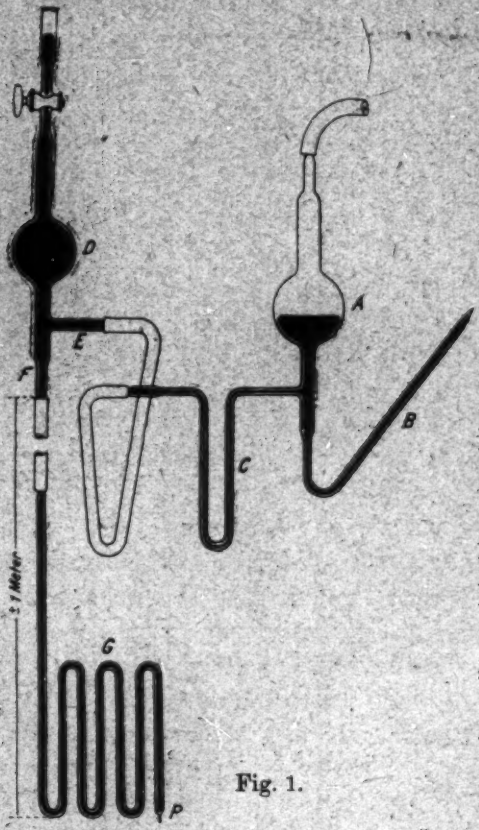


Fig. 1.

Für jeden Quecksilberstrahl war ein gleicher Apparat hergestellt; die beiden Röhren G wurden mit den im Zickzack gebogenen Teilen aneinander gebunden in ein großes (48 × 24 × 20 cm) mit Wasser gefülltes Gefäß gesenkt; die Platindrähte P waren an den Leitungsdrähten zum Galvanometer — mit weißer Seide umklöppelten biegsamen Gummiaderschnüren gelötet; die Lötstellen und die nicht isolierten Platin- und

Kupferdrähte wurden sorgfältig mit Schellack bedeckt und 2 m der Leitungsschnüre ins Wasser untergetaucht, damit die Verbindungsstellen Quecksilber-Platin-Kupfer gleiche Temperatur hätten und geschützt wären für etwaige durch die Kupferdrähte oder das Quecksilber hingeleitete Wärme.

Der Widerstand der Zuleitungsdrähte, der Röhren mit Quecksilber und zwei Quecksilberstrahlen war zusammen 1,5 Ohm. Das Galvanometer war ein von Carpentier verfertigtes Instrument vom Thomson-Typus, dessen astatische Doppelnadel durch ein von Siemens & Halske verfertigtes astatisches Nadelsystem nach du Bois-Rubens ersetzt worden war; getragen wurde das System von einem 7 μ dicken Quarzfaden. Der Widerstand der Spulen ist 2,7 Ohm; die Skalenentfernung war 2,8 m; das Ablesefernrohr hatte eine 33fache Vergrößerung. Durch den Richtmagneten wurde eine Empfindlichkeit erreicht von 1 mm Ausschlag für $5{,}8 \times 10^{-9}$ Amp., so daß bei einem totalen Widerstand von 4,2 Ohm 1 Mikrovolt einen Ausschlag gab von 41 mm. Bei dieser Empfindlichkeit waren wir aber, wegen der Straßenbahnstörungen, gezwungen, die Beobachtungen während der Nacht zu machen. Dann aber waren, bei nicht großen Deklinationsschwankungen, die Ablesungen bis auf 0,1 mm genau. Einer der Glasapparate ABC war durch ein starkes Stativ getragen, das fein regulierbare Verschiebungen in drei aufeinander senkrechte Richtungen gestattete. Zum Auffangen des Quecksilbers waren im oberen Teil einer vertikalen 4 cm weiten Glasröhre zwei vertikale Schlitze gemacht, wodurch die Enden der Röhren B geschoben wurden; auf dem oberen Rand der Röhre wurde ein hölzerner Ring mit Glasfenster gelegt, durch welches die Strahlen mit einem 15fach vergrößernden Binokularmikroskop beobachtet werden konnten. Die Quecksilberstrahlen trafen das Fenster und das Quecksilber wurde in einem unter die Röhre gestellten Becherglas gesammelt.

Bei richtigen Öffnungen der Röhren B erhielten wir sehr schöne Strahlen, die in einer Länge von einigen Zentimetern ganz wie Metalldrähte aussahen, so daß die Durchmesser mittels eines mit Okularmikrometer versehenen Mikroskopes gemessen werden konnten. Bei unseren Versuchen war der Durchmesser des einen Strahles 0,10 mm, der des anderen 0,13 mm. Weiter

von den Öffnungen entfernt wurden die Strahlen durch Tropfenbildung trübe.

Näherte man einen Strahl langsam dem anderen und berührten sie sich nur oberflächlich, so behielten sie ungefähr ihre — senkrecht aufeinander stehende — Richtung bei. Eine kleine Verschiebung hatte eine große Änderung zufolge: Die Strahlen vereinigten sich in einer dünnen, bald sich in Tröpfchen auflösenden Membran; bei zentralem Stoß war die Membran senkrecht zur Ebene der Strahlen gerichtet. Zum Erhalten des erwärmten Strahles wurde eine 16 cm lange, gut umschließende Kupferröhre über den oberen Teil von *B* geschoben und durch eine darunter gestellte Gasflamme erhitzt; die Temperatur konnte hierdurch, auch während des Spritzens, bis zum Siedepunkt steigen, welches sich u. a. zeigte, als wir einmal unmittelbar nach dem Versuch die Druckluft in *A* ausströmen ließen und der Apparat zerbrochen wurde durch die sich aus der überhitzten Flüssigkeit auf einmal bildende Dampfmenge. Es erschien uns überflüssig, die Temperatur des Quecksilbers in den Strahlen genau zu messen, es genügte uns, sie zu schätzen, u. a. aus der Menge des einen feinen Nebel bildenden Dampfes.

An verschiedenen Tagen wurden mehrere vollkommen miteinander übereinstimmende Versuchsreihen gemacht; nebenstehende Tabelle gibt als Beispiel eine derselben.

In der zweiten und dritten Vertikalreihe bedeuten die Zahlen die Skalenablesungen in mm; von 1 Uhr 27 Min. bis 1 Uhr 31 Min. waren die Strahlen nicht erwärmt und es wurde abwechselnd abgelesen, wenn die Strahlen sich nicht berührten und bei Berührung unter zentralem Stoß; der kleine Ausschlag rührte von den im Stromkreis irgendwo existierenden Thermokräften her. Jetzt wurde die Gasflamme unter der Kupferröhre gestellt, so daß der eine Quecksilberstrahl fortwährend wärmer wurde: Die Ausschläge wurden größer; nach Fortnahme des Gasbrenners wurden die Ausschläge kleiner und waren gleich der ursprünglichen, sobald das Quecksilber die Zimmertemperatur wieder erreicht hatte. Wurde der andere Strahl erhitzt, so waren die Ausschläge kleiner als bei nicht erwärmten Strahlen; der Einfluß der Erwärmung ist also umkehrbar.

Zeit 6. März 1919	Ablesung: Die Strahlen berühren sich nicht	Ablesung: Die Strahlen berühren sich	Ausschlag
1 Uhr 27 Min.	154,2		
	153,8	161,9	+ 7,9
	154,0	161,9	+ 8,0
	154,0	161,7	+ 7,7
1 Uhr 31 Min	Flamme unter der Kupferröhre		
	153,2		
	153,0	161,4	+ 8,3
	153,0	161,7	+ 8,7
	152,5	162,0	+ 9,2
		162,6	+ 9,8
	153,0	Dämpfe sichtbar	
		163,0	+ 10,0
	153,0	163,2	+ 10,2
	153,0	sehr starker Dampf	
		163,5	+ 10,8
	152,7	163,7	+ 10,8
	153,0		
	Flamme entfernt		
	152,7		
	152,7	163,5	+ 10,8
	Quecksilber auf Zimmertemperatur		
	154,0		
1 Uhr 41 Min.	154,2	162,1	+ 8,0
1 Uhr 48 Min.	155,2		
	155,2	162,8	+ 7,6

Man könnte meinen, daß der Unterschied zwischen den Ausschlägen bei gleicher und ungleicher Temperatur der Quecksilberstrahlen — maximal 3,2 mm — einer etwaigen Verbindung des Quecksilbers mit einem Bestandteile des Glases zuzuschreiben wäre, wodurch der erwärmte Strahl aus verunreinigtem Quecksilber bestehen würde. Um dieses zu prüfen, wurde die eine Röhre *B* eine Stunde lang vor Anfang des Versuches stark erhitzt, so daß das sich in dieser Röhre befindende Quecksilber in höherem Grade verunreinigt werden könnte und wodurch während der ersten Minute des Versuches ein anderer Ausschlag sich ergeben würde als nachher. Dieses zeigte sich aber nicht, so daß obige Annahme nicht richtig sein kann.

Ungezwungen aber läßt sich obengenannter Unterschied, der Größe und Richtung nach, deuten als eine Folge der zwischen Quecksilber unter Druck und Quecksilber ohne Druck

auftretenden Thermokraft, welche Kraft von Des Coudres[1] gefunden wurde und später auch von Wagner[2] und Hörig[3] gemessen ist. Stand doch das Quecksilber in den Glasgefäßen unter dem Druck der zusammengepreßten Luft, die Quecksilberstrahlen aber wurden von unter Atmosphärendruck stehendem Quecksilber gebildet und ihre Berührungsstellen mit dem Quecksilber unter Druck hatten ungleiche Temperatur.

Daß diese Auffassung die richtige war, wurde außerdem durch folgenden Versuch bewiesen. Über die Enden der beiden Röhren B wurde ein knieförmig umgebogenes enganschließendes Glasröhrchen geschoben, das durch die Strahlen mit Quecksilber gefüllt wurde; eine an der oberen Seite angebrachte kleine Öffnung diente als Ausfluß.

Wurde nun eine der Röhren B erwärmt, so erhielten wir Ausschläge von ganz derselben Größe wie mit den freien Quecksilberstrahlen, welche beim Ablassen des Druckes sogleich verschwanden.

Bei unseren Versuchen wurde aber dennoch eine Tatsache gefunden, welche sich nicht durch diese Thermokraft erklären läßt: immer wurde ein größerer Ausschlag konstatiert bei sehr oberflächlicher Berührung der Strahlen als beim zentralen Stoß; die Differenz war größer bei größerem Temperaturunterschied der Strahlen und zwar maximal 1,5 mm. Es wäre möglich, diese Differenz dem bei oberflächlicher Berührung stattfindenden größeren Temperaturgefälle zuzuschreiben und sie als Beweis der Existenz des Benedicks-Effektes zu betrachten. Diese Thermokraft wäre aber nur $3{,}5 \times 10^{-8}$ Volt bei dem sehr großen Temperaturunterschied von 360° C in einer Entfernung von einem Bruchteil eines Millimeters, so daß man sie bei den üblich vorkommenden Thermoströmen nicht zu berücksichtigen braucht. Da es uns erwünscht erschien, die obere Grenze dieser etwaigen Thermokraft in mehr normalen Fällen und ohne den Druckeffekt anzugeben, wurde ein dünnwandiges Glasröhrchen — Wandstärke 0,1 mm, innerer Durchmesser $\pm$ 0,8 mm — in der Mitte ausgezogen auf eine

1) Des Coudres, Wied. Ann. 43. S. 673. 1891.
2) E. Wagner, Ann. d. Phys. 27. S. 955. 1908.
3) H. Hörig, Ann. d. Phys. 28. S. 871. 1909.

Wandstärke von 0,08 mm und inneren Durchmesser von ± 0,3 mm. Dieses Röhrchen wurde mittels Stückchen Kautschukschlauch mit den Enden der Röhren *B*, deren ausgezogene Enden abgeschnitten waren, verbunden und horizontal aufgestellt; durch eine kleine Niveaudifferenz konnten wir einen schwachen Strom von Quecksilber durchfließen lassen. Ohne diesen Strom gab eine Erwärmung des Röhrchens an der einen Seite der verjüngten Stelle nicht den geringsten Ausschlag; die Oberfläche des Querschnittes des Quecksilbers im Röhrchen war 0,50 mm², die des Glases 0,38 mm² und im ausgezogenen Teil 0,08 mm² bzw. 0,1 mm²; da die Wärmeleitfähigkeit des Glases den zehnten Teil derjenigen des Quecksilbers beträgt, kann der von Benedicks gefürchtete Einfluß des Glases unter diesen Umständen nur klein sein. Außerdem konnte dieser Einfluß noch in hohem Maße dadurch herabgesetzt werden, daß wir das Quecksilber dem Wärmestrom entgegen strömen ließen. Das kalte Quecksilber strömte durch die Einengung, und wurde gleich nachher durch eine das Röhrchen berührende Bunsenflamme stark erhitzt; das Quecksilber in der Einengung, wo die Geschwindigkeit das sechsfache der Geschwindigkeit im Röhrchen war, behielt seine niedrige Temperatur bei; ein Temperaturunterschied von wenigstens 250° C in einer Entfernung von wenigen Millimetern wurde hierdurch erreicht.

Da bei der Ausführung dieses Versuches die Deklinationsschwankungen äußerst gering waren, ließ sich gegebenenfalls eine Ausschlagsänderung von 0,1 mm ganz sicher nachweisen. Sogar diese Änderung wurde nicht beobachtet, so daß bei obengenanntem Temperaturgefälle die Thermokraft in Quecksilber nicht mehr als 1×10^{-9} Volt betragen kann.

Was nun die obenerwähnte kleine Differenz von 1,5 mm anbetrifft, welche bei den verschiedenen Weisen, worauf die Strahlen sich berühren, gefunden wurde, so könnte sie, ohne Annahme einer vom Temperaturgefälle abhängigen Thermokraft, wohl einer anderen Ursache zugeschrieben werden: aus der während einer Minute gespritzten Quecksilbermenge und dem Durchmesser des Strahles folgt, daß die Geschwindigkeit des Quecksilbers ungefähr 5 m/Sek. betrug, so daß die Zeit, worin bei oberflächlicher Berührung der eine Strahl den anderen passiert, weniger als $^1/_{50000}$ Sek. ist. Bei einem Temperatur-

unterschied der beiden Strahlen von 800° C läßt es sich denken, daß in dem beiden Strahlen gemeinsamen Teil die Elektronen und Molekülen während jener kurzen Zeit noch nicht in normale Verhältnisse gekommen sind, so daß jener Teil als aus einer anderen Art Quecksilber bestehend betrachtet werden kann, welches, an beiden Seiten ungleich temperiert, eine Thermokraft liefert.

Nach unserer Meinung haben diese Versuche die Existenz des von Benedicks gesuchten Effektes widerlegt, und es ist deshalb nicht nötig, die Theorie der Thermoelektrizität zu ändern.

Groningen, Physikalisches Institut d. Universität.

(Eingegangen 26. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D. R. P.

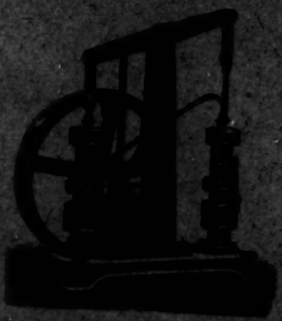
Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neu-konstruktionen nach Angabe.

System Gaede, D. R. P. angemeldet

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D. R. P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.**



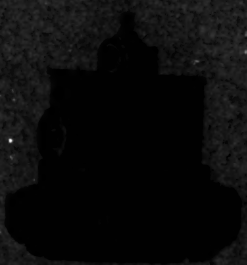
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 6–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene

Fabrik-Marke

Induktoren mit Demonstrations-schaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen gest. Verlangen!